



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Die Statik im Stahlbetonbau**

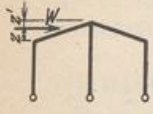
**Beyer, Kurt**

**Berlin [u.a.], 1956**

62. Die räumliche Belastung des ebenen Tragwerks

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)



$$\Phi = \frac{1}{2v} (\omega_D + \varphi' \omega'_D + \frac{\varphi'^2}{\varphi} \alpha),$$

$$M_{d,\sigma} = -\frac{Wf}{2} \left[ \frac{1}{\mu} (2\omega'_D - \omega_D) \mp \frac{\varphi'}{\varphi} (1 - \varphi \Phi) \right],$$

$$M_{e,\sigma'} = -\frac{Wf}{4} \left[ \omega_D + \frac{1}{\mu} (2\omega_D - \omega'_D) \pm 2\Phi \right],$$

$$M_f = Wf\Phi.$$

$$z = 0:$$

$$M_{d,\sigma} = \pm \frac{W h_1}{2} \left( 1 - \frac{\varphi'^2}{2v} \alpha \right),$$

$$M_{e,\sigma'} = \mp \frac{W h_1 \varphi'}{4v} \alpha,$$

$$M_f = \frac{W h_1 \varphi'}{2v} \alpha.$$



$$\Phi = \frac{\varphi'}{2v} (\alpha - \kappa_1 \omega_M),$$

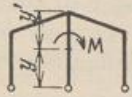
$$M_{h,\kappa} = \frac{M}{2} \left[ 2 \frac{\kappa_1}{\mu} \omega_M \pm (1 - \varphi' \Phi) \right],$$

$$\eta = \frac{y}{h_1}, \quad \eta' = \frac{y'}{h_1}. \quad M_{e,\sigma'} = -\frac{M}{2} \left[ \frac{\kappa_1}{\mu} \omega_M \pm \Phi \right],$$

$$M_f = M\Phi.$$

$$y = h_1: \quad \Phi = \frac{\varphi'}{2v} (2 + \varphi''), \quad \omega_M = 2.$$

$$y = 0: \quad \Phi = \frac{\varphi'}{2v} (\alpha + \kappa_1), \quad \omega_M = -1.$$



$$\Phi = \frac{1}{2v} (2\kappa_2 \omega_M + \varphi'^2 \alpha),$$

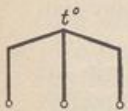
$$M_{d,\sigma} = \pm \frac{M}{2} \varphi' (1 - \Phi),$$

$$\eta = \frac{y}{h}, \quad \eta' = \frac{y'}{h}. \quad M_{e,\sigma'} = \mp \frac{M}{2} \Phi,$$

$$y' > 0: \quad M_f = M\Phi.$$

$$y = h: \quad \Phi = \frac{1}{2v} (4\kappa_2 + \varphi'^2 \alpha), \quad M_f = -M(1 - \Phi).$$

$$y = 0: \quad \Phi = \frac{1}{2v} (\varphi'^2 \alpha - 2\kappa_2).$$



$$M_{d,\sigma} = -\frac{12 E J_s l \alpha_t t}{\mu s h_1},$$

$$M_{e,\sigma'} = \frac{6 E J_s \alpha_t t l}{\mu s h_1}, \quad M_f = 0.$$

### 62. Die räumliche Belastung des ebenen Tragwerks.

Während das ebene Tragwerk bei Belastung in der Symmetrieebene als Scheibe oder Scheibenverbindung angesehen und berechnet wird, ist bei allgemeinem Kraftangriff die räumliche Betrachtung von Träger, Stützung und Formänderung notwendig. Der Abschnitt eines Stabes besitzt in diesem Falle sechs Freiheitsgrade, so daß für die äußeren Kräfte sechs Gleichgewichtsbedingungen angeschrieben werden können. Die Verschiebung eines Querschnitts ist durch sechs geometrische Parameter, der Spannungszustand ( $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ ) eines Querschnitts bei Annahme eines linearen Ansatzes für  $\sigma_x$  durch sechs Schnittkräfte (43) bestimmt.

