



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

60. Der Rahmen

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

Gleichung der Einflußlinien für die Bogenkräfte.

	Bogen l_2	Bogen l_5	Bogen l_8
	$\beta_{22} \delta_{m2}$	$\beta_{25} \delta_{m5}$	$\beta_{28} \delta_{m8}$
X_2	$\beta_{22} \frac{f l_2^2}{3} (\omega'_P - \omega_R)$ 7,7081 $(\omega'_P - \omega_R)$	$\beta_{25} \frac{f l_5^2}{3} (\omega'_P - \omega_R)$ 2,5221 $(\omega'_P - \omega_R)$	$\beta_{28} \frac{f l_8^2}{3} (\omega'_P - \omega_R)$ 1,0241 $(\omega'_P - \omega_R)$
X_5	2,5221 $(\omega'_P - \omega_R)$	6,2116 $(\omega'_P - \omega_R)$	2,5221 $(\omega'_P - \omega_R)$
X_8	1,0241 $(\omega'_P - \omega_R)$	2,5221 $(\omega'_P - \omega_R)$	7,7081 $(\omega'_P - \omega_R)$

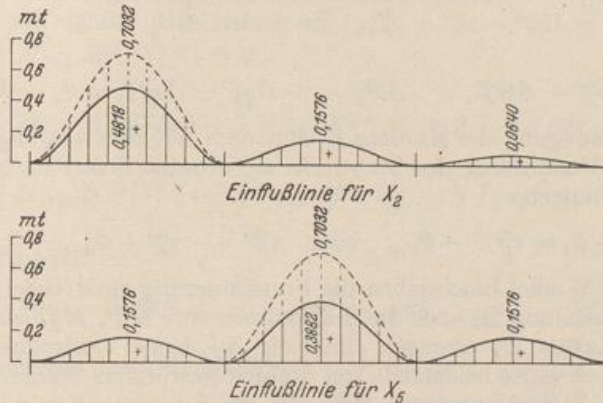


Abb. 559.

Zum Vergleich ist die Einflußlinie des beiderseits starr eingespannten Bogenträgers nach S. 531 berechnet und in Abb. 559 punktiert eingetragen worden.

$$X = \frac{15}{4} \frac{l}{f} \frac{1}{1+\nu} \zeta^2 \zeta'^2 = \frac{15}{4} \frac{l}{f} \frac{1}{1+\nu} \omega_R^2.$$

Das genaue Ergebnis steht auf S. 565 und kann nach S. 349 ebenfalls aus den Knoten- und Stabdrehwinkeln des Verschiebungszustandes abgeleitet werden. Auch hier bedeutet die Näherungsrechnung mit $\varphi_H = 0$ eine wesentliche Vereinfachung, die leicht im Ansatz der Lösung verfolgt werden kann.

Ritter, M.: Beiträge zur Theorie und Berechnung der vollwandigen Bogenträger ohne Scheitelgelenk. Berlin 1909. — Marcus, H.: Studien über mehrfach gestützte Rahmen und Bogenträger. Berlin 1911. — Müller-Breslau, H.: Zur Auflösung der mehrgliedrigen Elastizitätsgleichungen. Anwendung auf mehrfach gestützte Rahmen. Eisenbau 1917 S. 193. — Straßner, A.: Der durchlaufende Bogen. Berlin 1919. — Hertwig, A.: Die Berechnung der Rahmengebilde. Eisenbau 1921 S. 122. — Schächterle, K.: Die Talbrücken der Verbindungsbahn Tuttlingen—Hattingen. Beton u. Eisen 1933 S. 7.

60. Der Rahmen.

Geschlossene und offene Stabzüge mit geraden oder gekrümmten, steif miteinander verbundenen Elementen, werden als Rahmen bezeichnet, wenn die ihnen nach S. 312 zuzuordnende Stabkette beweglich ist. Die geschlossenen Rahmen sind statisch bestimmt oder statisch unbestimmt gestützt, die Enden der offenen Stabzüge in der Regel frei drehbar angeschlossen oder eingespannt. Die Verbindung mehrerer biegungssteifer Stabzüge liefert mehrteilige Rahmen.

Die Schnittkräfte werden entweder nach (288) als Funktion statisch überzähliger Größen X_k oder nach (500) als Funktion der geometrischen Randwerte φ_j, ϑ_h der

Formänderung angegeben. Diese sind nach Abschn. 24ff. durch die geometrischen Bedingungen für den Verschiebungszustand eines statisch bestimmten oder statisch unbestimmten Hauptsystems, jene nach Abschn. 38ff. durch die statischen Bedingungen für das Gleichgewicht der Anschlußkräfte an den Stabenden eines geometrisch bestimmten Hauptsystems bekannt. Beide Lösungen haben sich als ausreichendes und zuverlässiges Hilfsmittel zur Rahmenberechnung erwiesen. Trotzdem werden hierfür in der Literatur noch zahlreiche andere Ansätze vorgeschlagen, deren Eigenart durch die Auswertung der geometrischen Eigenschaften geschlossener Stabzüge und in der winkeltreuen Verformung der Stabknoten begründet, deren Kern jedoch stets in den allgemeinen Methoden enthalten ist.

Am Rahmenknoten K der Abb. 560a sind h Stäbe biegungssteif angeschlossen, von denen h und $(h+1)$ dem geschlossenen Stabzuge r zugeordnet sind. Sie bilden den Winkel $\Theta_K^{(r)} = 180^\circ - \alpha_k^{(r)} + \alpha_{k+1}^{(r)}$. Er ändert sich infolge der Formänderung des Stabwerks.

$$\Theta_K^{(r)} \rightarrow \Theta_K^{(r)} + \Delta\Theta_K^{(r)}; \quad \Delta\Theta_K^{(r)} = -\Delta\alpha_k^{(r)} + \Delta\alpha_{k+1}^{(r)} = \vartheta_k - \vartheta_{k+1}.$$

Die elastische Bewegung des Knotens K ist nach S. 305 durch u_K, v_K, φ_K bestimmt. Die winkeltreue Verformung des Stabwerks am Knoten liefert nach S. 306 ($h-1$) Bedingungsgleichungen:

$$\varphi_K = \tau_K^{(k)} + \vartheta_k = \tau_K^{(k+1)} + \vartheta_{k+1} \quad \text{oder} \quad \tau_K^{(k+1)} - \tau_K^{(k)} + \vartheta_{k+1} - \vartheta_k = 0. \quad (864)$$

Lösung a) Die Winkel beschreiben die Formänderung einer Gelenkkette \overline{JK} , an der neben der Belastung \mathfrak{P}_k noch die Stabendmomente $M_J^{(k)}, M_K^{(k)}$ als äußere Kräfte angreifen. Die Lasten \mathfrak{P}_k erzeugen allein die EJ_c fache Verdrehung $\tau_{J_0}^{(k)}, \tau_{K_0}^{(k)}$ der Endtangente J, K eines beiderseits frei drehbar gestützten Stabes l_k (Tabelle 17), die unbekannt Stabendmomente $M_J^{(k)}, M_K^{(k)}$ die EJ_c fache Verdrehung $\tau_{JM}^{(k)}, \tau_{KM}^{(k)}$. Die Stabendmomente werden in Übereinstimmung mit dem Drehsinn der Winkel nach S. 305 im Uhrzeiger positiv bezeichnet. Die Gleichung

$$\tau_{KM}^{(k+1)} - \tau_{KM}^{(k)} + \vartheta_{k+1} - \vartheta_k + \tau_{K_0}^{(k+1)} - \tau_{K_0}^{(k)} = 0, \quad (k = 1, \dots, h-1), \quad (865)$$

enthält daher 4 Stabendmomente als Unbekannte (Viermomentengleichung). Sie lautet bei geraden Stäben mit konstantem Trägheitsmoment J_k für

$$l'_k = l_k \frac{J_c}{J_k}, \quad \tau_{JM}^{(k)} = \frac{l'_k}{6} (2M_J^{(k)} - M_K^{(k)}), \quad \tau_{KM}^{(k)} = \frac{l'_k}{6} (2M_K^{(k)} - M_J^{(k)}), \quad (866)$$

$$l'_k M_J^{(k)} - 2l'_k M_K^{(k)} + 2l'_{k+1} M_K^{(k+1)} - l'_{k+1} M_J^{(k+1)} + 6\vartheta_{k+1} - 6\vartheta_k + 6\tau_{K_0}^{(k+1)} - 6\tau_{K_0}^{(k)} = 0 \quad (867)$$

und kann ebenso für Stäbe mit Zwischenstützung oder für gekrümmte Stäbe angeschlossen werden. Die EJ_c fachen Stabdrehwinkel $\vartheta_k, \vartheta_{k+1}$ sind nach (526) Funktionen der unabhängigen Komponenten ψ_c des Verschiebungszustandes. Sie werden gemeinsam mit den Stabendmomenten aus den geometrischen Bedingungen (867) und aus den Gleichgewichtsbedingungen für die Schnittkräfte $\delta A_J = 0, \delta A_c = 0$ (523) berechnet.

