Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

63. Der eingespannte Bogenträger mit Belastung winkelrecht zur Trägerebene

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

oder mit $\vartheta_{v,k} = (w_J - w_K)/l_k$

$$M^{(k)}_{v,J} = M^{(k)}_{v,J0} + \varphi_{v,J}\frac{4}{l'_k} + \varphi_{v,K}\frac{2}{l'_k} - (w_J - w_K)\frac{6}{l_k l'_k}. \qquad (880).$$

Das ebene Tragwerk dient in lotrechter Stellung mit waagerechter Belastung als Bogen- und Rahmenträger zur Übertragung von Wind-, Brems- und Fliehkräften und in waagerechter Lage mit senkrechter Belastung als Ringträger, Kragträger und Trägerrost. Ihre Berechnung wird auf einfache oder mehrfache Symmetrie des Tragwerks beschränkt, um auf diese Weise die wesentlichen Eigenschaften der Lösung hervortreten zu lassen und einfache Ergebnisse zu erhalten.

Seipp, H.: Theorie und Berechnung doppeltgekrümmter Freiträger. Wien 1910. — Habel, A.: Rahmenberechnung bei räumlichem Kraftangriff. Beton u. Eisen 1926 S. 214. — Derselbe: Berechnung symmetrischer mehrstieliger Rahmen. Bautechn. 1926 S. 159. — Derselbe: Die Einflußlinien des senkrecht zur Tragwandebene belasteten zweistieligen Rahmens und ihre Anwendung bei der Berechnung räumlich beanspruchter mehrstieliger Rahmenträger. Beton u. Eisen 1928 S. 46. — Worch, G.: Beitrag zur Ermittlung der Formänderungen ebener Stabzüge mit räumlicher Stützung nebst Anwendung auf die Berechnung statisch unbestimmter Systeme. Beton u. Eisen 1930 S. 167.

63. Der eingespannte Bogenträger mit Belastung winkelrecht zur Trägerebene.

Der Träger ist symmetrisch zur Achse, so daß jede Belastung nach S. 186 in den symmetrischen und antimetrischen Anteil zerlegt werden kann. Bei Symmetrie der Belastung sind die Querkraft Q_c und das Drillungsmoment M_a in der Symmetrieachse Null (Abb. 582a). Der Spannungszustand des Trägers enthält daher mit dem Biegungsmoment M_b in der Symmetrieachse nur eine statisch unbestimmte Schnittkraft. Dieses ist bei Antimetrie der Belastung Null, die Rechnung also mit M_a und Q_c zweifach statisch unbestimmt. Die überzähligen Größen können ebenso wie auf S. 274 durch Einführung von Gruppenlasten unabhängig voneinander berechnet werden (Abb. 582b).

Das Hauptsystem der Untersuchung besteht nach Abb. 582a aus zwei winkelrecht zur Symmetrieebene belasteten Kragträgern, deren Schnittkräfte M_x, M_y in der folgenden Transformation verwendet werden (Abb. 582c)

$$\left.\begin{aligned} M_y &= -M_I \sin\alpha - M_{II}\cos\alpha,\\ M_x &= -M_I\cos\alpha + M_{II}\sin\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (881)$$

In dieser bedeuten M_I, M_{II} die Momente der Kräfte zwischen Scheitel und Querschnitt (k) in bezug auf die ausgezeichneten Achsen I und II mit dem Schwerpunkt des Querschnitts als Ursprung.

$$\frac{J_c}{J_v}ds = ds', \qquad \frac{EJ_c}{GT}ds = \varrho\, ds', \qquad \varrho = \frac{EJ_v}{GT}.$$

Überzählige Größen Abb. 582b.

$$X_1 = -M_b, \qquad X_3 = -M_a,$$

X_2: Gruppenlast aus $-Q_c$ und $M_a = -Q_c b_0$.