Die äußeren Kräfte werden in Komponenten zerlegt, die in der Trägerebene und senkrecht dazu angreifen. Der Beitrag jeder Gruppe zum Spannungs- und Verschiebungszustand darf nach dem Superpositionsgesetz getrennt angegeben werden. Die räumliche Belastung besteht daher nur aus Kräften winkelrecht zur Ebene des Tragwerks, für welche das Biegemoment  $M_z$  und die Querkraft  $Q_y$  Null sind, während die Verschiebungen  $u, v$  und die Verdrehung  $\varphi_z$  als klein gegen die Komponenten  $w, \varphi_x, \varphi_y$  vernachlässigt werden (Abb. 581).

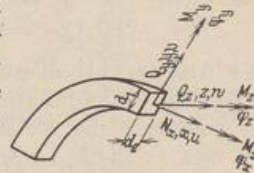


Abb. 581.

**Lösung A.** Die ebenen Tragwerke des Bauwesens mit räumlichem Charakter sind, abgesehen von wenigen Ausnahmen, statisch unbestimmt. Der Spannungszustand kann daher ebenso wie in Abschn. 24 aus den Schnittkräften eines Hauptsystems entwickelt werden, an dem die statisch unbestimmten Schnittkräfte neben der

Belastung als äußere Kräfte angreifen. Sie werden nach denselben Gesichtspunkten wie bei Tragwerken unter ebener Belastung ausgewählt und berechnet (Abschn. 24ff.). Daher lassen sich nach Abschn. 28 und 36 auch statisch überzählige Gruppenlasten bilden.

Die Schnittkräfte des Spannungszustandes werden durch Superposition gefunden.

$$\left. \begin{aligned} M_y &= M_{y,0} - \sum X_h M_{y,h}, & M_x &= M_{x,0} - \sum X_h M_{x,h}, \\ Q_z &= Q_{z,0} - \sum X_h Q_{z,h}; & (h &= 1 \dots n). \end{aligned} \right\} \quad (876)$$

Dasselbe gilt für die Komponenten des Verschiebungszustandes des Hauptsystems. Die relativen Verschiebungen  $\delta_k$  sind infolge der Kontinuität des vorgeschriebenen Tragwerks Null, so daß hier in Verbindung mit den Bemerkungen auf S. 89 ähnliche geometrische Bedingungen wie in Abschn. 24 angeschrieben werden können.

$$1_k \delta_k = 1_k (\delta_{k0} - \sum_{h=1}^n X_h \delta_{kh}), \quad (k = 1 \dots n).$$

$$1_k^{(0)} \delta_k = \int M_y^{(n)} M_{y,k}^{(0)} \frac{J_z}{J_y} ds + \frac{E}{G} \int M_x^{(n)} M_{x,k}^{(0)} \frac{J_c}{T} ds + E J_c \int M_{y,k}^{(0)} \frac{\alpha_t \Delta t}{d_2} ds = 0.$$

Die statische Untersuchung unterliegt denselben Rechenvorschriften wie bei ebener Belastung des Tragwerks (Abschn. 24ff.) und besteht daher aus folgenden Teilen:

1. Entwicklung der Funktionen  $M_{y,0}$ ,  $M_{y,k}$ ,  $M_{x,0}$ ,  $M_{x,k}$ .
2. Analytische oder numerische Integration der Vorzahlen und Belastungszahlen  $\delta_{kh}$ ,  $\delta_{k0}$ .
3. Auflösung des Ansatzes und Nachweis der Schnittkräfte im Hauptsystem aus Belastung und überzähligen Größen  $X_k$ .