Lösung b) Die Substitution der Stabendmomente in (867) durch Funktionen geeigneter statisch überzähliger Größen nach Abschn. 24 und der Stabdrehwinkel ϑ_k durch Funktionen der Parameter ψ_c liefert die von Fr. Bleich angegebene Lösung, bei welcher nach Elimination der ψ_c ($c = 1 \dots f$) ebenso viele Gleichungen als statisch überzählige Größen vorhanden sind.

Lösung c) Die Substitution der Stabdrehwinkel ϑ_k durch die unabhängigen Komponenten ψ_c in den geometrischen Bedingungen (864) und deren Elimination liefern für den Rahmen mit n geschlossenen, biegungssteifen Stabzügen $3n$ geometrische Bedingungen für die Drehwinkel $\tau_K^{(k)}$. Sie können auf Grund der Eigenart der Formänderung geschlossener Stabzüge auch unmittelbar angeschlossen werden.

Die Formänderungsenergie des Rahmens ist ebenso wie bei allen anderen Tragwerken ein Minimum, so daß für einen biegungssteifen geschlossenen Stabzug (r) mit den drei statisch unbestimmten Größen $X_{r+1}, X_{r+2}, X_{r+3}$ nach (314) die folgenden Bedingungen gelten:

$$\partial A_i / \partial X_{r+1} = 0, \quad \partial A_i / \partial X_{r+2} = 0, \quad \partial A_i / \partial X_{r+3} = 0. \quad (868)$$

Diese bedeuten mit X_{r+1} als Biegemoment des Querschnitts ($r+1$) und mit X_{r+2}, X_{r+3} als den Längskräften zweier anderer Querschnitte ($r+2$), ($r+3$) nach (162) geometrisch, daß die gegenseitige Verdrehung der Querschnitte ($r+1$) und die gegenseitige Verschiebung der Ufer der Querschnitte ($r+2$), ($r+3$) in Richtung der Stabantente eines ($3n-3$)fach statisch unbestimmten Hauptsystems Null sind.

$$\left. \begin{aligned} \delta_{r+1}^{(3n)} &= \int M_{r+1} M^{(3n)} \frac{J_c}{J} ds = 0, \\ \delta_{r+2}^{(3n)} &= \int M_{r+2} M^{(3n)} \frac{J_c}{J} ds + \int N_{r+2} \left(N^{(3n)} \frac{J_c}{F} + E J_c \alpha_t t \right) ds = 0, \\ \delta_{r+3}^{(3n)} &= \int M_{r+3} M^{(3n)} \frac{J_c}{J} ds + \int N_{r+3} \left(N^{(3n)} \frac{J_c}{F} + E J_c \alpha_t t \right) ds = 0. \end{aligned} \right\} \quad (869)$$

Mit den Abkürzungen

$$M^{(3n)} \frac{J_c}{J} = w, \quad M^{(3n)} \frac{J_c}{J} ds = w ds = d\mathfrak{B}$$

und den Beziehungen der Abb. 560 für

$$\begin{aligned} M_{r+1} &= 1, & M_{r+2} &= a, & N_{r+2} &= \cos \alpha, \\ M_{r+3} &= c, & N_{r+3} &= \cos \gamma \end{aligned}$$

lauten die geometrischen Bedingungen (869) für $t=0$ ohne den relativ kleinen Anteil der Längskräfte:

$$\int_r d\mathfrak{B} = 0, \quad \int_r a d\mathfrak{B} = 0, \quad \int_r c d\mathfrak{B} = 0. \quad (870)$$

$d\mathfrak{B}$ ist der EJ_c fache Betrag eines Winkels, der in der Mechanik als Vektor senkrecht zur Ebene der Bewegung aufgetragen wird. Daher darf w als stetige, senkrecht zur Rahmenebene wirkende Linienbelastung, die relative Verdrehung \mathfrak{B}_g einzelner Stabglieder in Anschluß- oder Zwischengelenken (g) als Einzellast angesehen werden. Die Gleichungen (870) bedeuten auf diese Weise das Gleichgewicht der parallelen fiktiven Kräfte ($w^{(r)}, \mathfrak{B}_g^{(r)}$) an einem geschlossenen Stabzug (r) des Rahmens, da die algebraische Summe und das statische Moment der Kräfte für zwei Achsen b, d der Rahmenebene nach (870) Null sind.

Dies gilt ebenso für die stabweise (k) Zusammenfassung der Kräfte ($w^{(r)}, \mathfrak{B}_g^{(r)}$) zu den resultierenden Kräften $\mathfrak{B}^{(r,k)}$ mit den Abständen a_k, c_k von den Achsen b, d (Abb. 560 b, c) und deren Zerlegung nach den benachbarten Knotenpunkten J, K des Stabes k in $\mathfrak{B}_J^{(r,k)}, \mathfrak{B}_K^{(r,k)}$ mit

$$\int_k d\mathfrak{B}^{(r)} + \sum_k \mathfrak{B}_g^{(r)} = \mathfrak{B}^{(r,k)} = -(\mathfrak{B}_J^{(r,k)} + \mathfrak{B}_K^{(r,k)})$$

und

$$\mathfrak{B}_K^{(r,k)} + \mathfrak{B}_K^{(r,k+1)} = \mathfrak{B}_K^{(r)}$$

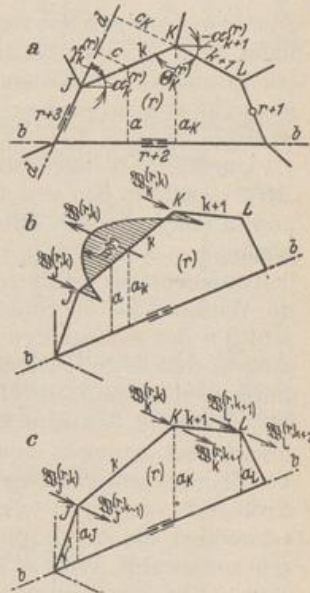


Abb. 560.

Die Gleichgewichtsbedingungen (870) können daher auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\sum \mathfrak{B}_K^{(r)} = 0, \quad \sum a_K \mathfrak{B}_K^{(r)} = 0, \quad \sum c_K \mathfrak{B}_K^{(r)} = 0. \quad (871)$$

Sie bilden mit

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_J^{(r,k)} &= Q_{J,w}^{(r,k)} = \int_{r,k} M \frac{J_c}{J} \frac{x'}{l_k} ds = \tau_J^{(k)}, \\ -\mathfrak{B}_K^{(r,k)} &= Q_{K,w}^{(r,k)} = - \int M \frac{J_c}{J} \frac{x'}{l_k} ds = \tau_K^{(k)}, \\ \mathfrak{B}_K^{(r)} &= -Q_{K,w}^{(r,k)} + Q_{K,w}^{(r,k+1)} = \tau_K^{(k+1)} - \tau_K^{(k)} \end{aligned} \quad (872)$$

in Verbindung mit (864) u. (865) Bedingungen für die Komponenten des Verschiebungszustandes oder für die Änderungen $\Delta\theta_K^{(r)} = \theta_k - \theta_{k+1}$ der Stabzugwinkel $\theta_K^{(r)}$:

$$\begin{aligned} \sum_r (\tau_K^{(k+1)} - \tau_K^{(k)}) &= 0, & \sum_r a_K (\tau_K^{(k+1)} - \tau_K^{(k)}) &= 0, & \sum_r c_K (\tau_K^{(k+1)} - \tau_K^{(k)}) &= 0, \\ \sum_r \Delta\theta_K^{(r)} &= 0, & \sum_r a_K \Delta\theta_K^{(r)} &= 0, & \sum_r c_K \Delta\theta_K^{(r)} &= 0. \end{aligned} \quad (873)$$

Diese sind mit den geometrischen Bedingungen (869) äquivalent. Das Ergebnis (873) kann nach Abschn. 21 auch unmittelbar angeschrieben werden. Dabei lassen sich leicht auch die Stablängenänderungen $\Delta l_k \neq 0$ nach (234) berücksichtigen. Die Lösung eignet sich im wesentlichen nur für Rahmenstäbe mit gleichbleibendem Trägheitsmoment.