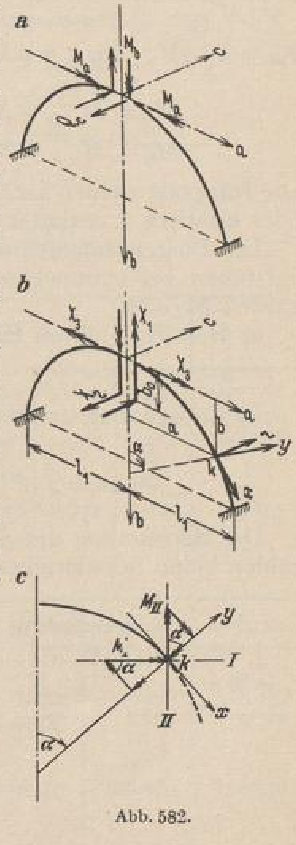


Abb. 582.

a) Symmetrischer Anteil: $X_1 = \delta_{10}/\delta_{11}$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$.

$$-X_1 = 1: \quad M_{y,1} = \cos\alpha, \quad M_{x,1} = -\sin\alpha,$$

$$\delta_{10} = 2\int_0^{l_1} (M_{y,0}\cos\alpha - M_{x,0}\,\varrho\sin\alpha)\,ds', \qquad \delta_{11} = 2\int_0^{l_1} (\cos^2\alpha + \varrho\sin^2\alpha)\,ds'. \tag{882}$$

$$M_y = M_{y,0} - X_1\cos\alpha, \qquad M_x = M_{x,0} + X_1\sin\alpha. \tag{883}$$

b) Antimetrischer Anteil: $X_1 = 0$, $X_2 \neq 0$, $X_3 \neq 0$.

$$-X_2 = 1: \quad M_y = a\cos\alpha + (b - b_0)\sin\alpha, \qquad M_x = -a\sin\alpha + (b - b_0)\cos\alpha.$$

$$-X_3 = 1: \quad M_y = \sin\alpha, \qquad M_x = \cos\alpha.$$

Für $\delta_{23} = 0$ ist

$$b_0 = \frac{\int_0^{l_1} [\sin\alpha\,(a\cos\alpha + b\sin\alpha) - \varrho\cos\alpha\,(a\sin\alpha - b\cos\alpha)]\,ds'}{\int_0^{l_1} (\sin^2\alpha + \varrho\cos^2\alpha)\,ds'} \tag{884}$$

und

$$\left.\begin{aligned}
&X_2 = \delta_{20}/\delta_{22}, \qquad X_3 = \delta_{30}/\delta_{33},\\
&\delta_{20} = 2\int_0^{l_1} \{M_{y,0}[a\cos\alpha + (b-b_0)\sin\alpha] - \varrho\,M_{x0}[a\sin\alpha - (b-b_0)\cos\alpha]\}\,ds',\\
&\delta_{22} = 2\int_0^{l_1} \{[a\cos\alpha + (b - b_0)\sin\alpha]^2 + \varrho\,[a\sin\alpha - (b - b_0)\cos\alpha]^2\}\,ds',\\
&\delta_{30} = 2\int_0^{l_1} (M_{y,0}\sin\alpha + \varrho\,M_{x,0}\cos\alpha)\,ds', \quad \delta_{33} = 2\int_0^{l_1} (\sin^2\alpha + \varrho\cos^2\alpha)\,ds',\\
&M_y = M_{y,0} - X_2[a\cos\alpha + (b - b_0)\sin\alpha] - X_3\sin\alpha,\\
&M_x = M_{x,0} + X_2[a\sin\alpha - (b - b_0)\cos\alpha] - X_3\cos\alpha.
\end{aligned}\right| \tag{885}$$

Die Integrale werden nach Unterteilung des Bereichs l_1 in Intervalle mit geometrisch oder elastisch konstanter Breite nach S. 95 numerisch berechnet.

Die Biegungsmomente $M_{y,0}$ und die Drillungsmomente $M_{x,0}$ des Hauptsystems entstehen bei symmetrischen oder antimetrischen Kräften $\mathfrak{P}$, $p\,da$ und Kräftepaaren M, $\mu\,da$.

a) Belastung durch Einzellast P und Kräftepaar $\mathsf{M}||a$ im Punkt (a, b)

$$a < a_k, \quad b < b_k; \qquad M_{I,0} = P(b_k - b) + \mathsf{M}, \quad M_{II,0} = P(a_k - a). \tag{886}$$

b) Stetige Belastung mit den Komponenten p, $\mu||a$

$$M_{I,0} = \int_0^{a_k} [p\,(b_k - b) + \mu]\,da, \qquad M_{II,0} = \int_0^{a_k} p\,(a_k - a)\,da. \tag{887}$$

Die Berechnung der Schnittkräfte bietet bei numerischer Integration der Vorzahlen keine Schwierigkeiten. Dasselbe gilt für die Einflußlinien.