**Lösung B.** Die statische Untersuchung des Tragwerks kann ebenso wie bei ebener Belastung auf die geometrischen Randbedingungen der Stäbe zurückgeführt werden (Abschn. 38). Diese sind hier durch die Verdrehung und durch die Verschiebung des Stabknotens, also durch sechs Komponenten bestimmt, von denen allerdings  $u_j$ ,  $v_j$ ,  $\varphi_{z,j}$  durch die Art der vorgeschriebenen Belastung Null sind. Die Verschiebungen  $w_j$ ,  $w_K$  werden im Sinne der  $z$ -Achse, die Drehwinkel  $\varphi_{x,j}$ ,  $\varphi_{y,j}$  im Sinne des Uhrzeigers als positiv angenommen und stets mit dem  $E J_c$  fachen Betrage verwendet. Sie ergeben sich ebenso wie in Abschn. 38 aus den Bedingungen für das Gleichgewicht der äußeren Kräfte an den kinematischen Gebilden  $\Gamma_{x,j}$ ,  $\Gamma_{y,j}$ ,  $\Gamma_c$ . Nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen (S. 315) ist

$$\delta A_{x,j} = 0, \quad \delta A_{y,j} = 0, \quad \delta A_c = 0 \quad (j = A \dots N, \quad c = 1 \dots f).$$

Der Ansatz enthält außer der Belastung  $\mathfrak{P}_k$ ,  $\mathfrak{P}_j$  der Stäbe  $k$  und Knoten  $j$  nach S. 319 die Anschlußkräfte  $M_{y,j}^{(k)}$ ,  $M_{x,j}^{(k)}$  an den Elementen der kinematischen Ketten als Funktion der Verschiebungen der Knotenpunkte:

$$\left. \begin{aligned} M_{y,j}^{(k)} &= M_{y,j0}^{(k)} + \varphi_{y,j} M_{y,jj}^{(k)} + \varphi_{y,K} M_{y,jK}^{(k)} + \vartheta_{y,k} M_{y,jk}^{(k)}, \\ M_{x,j}^{(k)} &= M_{x,j0}^{(k)} + \varphi_{x,j} M_{x,jj}^{(k)} + \varphi_{x,K} M_{x,jK}^{(k)}. \end{aligned} \right\} \quad (877)$$

Der Drehsinn der Anschlußmomente am Stab wird in Übereinstimmung mit demjenigen der Drehwinkel im Uhrzeigersinn positiv gerechnet. Für gerade Stäbe  $l_k$  mit gleichbleibendem Querschnitt, also auch mit

$$J_{y,k} = \text{const}, \quad T_k = \text{const} \quad \text{und} \quad \frac{J_c}{J_{y,k}} l_k = l_k', \quad \frac{E}{G} \frac{J_c}{T_k} l_k = l_k'' = \varrho_k l_k' \quad (878)$$

ist nach S. 308

$$\left. \begin{aligned} M_{y,j}^{(k)} &= M_{y,j0}^{(k)} + \varphi_{y,j} \frac{4}{l_k'} + \varphi_{y,K} \frac{2}{l_k''} - \vartheta_{y,k} \frac{6}{l_k'}, \\ M_{x,j}^{(k)} &= M_{x,j0}^{(k)} - \varphi_{x,j} \frac{1}{l_k''} + \varphi_{x,K} \frac{1}{l_k''}; \end{aligned} \right\} \quad (879)$$

oder mit 
$$\vartheta_{v,k} = (w_J - w_K)/l_k$$

$$M_{y,J}^{(k)} = M_{y,J0}^{(k)} + \varphi_{v,J} \frac{4}{l_k} + \varphi_{v,K} \frac{2}{l_k} - (w_J - w_K) \frac{6}{l_k l_k'} \quad (880)$$

Das ebene Tragwerk dient in lotrechter Stellung mit waagerechter Belastung als Bogen- und Rahmenträger zur Übertragung von Wind-, Brems- und Fliehkräften und in waagerechter Lage mit senkrechter Belastung als Ringträger, Kragträger und Trägerrost. Ihre Berechnung wird auf einfache oder mehrfache Symmetrie des Tragwerks beschränkt, um auf diese Weise die wesentlichen Eigenschaften der Lösung hervortreten zu lassen und einfache Ergebnisse zu erhalten.