Um Rahmen nach (865) oder (867) zu berechnen, werden die Winkeländerungen $\Delta\theta_K^{(r)} = \mathfrak{B}_K^{(r)}$ in den von der Belastung allein abhängigen Anteil $\mathfrak{B}_{K0}^{(r)} = \tau_{K0}^{(k+1)} - \tau_{K0}^{(k)}$ und in einen von den unbekanntem Stabendmomenten $M_J^{(k)}$, $M_K^{(k)}$ und $M_{K+1}^{(k+1)}$, $M_L^{(k+1)}$ abhängigen Anteil $\mathfrak{B}_{KM}^{(r)} = \tau_{KM}^{(k+1)} - \tau_{KM}^{(k)}$ zerlegt. Ihr Betrag ist für konstantes Trägheitsmoment der Stäbe k auf S. 112 angegeben. Als Unbekannte dienen entweder die Winkel oder die Stabendmomente $M_K^{(k)}$, $M_J^{(k)}$. Ihre Anzahl ist größer als die Anzahl $3n$ der verfügbaren Bedingungsgleichungen, so daß diese ebenso wie bei Lösung a) durch die Bedingungen über das Gleichgewicht der Stabendmomente ergänzt werden müssen. Hierzu eignen sich wiederum am besten die Ansätze (523) $\delta A_J = 0$, $\delta A_c = 0$ aus dem Prinzip der virtuellen Verrückungen. Diese Gleichgewichtsbedingungen sind jedoch unnötig, wenn die Stabendmomente in den $3n$ Bedingungsgleichungen als Funktion von $3n$ geeigneten statisch überzähligen Größen X_k eingesetzt werden. Hierfür lassen sich Schnittkräfte oder Gruppenlasten verwenden, die nachträglich für einen vorhandenen Ansatz geometrischer Bedingungen ausgewählt werden. Dies ist hier ebenso bemerkenswert wie für die Lösung b), obwohl ihr mechanischer Sinn mit den allgemeinen geometrischen Bedingungen (869) zur Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke übereinstimmt.

Die Sonderbetrachtungen der Literatur zur Berechnung von Rahmen bieten nach diesen Bemerkungen im Vergleich zu den allgemeinen Methoden A oder B keine neue Erkenntnis. Sie benützen für den Ansatz nur eine mit dem vorgeschriebenen Tragwerk in geometrischer und statischer Beziehung äquivalente Stabkette, an der neben der Belastung \mathfrak{P} die Stabendmomente als äußere Kräfte angreifen. Diese werden unmittelbar oder als Funktion von statisch überzähligen Größen berechnet. Die Lösung bietet keinesfalls Vorteile, wenn die zur Superposition geeigneten statisch unbestimmten Größen X_k und die für den Ansatz notwendigen Schnittkräfte M_0 , M_k des statisch bestimmten oder unbestimmten Hauptsystems leicht angegeben werden können. Der Ansatz zeigt im Gegensatz zu den besonderen Rechenverfahren für Rahmen stets eine symmetrische Matrix und zählt weniger Be-

dingungsgleichungen als diese. Daher werden die einfachen Rahmen des Hochbaues am besten aus den Gleichungen (285) für die Formänderung eines Hauptsystems berechnet. Das gilt vor allem bei veränderlicher Belastung, für welche die Einflußlinien der Schnittkräfte gezeichnet werden.

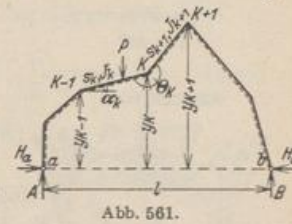
Diese Lösung ist für die symmetrischen Bauformen des offenen und geschlossenen Stabzugs mit konstantem Trägheitsmoment der Pfosten und Riegel sehr einfach und für die ausgezeichneten Schnittkräfte in den Tabellen Abschn. 61 für alle Belastungsfälle angeschrieben worden, die zum Nachweis der Sicherheit oder zur Verwendung des Tragwerks als statisch unbestimmtes Hauptsystem nötig sind. Die übrigen Schnittkräfte des Tragwerks werden analytisch oder zeichnerisch aus den äußeren Kräften des Hauptsystems, d. h. aus der vorgeschriebenen Belastung und den ihr zugeordneten, nunmehr bekannten statisch unbestimmten Größen berechnet. Dies ist auf S. 572 ff. an mehreren Beispielen gezeigt worden.

Allgemeine Bauform eines Stabzugs mit frei drehbaren Enden: 1. Lösung nach Abschn. 26:

$$M = M_0 - X_1 M_1, \quad N = N_0 - X_1 N_1, \\ Q = Q_0 - X_1 Q_1.$$

Nach Abb. 561 ist

$$X_1 = H_a = \delta_{10} / \delta_{11}, \quad H_b = H_{b0} - X_1, \quad M_1 = 1 y, \\ N_1 = 1 \cos \alpha, \quad Q_1 = 1 \sin \alpha.$$



Positive Momente erzeugen an der inneren Stabseite Zugspannungen. Bei stabweiser Integration wird ohne den Einfluß der Längskräfte auf die Formänderung

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} &= \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{3} s'_k (y_{K-1}^2 + y_K y_{K-1} + y_K^2), & \delta_{1t} &= E J_c \alpha_t t l, & \delta_{1s} &= -E J_c \Delta l, \\ \delta_{10} &= \sum_{k=1}^{k=n} \left\{ \frac{1}{6} s'_k [M_{(k-1)0} (2y_{K-1} + y_K) + M_{k0} (y_{K-1} + 2y_K)] + C_{K-1}^{(k)} + C_K^{(k)} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (874)$$

Der Anteil $C_{K-1}^{(k)} + C_K^{(k)}$ entsteht durch Belastung zwischen den Enden (K), (K-1) des Stabes s_k . Das Ergebnis kann bei Summierung über die den einzelnen Stabknoten zufallenden Beiträge einfacher, und zwar ebenso wie in 875 angeschrieben werden.

2. Lösung nach S. 135 mit Berücksichtigung der Längskräfte:

$$\sum_{K=1}^{K=n-1} \mathfrak{B}_K y_K = \sum_{K=1}^{K=n-1} y_K \left(\Delta \theta_K + \frac{\Delta s_k}{s_k} \operatorname{ctg} \alpha_k - \frac{\Delta s_{k+1}}{s_{k+1}} \operatorname{ctg} \alpha_{k+1} \right) \\ = \sum y_K \Delta \theta_K + E J_c \sum \Delta s_k \cos \alpha_k = 0, \\ 6 \Delta \theta_K = (M_{K-1} + 2 M_K) s'_k + (2 M_K + M_{K+1}) s'_{k+1} - 6 \tau_{K0}^{(k)} + 6 \tau_{K0}^{(k+1)}, \\ 6 E J_c \Delta s_k = N_k s_k \frac{J_c}{F_k} + E J_c \alpha_t t s_k, \\ M_K = M_{K0} - X_1 y_K, \\ \sum \mathfrak{B}_K y_K = \sum \mathfrak{B}_{K0} y_K - X_1 \sum \mathfrak{B}_{K1} y_K = 0,$$

mit $\mathfrak{B}_K \approx \Delta \theta_K$ (Vernachlässigung der Längskräfte) und Summierung über die Stabknoten ist

$$\left. \begin{aligned} \sum \mathfrak{B}_{K0} y_K &= \sum_{K=0}^{K=n} \left\{ M_{K0} \frac{1}{6} [y_{K-1} s'_k + 2 y_K (s'_k + s'_{k+1}) + y_{K+1} s'_{k+1}] \right. \\ &\quad \left. + C_K^{(k)} + C_K^{(k+1)} \right\} = \delta_{10}, \\ \sum \mathfrak{B}_{K1} y_K &= \sum_{K=0}^{K=n} y_K \frac{1}{6} [y_{K-1} s'_k + 2 y_K (s'_k + s'_{k+1}) + y_{K+1} s'_{k+1}] = \delta_{11}, \end{aligned} \right\} (875)$$

$$C_K^{(k)} = -y_K \tau_{K0}^{(k)}, \quad C_K^{(k+1)} = y_K \tau_{K0}^{(k+1)}.$$

Berechnung eines Zweigelenrahmens.