Berechnung der Bogenbrücke S. 538 für Windbelastung.

1. Geometrische Grundlagen. Bogenform und Überbau nach S. 538. Gewölbebreite $d_2 = 10$ m.

$$J_v = \frac{d_1\,d_2^3}{12}, \qquad J_c = \frac{0{,}52\cdot 10^3}{12} = 43{,}33\ \text{m}^4,$$

$$\varrho = \frac{E\,J_c}{G\,T\,J_c/J_v} = \frac{86{,}66}{T\,J_c/J_v}.$$

Nach S. 30 ist $\psi_3 \approx 0{,}320$ nahezu konstant und

$$T = d_2 d_1^3 \psi_3 = 3{,}20\, d_1^3 \ [\mathrm{m}^4]\,.$$

2. Belastung. Winddruck $w = 0{,}250\ \mathrm{t/m^2}$. Die belastete Fläche der rechten Bogenhälfte wird in 10 Trapezstreifen mit $\Delta a = 1{,}372$ m eingeteilt und die stetige Belastung durch eine äquivalente Gruppe von Einzellasten $\mathfrak{P}_k$ in der Mitte der Intervallgrenzen ersetzt (Abb. 583).

$$\mathfrak{P}_k = \mathfrak{P}_{k,l} + \mathfrak{P}_{k,r}\,,$$

$$\mathfrak{P}_{k,l} = \frac{\Delta a}{6}\,(h_{k-1} + 2\,h_k)\,w\,, \qquad \mathfrak{P}_{k,r} = \frac{\Delta a}{6}\,(2\,h_k + h_{k+1})\,w\,.$$

Jeder Anteil ist äquivalent mit der Kraft in der Mittelebene des Bogens und dem Versetzungsmoment

$$\mu_{k,{l \atop r}} = \mathfrak{P}_{k,{l \atop r}} \cdot e_k\,, \qquad e_k = \frac{h_k - v_k}{2}\,.$$

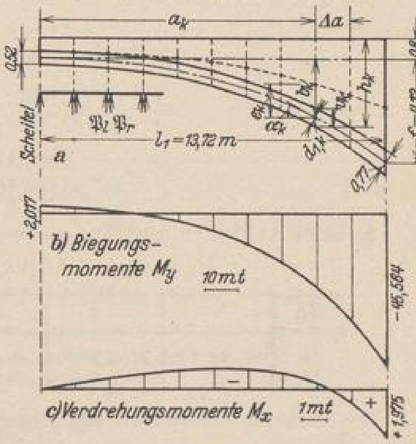


Abb. 583.

3. Überzählige Größen. Infolge der Symmetrie der Belastung ist nach S. 617 nur eine statisch überzählige Größe $X_1 = \delta_{10}/\delta_{11}$ vorhanden (Abb. 582 b).

4. Schnittkräfte im Hauptsystem und numerische Berechnung von δ_{11} und δ_{10}:

$$Q_k = \sum_0^{k-1} \mathfrak{P}_k\,, \qquad \Delta b_k = b_k - b_{k-1}\,,$$

$$M_{I,k0} = M_{I,(k-1)0} + Q_k \Delta b_k + \mu_{(k-1),r} + \mu_{k,l}\,,$$

$$M_{II,k0} = M_{II,(k-1)0} + Q_k \Delta a\,.$$

Hieraus $M_{x,0}$, $M_{y,0}$ nach Gl. (881).