Seipp, H.: Theorie und Berechnung doppeltgekrümmter Freiträger. Wien 1910. — Habel, A.: Rahmenberechnung bei räumlichem Kraftangriff. Beton u. Eisen 1926 S. 214. — Derselbe: Berechnung symmetrischer mehrstieliger Rahmen. Bautechn. 1926 S. 159. — Derselbe: Die Einflußlinien des senkrecht zur Tragwandebene belasteten zweistieligen Rahmens und ihre Anwendung bei der Berechnung räumlich beanspruchter mehrstieliger Rahmenträger. Beton u. Eisen 1928 S. 46. — Worch, G.: Beitrag zur Ermittlung der Formänderungen ebener Stabzüge mit räumlicher Stützung nebst Anwendung auf die Berechnung statisch unbestimmter Systeme. Beton u. Eisen 1930 S. 167.

### 63. Der eingespannte Bogenträger mit Belastung winkelrecht zur Trägerebene.

Der Träger ist symmetrisch zur Achse, so daß jede Belastung nach S. 186 in den symmetrischen und antisymmetrischen Anteil zerlegt werden kann. Bei Symmetrie der Belastung sind die Querkraft  $Q_c$  und das Drillungsmoment  $M_a$  in der Symmetrieachse Null (Abb. 582a). Der Spannungszustand des Trägers enthält daher mit dem Biegemoment  $M_b$  in der Symmetrieachse nur eine statisch unbestimmte Schnittkraft. Dieses ist bei Antimetrie der Belastung Null, die Rechnung also mit  $M_a$  und  $Q_c$  zweifach statisch unbestimmt. Die überzähligen Größen können ebenso wie auf S. 274 durch Einführung von Gruppenlasten unabhängig voneinander berechnet werden (Abb. 582b).

Das Hauptsystem der Untersuchung besteht nach Abb. 582a aus zwei winkelrecht zur Symmetrieebene belasteten Kragträgern, deren Schnittkräfte  $M_x, M_y$  in der folgenden Transformation verwendet werden (Abb. 582c)

$$\left. \begin{aligned} M_y &= -M_I \sin \alpha - M_{II} \cos \alpha, \\ M_x &= -M_I \cos \alpha + M_{II} \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (881)$$

In dieser bedeuten  $M_I, M_{II}$  die Momente der Kräfte zwischen Scheitel und Querschnitt ( $k$ ) in bezug auf die ausgezeichneten Achsen  $I$  und  $II$  mit dem Schwerpunkt des Querschnitts als Ursprung.

$$\frac{J_c}{J_v} ds = ds', \quad \frac{E J_c}{G T} ds = \varrho ds', \quad \varrho = \frac{E J_v}{G T}.$$

Überzählige Größen Abb. 582b.

$$X_1 = -M_b, \quad X_3 = -M_a,$$

$$X_2: \text{Gruppenlast aus } -Q_c \text{ und } M_a = -Q_c b_0.$$

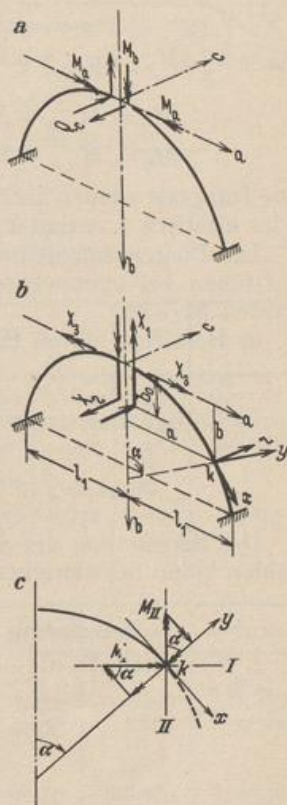


Abb. 582.