1. Geometrische Grundlagen (Abb. 562) (Tab. 44 S. 581).

$$l = 5,6, \quad h = 2,6, \quad f = 1,0, \quad s = 2,973 \text{ m};$$

$$\lambda = \frac{5,6}{2,6} = 2,154, \quad \varphi = \frac{1,0}{2,6} = 0,385,$$

$$J_h = 8,94, \quad J_s = 13,35 \text{ dm}^4, \quad \varkappa = \frac{2,6}{2,973} \frac{13,35}{8,94} = 1,306,$$

$$\mu = 3 + 1,306 + 0,385 \cdot 3,385 = 5,609.$$

2. Halbseitige Belastung $p = 1 \text{ t/m}$ (Abb. 563).

a) Schnittkräfte (Tab. 44 S. 582).

$$\Phi = \frac{8 + 5 \cdot 0,385}{4 \cdot 5,609} = 0,442,$$

$$A = \frac{3}{8} \cdot 1 \cdot 5,6 = 2,1 \text{ t}, \quad B = \frac{1}{8} \cdot 1 \cdot 5,6 = 0,7 \text{ t},$$

$$H_{a,b} = \frac{1 \cdot 5,6}{16} \cdot 2,154 \cdot 0,442 = 0,333 \text{ t},$$

$$M_{e,a} = -\frac{1 \cdot 5,6^2}{16} \cdot 0,442 = -0,866 \text{ mt},$$

$$M_e = \frac{1 \cdot 5,6^2}{16} [1 - 1,385 \cdot 0,442] = 0,760 \text{ mt}.$$

b) Mittelkraftlinie nach S. 174.

$$M = S \cdot \bar{b}, \quad S = H_{a,b} = 0,333 \text{ t},$$

$$b_e = \frac{B}{S} \frac{l}{2} = \frac{0,7}{0,333} \cdot \frac{5,6}{2} = 5,89 \text{ m}.$$

3. Waagerechte Belastung $w = 1 \text{ t/m}$ (Abb. 564).

a) Schnittkräfte (Tab. 44 S. 582).

$$\Phi = \frac{1}{4 \cdot 5,609} [6 \cdot 2,385 + 5 \cdot 1,306] = 0,929,$$

$$A = -B = -\frac{1 \cdot 2,6^2}{2 \cdot 5,6} = -0,604 \text{ t},$$

$$H_{a,b} = -\frac{1 \cdot 2,6}{2} [1 \pm 1 - 0,4645] = \begin{cases} -1,996 \text{ t}, \\ +0,604 \text{ t}, \end{cases}$$

$$M_{e,a} = \frac{1 \cdot 2,6^2}{4} [1 \pm 1 - 0,929] = \begin{cases} +1,810 \text{ mt}, \\ -1,570 \text{ mt}, \end{cases}$$

$$M_e = \frac{1 \cdot 2,6^2}{4} [1 - 1,385 \cdot 0,929] = -0,484 \text{ mt}.$$

b) Mittelkraftlinie nach S. 174.

$$M = S \cdot \bar{a}, \quad S = B = +0,604 \text{ t},$$

$$a_e = \frac{H_b}{S} (h + f) - \frac{l}{2} = \frac{0,604}{0,604} (3,6 - 2,8) = 0,8 \text{ m}.$$

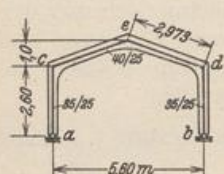


Abb. 562.

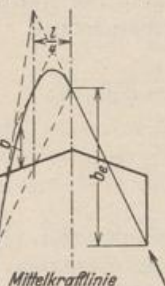
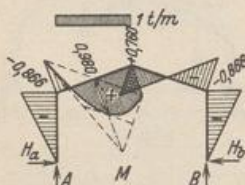


Abb. 563.

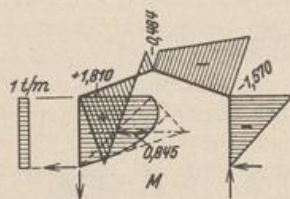


Abb. 564.

Berechnung eines Zweigelenrahmens mit Zugband.

1. Geometrische Grundlagen (Abb. 565) (Tab. 46 S. 585).

$$l = 27,0, \quad h = 18,0, \quad f = 4,0, \quad s = 10,77 \text{ m},$$

$$l_1 = 7,0, \quad h_1 = 14,0, \quad a = 10,0 \text{ m};$$

$$\lambda = \frac{10,0}{27,0} = 0,370, \quad \psi = \frac{14,0}{18,0} = 0,778, \quad \varphi = \frac{4,0}{14,0} = 0,286,$$

$$\lambda' = \frac{7,0}{27,0} = 0,260, \quad \psi' = \frac{4,0}{18,0} = 0,222, \quad v = \frac{27,0}{18,0} = 1,500,$$

$$J_A = 0,0333, \quad J_s = J_e = 0,0576 \text{ m}^4, \quad F_s = 0,00846 \text{ m}^2, \quad J_c = J_s.$$

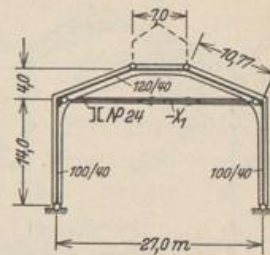


Abb. 565.

$$\kappa_1 = \frac{7,0}{10,77} = 0,650, \quad \kappa_2 = \frac{14,0}{10,77} \frac{576}{333} = 2,246; \quad \mu = 0,778^2 \cdot 3,246 + 1,778 + \frac{3}{2} \cdot 0,650 = 4,717$$

2. Hauptsystem: Zweigelenrahmen (Tab. 46 S. 585). Überzählige $X_1 = \frac{\delta_{10}^{(1)}}{\delta_{11}^{(1)}}$.

$$\delta_{11} = \int M_1^{(1)} \frac{J_c}{J} ds + \frac{E_b J_c}{E_s F_s} N_1^2 l = \int M_1^{(1)} M_1^{(0)} \frac{J_s}{J} ds + \frac{0,0576}{10 \cdot 0,00846} \cdot 1 \cdot 27,0 = \int M_1^{(1)} M_1^{(0)} \frac{J_s}{J} ds + 18,383.$$

3. Belastung des Hauptsystems mit $-X_1 = 1 \text{ t}$ (Abb. 566) (Tab. 46 S. 586).

$$\Phi = \frac{0,286}{2 \cdot 4,718} (3 \cdot 1,650 - 0,222) = 0,143,$$

$$A_1^{(1)} = B_1^{(1)} = 0,$$

$$H_{a,b_1}^{(1)} = 2 \cdot \frac{1}{2} \psi \Phi = 0,778 \cdot 0,143 = 0,111 \text{ t},$$

$$M_{c,d_1}^{(1)} = -2 \frac{h_1}{2} \psi \Phi = -14,0 \cdot 0,778 \cdot 0,143 = -1,559 \text{ mt},$$

$$M_{e,f_1}^{(1)} = h_1 (\varphi - \Phi) = 14,0 (0,286 - 0,143) = 1,995 \text{ mt},$$

$$\int M_1^{(1)} M_1^{(0)} \frac{J_s}{J} ds = 2,002 \cdot 4,0 \cdot 7,0 + 2 \cdot \frac{1}{6} \times 4,0 (2 \cdot 2,002 - 1,558) 10,77 = 90,765,$$

$$\delta_{11}^{(1)} = 90,765 + 18,383 = 109,148.$$

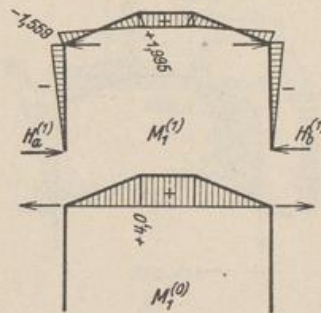


Abb. 566.