Die Integrale (882) für δ_{10}, δ_{11} werden nach Simpson numerisch berechnet.

$$\frac{1}{2}\,\delta_{10} = \frac{\Delta a}{3} \sum_0^{l_1} n\,\lambda_1\,, \qquad \lambda_1 = (M_{y,0} \cos\alpha - M_{x,0}\,\varrho\,\sin\alpha)\,\frac{J_c}{J\cos\alpha}\,,$$

$$\frac{1}{2}\,\delta_{11} = \frac{\Delta a}{3} \sum_0^{l_1} n\,\lambda_2\,, \qquad \lambda_2 = (\cos^2\alpha + \varrho\,\sin^2\alpha)\,\frac{J_c}{J\cos\alpha}\,.$$

$\frac{a}{l_1}$	d_1	b	Δb	h	e	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\frac{J_c}{J}$	$\frac{J_c}{J\cos\alpha}$	T	ϱ
0	0,520	0	—	1,060	0,270	0	1	1,000	1,000	0,451	192,151
0,1	0,520	0,029	0,029	1,090	0,285	0,0418	0,9984	1,000	1,000	0,451	192,151
0,2	0,525	0,116	0,087	1,180	0,327	0,0853	0,9963	0,990	0,994	0,464	188,654
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1	0,770	4,120	1,002	5,417	2,212	0,6315	0,7753	0,675	0,871	1,462	87,815

Berechnung für $w = 1\ \mathrm{t/m^2}$

a/l_1	$\mathfrak{P}_l$	$\mathfrak{P}_r$	$\mathfrak{P}$	μ_l	μ_r	Q	$Q\Delta b$	$Q\Delta a$	$M_{I,0}$	$M_{II,0}$
0	0	0,734	0,734	0	0,198	—	—	—	0	0
0,1	0,741	0,768	1,509	0,211	0,219	0,734	0,021	1,007	0,430	1,007
0,2	0,789	0,845	1,634	0,258	0,276	2,243	0,195	3,077	1,102	4,084
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1	3,466	0	3,466	7,667	0	28,256	28,313	38,767	108,982	154,376

	Berechnung für $w = 1$ t/m²							$w = 0{,}250$ t/m²	
a/l_1	$M_{y,0}$	$M_{x,0}$	λ_1	n	$n\,\lambda_1$	λ_2	$n\,\lambda_2$	$M_{y,0}$ [mt]	$M_{x,0}$ [mt]
0	0	0	0	1	0	1	1	0	0
0,1	− 1,023	− 0,387	+ 2,087	4	+ 8,348	1,332	5,328	− 0,256	− 0,0978
0,2	− 4,163	− 0,750	+ 7,873	2	+ 15,746	2,351	4,702	− 1,041	− 0,188
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1	− 188,510	+ 12,995	− 754,976	1	− 754,976	31,026	31,026	− 47,128	+ 3,249
					$\Sigma = -3388{,}492$	$\Sigma = 420{,}052$			

Mit $w = 0{,}250$ t/m² wird

$$\frac{1}{2}\,\delta_{10} = -\frac{1{,}372}{3}\cdot 3388{,}492\cdot 0{,}250 = -387{,}417\,,$$

$$\frac{1}{2}\,\delta_{11} = +\frac{1{,}372}{3}\cdot 420{,}052 = +192{,}104\,,$$

$$X_1 = -\frac{387{,}417}{192{,}104} = -2{,}017 \text{ mt}\,.$$

5. Schnittkräfte und Spannungen. Nach Gl. (883) wird

$$M_y = M_{y,0} + 2{,}017\cos\alpha\,, \qquad M_x = M_{x,0} - 2{,}017\sin\alpha\,.$$

a/l_1	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	
M_y	+ 2,017	+ 0,969	− 2,454	− 9,278	− 21,812	− 45,564	mt
M_x	0	− 0,360	− 0,673	− 0,780	− 0,217	+ 1,975	mt

Die Momente sind in Abb. 583 dargestellt. Die größten Spannungen treten am Kämpfer auf.

$$\sigma_x = \frac{6\,M_y}{d_1\,d_2^2} = \frac{6\cdot 45{,}564}{0{,}77\cdot 100} = 3{,}55 \text{ t/m}^2 = 0{,}36 \text{ kg/cm}^2\,.$$

Nach S. 30 ist nach C. Weber $\psi_1 \approx 1$ und

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{T}\,\psi_1 d_1 = \frac{1{,}975}{1{,}462}\cdot 1\cdot 0{,}77 = 1{,}04 \text{ t/m}^2 = 0{,}104 \text{ kg/cm}^2\,.$$

Berechnung eines eingespannten, symmetrischen Trapezrahmens mit räumlicher Belastung.

$$l'_{1y} = l_1\frac{J_c}{J_{y,l}}\,,\qquad s'_y = s\,\frac{J_c}{J_{y,s}}\,,\qquad \varkappa_y = \frac{l'_{1,y}}{s'_y}\,,\qquad \varrho_l = \frac{l''_1}{l'_{1,y}} = \frac{E\,J_{y,l}}{G\,T_l}\,,\qquad \varrho_s = \frac{s''}{s'_y} = \frac{E\,J_{y,s}}{G\,T_s}\,.$$

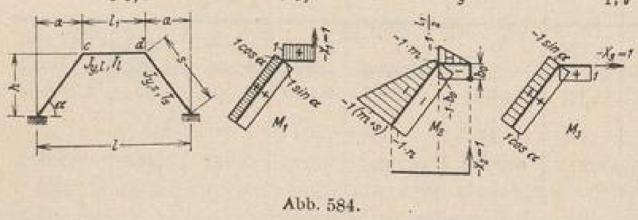


Abb. 584.

$$m = \frac{l_1}{2}\cos\alpha - b_0\sin\alpha\,,$$

$$n = \frac{l_1}{2}\sin\alpha + b_0\cos\alpha\,.$$

Das Hauptsystem besteht aus 2 Kragträgern. Die Überzähligen sind bei symmetrischer Belastung $X_1 = \delta_{10}/\delta_{11}$, bei antimetrischer Belastung $X_3 = \delta_{30}/\delta_{33}$ und $X_2 = \delta_{20}/\delta_{22}$ am Hebelarm b_0, so daß $\delta_{23} = 0$ (Abb. 584).

Vorzahlen. Mit den Abkürzungen

$$\psi_1 = 2\,(\cos^2\alpha + \varrho_s\sin^2\alpha)\,,$$

$$\psi_2 = 2 + 6\,\frac{m}{s}\left(\frac{m}{s}+1\right) + \varkappa_y\left(\frac{l_1}{2\,s}\right)^2 + 6\,\varrho_s\left(\frac{n}{s}\right)^2 + 3\,\varkappa_y\,\varrho_l\left(\frac{b_0}{s}\right)^2,$$

$$\psi_3 = 2\,(\sin^2\alpha + \varrho_s\cos^2\alpha)$$

wird $\delta_{11} = s'(\varkappa_y + \psi_1)$, $\quad\delta_{22} = \dfrac{s'\,s^2}{3}\,\psi_2$, $\quad\delta_{33} = s'(\psi_3 + \varkappa_y\,\varrho_l)$.

Aus $\delta_{23} = 0$ folgt $b_0 = \dfrac{[s + l_1(1 - \varrho_s)\cos\alpha]\sin\alpha}{\psi_3 + \varkappa_v\,\varrho_l}$

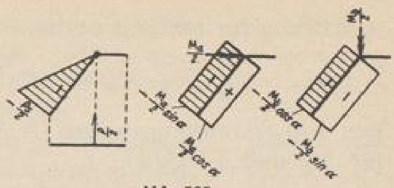
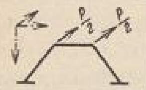
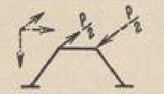
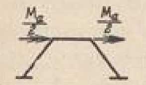
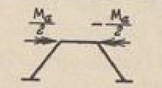
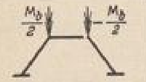
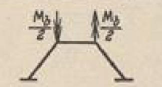


Abb. 585.

Belastung. a) Einzellast P senkrecht zur Rahmenebene und zwei Momente M_a, M_b in der Rahmenebene am Eckpunkt c (Abb. 585). Das Ergebnis wird für den symmetrischen und den antimetrischen Anteil getrennt angegeben.