4. Halbseitige Belastung $p = 1 \text{ t/m}$ (Abb. 567 u. 568).

a) Schnittkräfte im Hauptsystem (Tab. 46 S. 586).

$$\Phi = \frac{1}{4 \cdot 4,717} (5 + 3 \cdot 0,778 + 6 \cdot 0,650) = 0,595,$$

$$A_0^{(1)} = \frac{1 \cdot 10}{2} (2 - 0,370) = 8,148 \text{ t}; \quad B_0^{(1)} = 1,852 \text{ t},$$

$$H_{a,b_0}^{(1)} = \frac{1 \cdot 10^2}{4 \cdot 14,0} \cdot 0,778 \cdot 0,595 = 0,827 \text{ t},$$

$$M_{c,d_0}^{(1)} = -\frac{1 \cdot 10^2}{4} \cdot 0,778 \cdot 0,595 = -11,578 \text{ mt},$$

$$M_{e,f_0}^{(1)} = \frac{1 \cdot 10^2}{4} (1 \pm 0,260 - 0,595) = \begin{cases} 16,598 \text{ mt}, \\ 3,633 \text{ mt}. \end{cases}$$

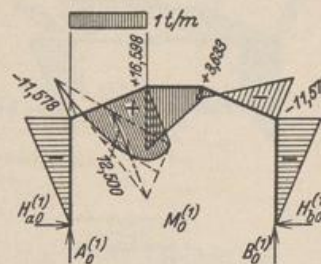


Abb. 567.

b) Berechnung von X_1 .

$$\delta_{10}^{(1)} = \frac{1}{2} (16,598 + 3,633) \cdot 7,0 + [\frac{1}{3} (2 \cdot 3,633 - 11,573) + \frac{1}{3} (2 \cdot 16,598 - 11,573) + \frac{1}{3} \cdot 12,5] \times 10,77 = 586,982.$$

$$X_1 = \frac{586,982}{109,148} = 5,378 \text{ t}. \quad H_{a,b} = H_{a,b_0}^{(1)} - X_1 H_{a,b_1}^{(1)}, \quad M = M_0^{(1)} - X_1 M_1^{(1)}.$$

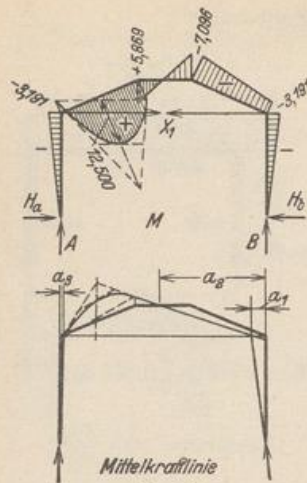


Abb. 568.

c) Schnittkräfte.

$$A = A_0^{(1)} = 8,148 \text{ t}, \quad B = B_0^{(1)} = 1,852 \text{ t},$$

$$H_{a,e} = 0,827 - 5,378 \cdot 0,111 = 0,228 \text{ t},$$

$$M_{c,a} = -11,578 + 5,378 \cdot 1,559 = -3,191 \text{ mt},$$

$$M_{e,f} = \left. \begin{array}{l} 16,598 \\ 3,633 \end{array} \right\} - 5,378 \cdot 1,995 = \left\{ \begin{array}{l} 5,869 \text{ mt} \\ -7,096 \text{ mt} \end{array} \right.$$

d) Mittelkraftlinie.

$$a_1 = \frac{14,0 \cdot 0,228}{1,852} = 1,724 \text{ m},$$

$$a_2 = \frac{18,0 \cdot 0,228 + 4,0 \cdot 5,378}{1,852} = 13,832 \text{ m},$$

$$a_3 = \frac{14,0 \cdot 0,228}{8,148} = 0,392 \text{ m}.$$

5. Waagerechte Belastung $w = 1 \text{ t/m}$ (Abb. 569 u. 570).

a) Schnittkräfte im Hauptsystem (Tab. 46 S. 585).

$$\Phi = \frac{1}{4 \cdot 4,717} [4 \cdot 0,286 (3 \cdot 1,650 - 0,222) + 6 (1,650 + 0,778) + 3 \cdot 2,246 \cdot 0,778] = 1,326,$$

$$A_0^{(1)} = -B_0^{(1)} = -\frac{1 \cdot 14,0^2}{2 \cdot 27,0} = -3,630 \text{ t},$$

$$H_{a,b}^{(1)} = -\frac{1 \cdot 14,0}{2} \left(\pm 1 + \frac{0,778}{2} \cdot 1,326 \right) = \left\{ \begin{array}{l} -10,609 \text{ t} \\ + 3,392 \text{ t} \end{array} \right.,$$

$$M_{c,a}^{(1)} = -\frac{1 \cdot 14,0^2}{4} (1 \mp 1 - 0,778 \cdot 1,326) = \left\{ \begin{array}{l} +50,524 \text{ mt} \\ -47,476 \text{ mt} \end{array} \right.,$$

$$M_{e,f}^{(1)} = -\frac{1 \cdot 14,0^2}{4} (1 + 2 \cdot 0,286 \mp 0,260 - 1,326) = \left\{ \begin{array}{l} + 0,662 \text{ mt} \\ -24,750 \text{ mt} \end{array} \right.$$

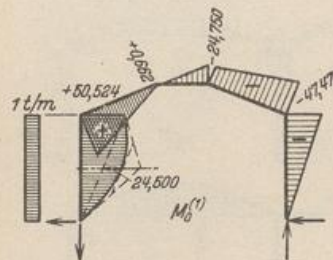


Abb. 569.

b) Berechnung von X_1 .

$$\delta_{10}^{(1)} = \frac{4,0}{2} (0,662 - 24,750) \cdot 7,0$$

$$+ \left[\frac{4,0}{6} (2 \cdot 0,662 + 50,524) - \frac{4,0}{6} (2 \cdot 24,750 + 47,476) \right] \times 10,77 = -661,292,$$

$$X_1 = \frac{-661,292}{109,148} = -6,059 \text{ t}.$$

c) Schnittkräfte.

$$A = -B = -3,630 \text{ t},$$

$$H_{a,b} = \left. \begin{array}{l} -10,609 \\ + 3,392 \end{array} \right\} + 6,059 \cdot 0,111 = \left\{ \begin{array}{l} - 9,934 \text{ t} \\ + 4,066 \text{ t} \end{array} \right.,$$

$$M_{c,a} = \left. \begin{array}{l} 50,524 \\ -47,476 \end{array} \right\} - 6,059 \cdot 1,559 = \left\{ \begin{array}{l} +41,077 \text{ mt} \\ -56,923 \text{ mt} \end{array} \right.,$$

$$M_{e,f} = \left. \begin{array}{l} 0,662 \\ -24,750 \end{array} \right\} + 6,059 \cdot 1,995 = \left\{ \begin{array}{l} 12,749 \text{ mt} \\ -12,663 \text{ mt} \end{array} \right.$$

d) Mittelkraftlinie.

$$a_1 = \frac{4,066 \cdot 14,0}{3,630} = 15,683 \text{ m},$$

$$a_2 = \frac{4,066 \cdot 18,0 - 6,059}{3,630} = 13,488 \text{ m}.$$

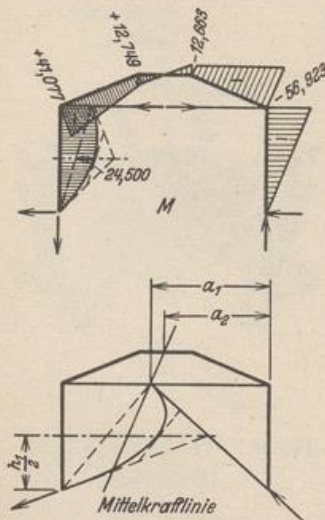


Abb. 570.

Berechnung eines geschlossenen, symmetrischen Rahmens.

1. Geometrische Grundlagen (Abb. 571) (Tab. 59 S. 605).

$$l_o = 6,0, \quad l_u = 9,0, \quad h = 3,0, \quad m = 1,5, \quad s = 3,3541 \text{ m,}$$

$$\lambda_1 = \frac{1,5}{9,0} = 0,1667, \quad \lambda_2 = \frac{1,5}{6,0} = 0,2500,$$

$$\lambda'_1 = \frac{6,0}{9,0} = 0,6667, \quad \lambda''_1 = \frac{9,0}{6,0} = 1,5000,$$

$$\alpha_o = \frac{6,0}{3,3541} \frac{45^3}{40^3} = 2,5463, \quad \alpha_u = \frac{9,0}{3,3541} \frac{45^3}{60^3} = 1,1320,$$

$$\mu = (2 + 3 \cdot 2,5463) (2 + 3 \cdot 1,1320) - 1 = 51,0115,$$

$$v = 2,5463 \cdot 0,6667^2 + 1,1320 + 2 (1 + 0,6667 + 0,6667^2) = 6,4862.$$

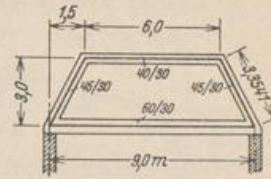


Abb. 571.

2. Belastung des oberen Riegels mit $p = 1 \text{ t/m}$. (Abb. 572).

a) Schnittkräfte (Tab. 59 S. 606).

$$H_{a,b} = \frac{1 \cdot 6,0^2}{2 \cdot 3,0} \left[\frac{2}{3} \frac{2,5463}{51,0115} (1 + 1,1320) + 0,2500 \right] = 2,458 \text{ t}$$

$$M_{a,b} = \frac{1 \cdot 6,0^2}{4} \frac{2,5463}{51,0115} = 0,449 \text{ mt,}$$

$$M_{c,d} = -\frac{1 \cdot 6,0^2}{4} \frac{2,5463}{51,0115} (2 + 3 \cdot 1,1320) = -2,424 \text{ mt.}$$

b) Mittelkraftlinie $M = S \cdot \bar{b}$, $S = H_{a,b} = 2,458 \text{ t}$.

$$b_1 = \frac{2,424}{2,458} = 0,986 \text{ m,} \quad b_2 = \frac{0,449}{2,458} = 0,183 \text{ m.}$$

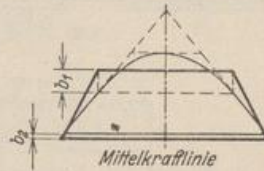
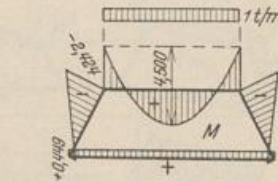


Abb. 572.

3. Waagerechte Belastung $w = 1 \text{ t/m}$ (Abb. 573). $\Phi = \frac{1}{6,4862} (2 + 1,1320 - 0,1667) = 0,4572$.

a) Schnittkräfte (Tab. 59 S. 607).

$$H_{a,b} = \frac{1 \cdot 3,0}{4} \left[\frac{3}{2 \cdot 51,0115} (1,1320 - 2,5463) - 1 \mp 2 \right]$$

$$= \begin{cases} -0,781 \text{ t,} \\ +2,219 \text{ t,} \end{cases}$$

$$M_{a,b} = -\frac{1 \cdot 3,0^2}{4} \left[\frac{1 + 3 \cdot 2,5463}{2 \cdot 51,0115} \pm (1 - 0,4572) \right]$$

$$= \begin{cases} -1,412 \text{ mt,} \\ +1,031 \text{ mt,} \end{cases}$$

$$M_{c,d} = -\frac{1 \cdot 3,0^2}{4} \left[\frac{1 + 3 \cdot 1,1320}{2 \cdot 51,0115} \mp 0,6667 \cdot 0,4572 \right] = \begin{cases} +0,589 \text{ mt,} \\ -0,783 \text{ mt.} \end{cases}$$

b) Mittelkraftlinie. Pfosten und oberer Riegel (I): $M_I = S_I \cdot \bar{a}$.

$$S_I = \frac{1}{l_u} \left[M_a - M_b + \frac{w h^2}{2} \right] = \frac{w h^2}{2 l_u} \Phi,$$

$$S_I = \frac{1 \cdot 3,0^2}{2 \cdot 9,0} \cdot 0,4572 = 0,2286 \text{ t,} \quad a_1 = \frac{1,031}{0,2286} = 4,510, \quad a_2 = \frac{0,589}{0,2286} = 2,577 \text{ m,}$$

$$a_3 = \frac{1,412}{0,2286} = 6,177 \text{ m,}$$

Unterer Riegel (II):

$$M_{II} = S_{II} \bar{b}, \quad S_{II} = |H_a|,$$

$$b_1 = \frac{1,412}{0,781} = 1,808 \text{ m.}$$

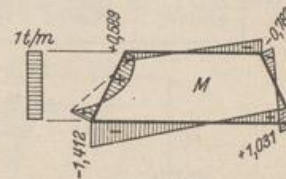


Abb. 573.

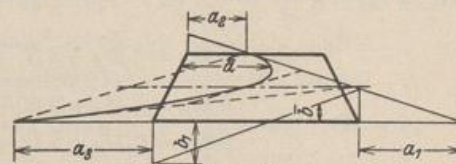


Abb. 574.

Berechnung eines geschlossenen, unsymmetrischen Rahmens.

A. Ansatz nach S. 154ff. mit den Überzähligen X_1, X_2, X_3 (Abb. 576).

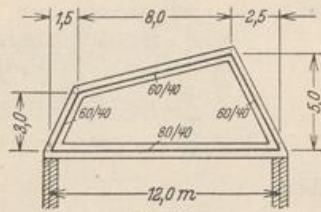


Abb. 575.

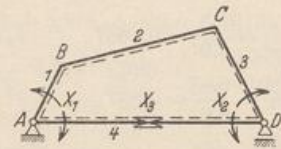


Abb. 576.

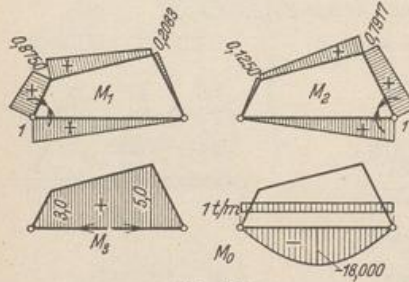


Abb. 577.

1. Geometrische Grundlagen (Abb. 575).

$$J_{1,2,3} = J_c = 0,0072, \quad J_4 = 0,0171 \text{ m}^4,$$

$$l_1 = l'_1 = 3,354, \quad l_2 = l'_2 = 8,246 \text{ m},$$

$$l_3 = l'_3 = 5,590, \quad l_4 = 12,0, \quad l'_4 = 5,063 \text{ m}.$$

2. Belastung. $p = 1 \text{ t/m}$ auf l_4 .

a) Vorzahlen und Belastungszahlen (Abb. 577).

$$\delta_{10} = -\frac{1}{3} \cdot 5,063 \cdot 18 = -30,375,$$

$$\delta_{20} = \delta_{10}, \quad \delta_{30} = 0.$$

$$\delta_{11} = 5,063 \cdot \frac{1}{3} + 3,354 \cdot \frac{1}{3} (1 + 0,8750 + 0,8750^2) + 8,246$$

$$\cdot \frac{1}{3} (0,8750^2 + 0,8750 \cdot 0,2083 + 0,2083^2) + 5,590 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,2083^2 = 7,4455, \text{ usw.}$$

b) Ansatz und Lösung.

X_1	X_2	X_3		
7,4455	3,2790	23,5025	-30,375	$X_1 = -M_A = -7,047 \text{ mt},$
3,2790	8,2502	28,4889	-30,375	$X_2 = -M_D = -7,967 \text{ mt},$
23,5025	28,4889	191,3351	0	$X_3 = +2,052 \text{ t}.$

$$M_B = 0,875 \cdot 7,047 + 0,125 \cdot 7,967 - 3,0 \cdot 2,052 = 1,006 \text{ mt},$$

$$M_C = 0,2083 \cdot 7,047 + 0,7917 \cdot 7,967 - 5,0 \cdot 2,052 = -2,485 \text{ mt}.$$

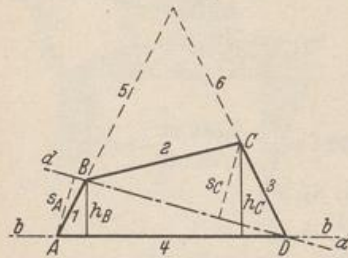


Abb. 578.