Symmetrischer Anteil	X_1[mt]	Antimetrischer Anteil	X_2[t]	X_3[mt]
	$-\dfrac{Pa}{2}\,\dfrac{1}{\psi_1+\varkappa_v}$		$\dfrac{P}{2}\,\dfrac{2+3\dfrac{m}{s}}{\psi_2}$	$\dfrac{Ph}{2}\,\dfrac{1}{\psi_3+\varkappa_v\varrho_l}$
	$-\dfrac{M_a}{2}\,\dfrac{1-\varrho_s}{\psi_1+\varkappa_v}\,\dfrac{2ah}{s^2}$		$\dfrac{3}{2}\,\dfrac{M_a}{s}\,\dfrac{\Phi_2}{\psi_2}$	$\dfrac{M_a}{2}\,\dfrac{\psi_3}{\psi_3+\varkappa_v\varrho_l}$
	$-\dfrac{M_b}{2}\,\dfrac{\psi_1}{\psi_1+\varkappa_v}$		$\dfrac{3}{2}\,\dfrac{M_b}{s}\,\dfrac{\Phi_1}{\psi_2}$	$\dfrac{M_b}{2}\,\dfrac{1-\varrho_s}{\psi_3+\varkappa_v\varrho_l}\,\dfrac{2ah}{s^2}$

$$\Phi_1 = \left(1 + 2\frac{m}{3}\right)\cos\alpha + 2\,\varrho_s\,\frac{n}{s}\sin\alpha, \qquad \Phi_2 = \left(1 + 2\frac{m}{s}\right)\sin\alpha - 2\,\varrho_s\,\frac{n}{s}\cos\alpha.$$

b) Gleichmäßig verteilte, waagerechte Belastung auf dem Riegel l_1 (Abb. 586). Die Belastung ist symmetrisch, daher $X_2 = X_3 = 0$.

$$\delta_{10} = -p s'\frac{l_1^2}{8}\left[\frac{\varkappa_v}{3} + 4\frac{s}{l_1}\cos\alpha + \psi_1\right],$$

$$X_1 = -p\,\frac{l_1^2}{8}\,\frac{\dfrac{1}{3}\varkappa_v + 4\dfrac{s}{l_1}\cos\alpha + \psi_1}{\varkappa_v + \psi_1}.$$

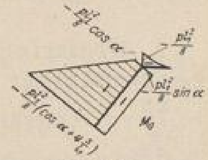


Abb. 586.

Hawranek, A.: Allgemeine Theorie der Wirkung von Querriegeln bei zweireihigen Bogenbrücken. Verhandlungen des 2. Internat. Kongr. f. Techn. Mech., Zürich 1927. — Schwarz, R.: Durchlaufende Bogen unter räumlicher Belastung. Bautechn. 1927 S. 449. — Derselbe: Berechnung des Rahmenwindverbandes von Zweigelenkbogenbrücken mit Kreisform und unveränderlichem Trägheitsmoment bei Berücksichtigung elastischer Einspannung durch die Endquerträger. Beton u. Eisen 1928 S. 31.

64. Der Kreisringträger.

Die allgemeine Theorie des querbelasteten Kreisringträgers ist in zahlreichen Arbeiten ausführlich behandelt worden. Sie stützen sich in der Regel auf die Gleichung der elastischen Linie. Da hier jedoch nur einzelne für den Konstrukteur wichtige Ergebnisse angegeben werden sollen, um die Eigenart des Ansatzes aufzuzeigen und die Lösung wichtiger Aufgaben zu erleichtern, wird auf die allgemeine Untersuchung der Formänderung des Trägers verzichtet.

Aus dem Gleichgewicht der äußeren Kräfte an einem Abschnitt ds folgt nach (68) und Abb. 587

$$\frac{dQ}{d\alpha} = -pr, \qquad \frac{dM_x}{d\alpha} = -M_y, \qquad \frac{dM_y}{d\alpha} = M_x + Qr. \tag{888}$$

Den Nullstellen des Biegungsmomentes M_y sind daher Größtwerte des Drillungsmomentes M_x, den Größtwerten des Biegungsmomentes M_y Wendepunkte der Funktion des Drillungsmomentes M_x zugeordnet.