B. Lösung c auf S. 568, Belastung $p = 1 \text{ t/m}$ auf l_4 .

$$\text{Gl. (871): } \mathfrak{B}_A + \mathfrak{B}_B + \mathfrak{B}_C + \mathfrak{B}_D = 0,$$

$$\text{(Abb. 578) } \mathfrak{B}_B h_B + \mathfrak{B}_C h_C = 0,$$

$$\mathfrak{B}_A s_A - \mathfrak{B}_C s_C = 0.$$

Die Gleichgewichtsbedingungen $\delta A_J = 0$ liefern

$$M_A^{(1)} = -M_A^{(4)} = M_A, \quad M_B^{(2)} = -M_B^{(1)} = M_B,$$

$$M_C^{(3)} = -M_C^{(2)} = M_C, \quad M_D^{(4)} = -M_D^{(3)} = M_D.$$

$$\text{Mit } 6 \tau_{A0}^{(4)} = p \frac{l_4^3 l'_4}{4} = -6 \tau_{D0}^{(4)}, \quad \tau_{A0}^{(1)} = \tau_{B0}^{(1)} = \tau_{B0}^{(2)} = \tau_{C0}^{(2)} = \tau_{C0}^{(3)} = \tau_{D0}^{(3)} = 0 \text{ ist nach (866), (872)}$$

$$6 \mathfrak{B}_A = l'_4 M_D + 2 (l'_4 + l'_1) M_A + l'_1 M_B - \frac{p l_4^3 l'_4}{4},$$

$$6 \mathfrak{B}_B = l'_1 M_A + 2 (l'_1 + l'_2) M_B + l'_2 M_C,$$

$$6 \mathfrak{B}_C = l'_2 M_B + 2 (l'_2 + l'_3) M_C + l'_3 M_D,$$

$$6 \mathfrak{B}_D = l'_3 M_C + 2 (l'_3 + l'_4) M_D + l'_4 M_A - \frac{p l_4^3 l'_4}{4}.$$

Gleichgewichtsbedingungen $\delta_{Ac} = 0$.

$$\begin{aligned} (M_A^{(1)} + M_B^{(1)}) v_1 + (M_B^{(2)} + M_C^{(2)}) v_2 + (M_C^{(3)} + M_D^{(3)}) v_3 + (M_D^{(4)} + M_A^{(4)}) v_4 &= 0, \\ (M_A - M_B) v_1 + (M_B - M_C) v_2 + (M_C - M_D) v_3 + (M_D - M_A) v_4 &= 0. \\ v_1 = 1, \quad v_2 = -\frac{l_1}{l_5}, \quad v_3 = \frac{l_1 l_6}{l_5 l_3}, \quad v_4 = 0. \end{aligned}$$

Gleichungssystem für die Schnittkräfte M_A, M_B, M_C, M_D .

M_A	M_B	M_C	M_D	p	
$l_4 + l_1$	$l_1 + l_2$	$l_2 + l_3$	$l_3 + l_4$	$-\frac{l_2 l_4}{6}$	o
$l_1 h_B$	$2(l_1 + l_2) h_B + l_2 h_C$	$2(l_2 + l_3) h_C + l_3 h_B$	$l_3 h_C$	—	o
$2(l_4 + l_1) s_A$	$l_1 s_A - l_2 s_C$	$-2(l_2 + l_3) s_C$	$l_4 s_A - l_3 l_3 s_C$	$-\frac{l_2 l_4}{4} s_A$	o
1	$-1 - \frac{l_1}{l_5}$	$\frac{l_1}{l_5} + \frac{l_1 l_6}{l_5 l_3}$	$-\frac{l_1 l_6}{l_5 l_3}$	—	o

$$l_5 = 10,062, \quad l_6 = 7,826, \quad s_A = 3,297, \quad s_C = 4,121 \text{ m.}$$

M_A	M_B	M_C	M_D	$p = 1 \text{ t/m}$	
8,4166	11,6003	13,8364	10,6527	-121,5	o
10,0623	110,8328	163,1026	27,9510	o	o
55,4940	-22,9234	-114,0341	-6,3466	-600,8236	o
1	-1,333	0,8	-0,4667	o	o

$$M_A = 7,047 \text{ mt}, \quad M_B = 1,006 \text{ mt}, \quad M_C = -2,845 \text{ mt}, \quad M_D = 7,967 \text{ mt} \quad (\text{Abb. 579}).$$

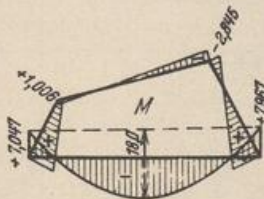


Abb. 579.

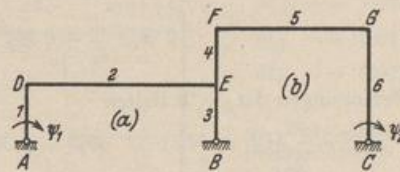


Abb. 580.

Berechnung des zweiteiligen Rahmens Abb. 580 nach Lösung a) auf S. 568.

Abmessungen nach S. 182. $l_1 = l_3 = l_4 = 4,5 \text{ m}$,

$$\begin{aligned} l_2 = 15,0, \quad l_5 = 12,0, \quad l_6 = 9,0, \quad l_1 = 27,0, \quad l_3 = l_4 = 9,0, \quad l_2 = 15,0 \text{ m,} \\ l_5 = 18,0, \quad l_6 = 18,0 \text{ m.} \end{aligned}$$

Es sind 9 Stabendmomente und 6 Stabdrehwinkel unbekannt.

a) Bedingungen für die Formänderung des Stabzuges (Viermomentengleichungen).

$$\begin{aligned} \tau_{DM}^{(2)} - \tau_{DM}^{(1)} + \vartheta_2 - \vartheta_1 + \tau_{D0}^{(2)} - \tau_{D0}^{(1)} &= 0, & \tau_{EM}^{(3)} - \tau_{EM}^{(2)} + \vartheta_3 - \vartheta_2 + \tau_{E0}^{(3)} - \tau_{E0}^{(2)} &= 0, \\ \tau_{EM}^{(4)} - \tau_{EM}^{(3)} + \vartheta_4 - \vartheta_3 + \tau_{E0}^{(4)} - \tau_{E0}^{(3)} &= 0, & \tau_{FM}^{(5)} - \tau_{FM}^{(4)} + \vartheta_5 - \vartheta_4 + \tau_{F0}^{(5)} - \tau_{F0}^{(4)} &= 0, \\ \tau_{GM}^{(6)} - \tau_{GM}^{(5)} + \vartheta_6 - \vartheta_5 + \tau_{G0}^{(6)} - \tau_{G0}^{(5)} &= 0, & \tau_{EM}^{(4)} \text{ nach Gl. (866).} & \end{aligned}$$

Beyer, Baustatik, 2. Aufl., 2. Neudruck.

b) Bedingungen für das Gleichgewicht der Schnittkräfte, $\delta A_J = 0$.

$$M_D^{(1)} + M_D^{(2)} = 0, \quad M_E^{(2)} + M_E^{(3)} + M_E^{(4)} = 0, \quad M_F^{(4)} + M_F^{(5)} = 0, \quad M_G^{(5)} + M_G^{(6)} = 0.$$

c) Bedingungen für die Formänderung der Stabkette.

$$\vartheta_1 = \vartheta_3 = \psi_1, \quad \vartheta_2 = \vartheta_5 = 0, \quad \vartheta_6 = \psi_2, \quad \vartheta_4 = \psi_2 \frac{l_6}{l_4} - \psi_1 \frac{l_1}{l_4}.$$

d) Bedingungen für das Gleichgewicht der Schnittkräfte, $\delta A_c = 0$.

$$\psi_1 = 1, \quad M_D^{(1)} \cdot 1 + M_E^{(2)} \cdot 1 - (M_E^{(4)} + M_F^{(4)}) \frac{l_1}{l_4} = 0,$$

$$\psi_2 = 1, \quad M_G^{(5)} \cdot 1 + (M_E^{(4)} + M_F^{(4)}) \frac{l_6}{l_4} = 0.$$

Durch Substitution wird dieser allgemeine Ansatz auf 6 Gleichungen mit den unbekanntenen Eckmomenten M_D , M_E , M_G und Stabendmomenten $M_E^{(2)}$, $M_E^{(3)}$, $M_F^{(4)}$ zurückgeführt. Dabei ist es zweckmäßig, die \mathfrak{B} -Kräfte nach (872) in den Viermomentengleichungen einzuführen. Aus c) folgt:

$$\vartheta_2 - \vartheta_1 = -\psi_1, \quad \vartheta_3 - \vartheta_2 = \psi_1, \quad \vartheta_4 - \vartheta_3 = \psi_2 \frac{l_6}{l_4} - \psi_1 \frac{l_1}{l_4},$$

$$\vartheta_5 - \vartheta_4 = -\psi_2 \frac{l_6}{l_4} + \psi_1 \frac{l_1}{l_4}, \quad \vartheta_6 - \vartheta_5 = \psi_2.$$

Damit gehen die Viermomentengleichungen über in

$$6 \mathfrak{B}_D^{(a)} - 6 \psi_1 = 0, \quad 6 \mathfrak{B}_E^{(a)} + 6 \psi_1 = 0, \quad 6 \mathfrak{B}_E^{(b)} + 6 \psi_2 \frac{l_6}{l_4} - 6 \psi_1 \frac{l_1}{l_4} = 0,$$

$$6 \mathfrak{B}_F^{(b)} + 6 \psi_1 \frac{l_1}{l_4} - 6 \psi_2 \frac{l_6}{l_4} = 0, \quad 6 \mathfrak{B}_G^{(b)} + 6 \psi_2 = 0,$$

oder nach Substitution von ψ_1 und ψ_2 aus der ersten und letzten:

$$6 \mathfrak{B}_D^{(a)} + 6 \mathfrak{B}_E^{(a)} = 0, \quad (1. \text{ Gl.})$$

$$-6 \mathfrak{B}_D^{(a)} \frac{l_6}{l_4} + 6 \mathfrak{B}_E^{(b)} - 6 \mathfrak{B}_G^{(b)} \frac{l_6}{l_4} = 0, \quad (2. \text{ Gl.})$$

$$6 \mathfrak{B}_D^{(a)} \frac{l_1}{l_4} + 6 \mathfrak{B}_F^{(b)} + 6 \mathfrak{B}_G^{(b)} \frac{l_6}{l_4} = 0. \quad (3. \text{ Gl.})$$

Die Bedingungen $\delta A_J = 0$ liefern:

$$M_D^{(2)} = -M_D^{(1)} = M_D, \quad M_F^{(5)} = -M_F^{(4)} = M_F, \quad M_G^{(6)} = -M_G^{(5)} = M_G$$

und

$$M_E^{(2)} + M_E^{(3)} + M_E^{(4)} = 0. \quad (4. \text{ Gl.})$$

Aus $\delta A_c = 0$ folgt damit

$$\psi_1 = 1, \quad -M_D + M_E^{(2)} - (M_E^{(4)} - M_F) \frac{l_1}{l_4} = 0, \quad (5. \text{ Gl.})$$

$$\psi_2 = 1, \quad M_G + (M_E^{(4)} - M_F) \frac{l_6}{l_4} = 0. \quad (6. \text{ Gl.})$$

\mathfrak{B} -Kräfte nach Gl. (866), (872) für das vorliegende System:

$$6 \mathfrak{B}_D^{(a)} = 2(l_1' + l_2') M_D - l_2' M_E^{(2)} + 6 \tau_{D0}^{(2)} + 6 \tau_{D0}^{(1)},$$

$$6 \mathfrak{B}_E^{(a)} = l_2' M_D - 2 l_2' M_E^{(2)} + 2 l_3' M_E^{(3)} + 6 \tau_{E0}^{(3)} - 6 \tau_{E0}^{(2)},$$

$$6 \mathfrak{B}_E^{(b)} = -2 l_3' M_E^{(3)} + 2 l_4' M_E^{(4)} + l_4' M_F + 6 \tau_{E0}^{(4)} - 6 \tau_{E0}^{(3)},$$

$$6 \mathfrak{B}_F^{(b)} = l_4' M_E^{(4)} + 2(l_4' + l_5') M_F + l_5' M_G + 6 \tau_{F0}^{(5)} - 6 \tau_{F0}^{(4)},$$

$$6 \mathfrak{B}_G^{(b)} = l_5' M_F + 2(l_5' + l_6') M_G + 6 \tau_{G0}^{(6)} - 6 \tau_{G0}^{(5)}.$$

Belastung: pt/m auf den Riegeln 2 und 5.

$$\tau_{D0}^{(1)} = \tau_{E0}^{(2)} = \tau_{E0}^{(3)} = \tau_{F0}^{(4)} = \tau_{G0}^{(5)} = 0,$$

$$6 \tau_{D0}^{(2)} = -6 \tau_{E0}^{(2)} = \frac{p l_2^2 l_2'}{4}, \quad 6 \tau_{F0}^{(5)} = -6 \tau_{G0}^{(5)} = \frac{p l_5^2 l_5'}{4}.$$

Das Gleichungssystem wird in Form einer Matrix angeschrieben.

	M_D	$M_E^{(2)}$	$M_E^{(3)}$	$M_E^{(4)}$	M_F	M_G	p	
1	$2 l_1' + 3 l_2'$	$-3 l_2'$	$2 l_3'$	0	0	0	$\frac{l_2^2 l_2'}{2}$	o
2	$-2 (l_1 + l_2) \frac{l_6}{l_4}$	$l_2' \frac{l_6}{l_4}$	$-2 l_3'$	$2 l_4'$	$l_4 - l_5' \frac{l_6}{l_4}$	$-2 (l_5 + l_6) \frac{l_6}{l_4}$	$-\frac{l_6}{l_4} \left(\frac{l_2^2 l_2'}{4} + \frac{l_5^2 l_5'}{4} \right)$	o
3	$2 (l_1 + l_2) \frac{l_1}{l_4}$	$-l_2' \frac{l_1}{l_4}$	0	l_4'	$2 (l_4 + l_5) + l_5' \frac{l_6}{l_4}$	$l_5 + 2 (l_5 + l_6) \frac{l_6}{l_4}$	$\frac{l_2^2 l_2'}{4} \frac{l_1}{l_4} + \frac{l_5^2 l_5'}{4} \left(1 + \frac{l_6}{l_5} \right)$	o
4	0	I	I	I	0	0	0	o
5	-I	0	I	$-\frac{l_1}{l_4}$	$\frac{l_6}{l_4}$	0	0	o
6	0	0	0	$\frac{l_6}{l_4}$	$-\frac{l_6}{l_4}$	I	0	o

	M_D	$M_E^{(2)}$	$M_E^{(3)}$	$M_E^{(4)}$	M_F	M_G	p	
1	99	-45	18	0	0	0	1687,5	o $M_D = -9,3269 p \text{ mt},$
2	-168	30	-18	18	-27	-144	-2983,5	o $M_E^{(2)} = +14,2645 p \text{ mt},$
3	84	-15	0	9	90	162	2787,75	o $M_E^{(3)} = -6,7899 p \text{ mt},$
4	0	I	I	I	0	0	0	o $M_E^{(4)} = -7,4746 p \text{ mt},$
5	-I	0	I	-I	I	0	0	o $M_F = -10,0116 p \text{ mt},$
6	0	0	0	2	-2	I	0	o $M_G = -5,0739 p \text{ mt}.$

Darstellung des Momentenbildes s. Abb. 169 S. 182.

Die Stabendmomente sind die Wurzeln von 6 Gleichungen, die keine symmetrische Matrix besitzen und für jede Belastung besonders aufgelöst werden. Sie lassen sich jedoch durch Superposition der Stabendmomente aus den Anteilen der Belastung und der drei statisch unbestimmten Größen nachträglich auf 3 Normalgleichungen zurückführen. Diese konnten bei Untersuchung desselben Rahmens nach Abschn. 25 auf S. 182 ff. unmittelbar angeschrieben werden. Diese Lösung ist daher einfacher.

Mohr, O.: Abhandlungen aus dem Gebiete der Techn. Mechanik, 3. Aufl. S. 512. Berlin 1928. — Kleinlogel, A.: Rahmenformeln, 6. Aufl. Berlin 1929. — Staack, J.: Rahmen und Balken. Berlin 1931.