Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Zahlenbeispiel

a) Symmetrischer Anteil: $X_1 = \delta_{10}/\delta_{11}$, $\quad X_2 = 0$, $\quad X_3 = 0$.

$$-X_1 = 1: \qquad M_{y,1} = \cos\alpha, \qquad M_{x,1} = -\sin\alpha,$$

$$\delta_{10} = 2\int_0^{l_1} (M_{y,0}\cos\alpha - M_{x,0}\,\varrho\sin\alpha)\,ds', \qquad \delta_{11} = 2\int_0^{l_1} (\cos^2\alpha + \varrho\sin^2\alpha)\,ds'. \tag{882}$$

$$M_y = M_{y,0} - X_1\cos\alpha, \qquad M_x = M_{x,0} + X_1\sin\alpha. \tag{883}$$

b) Antimetrischer Anteil: $X_1 = 0$, $\quad X_2 \neq 0$, $\quad X_3 \neq 0$.

$-X_2 = 1$: $\quad M_y = a\cos\alpha + (b - b_0)\sin\alpha$, $\qquad M_x = -a\sin\alpha + (b - b_0)\cos\alpha$.

$-X_3 = 1$: $\quad M_y = \sin\alpha$, $\qquad M_x = \cos\alpha$.

Für $\delta_{23} = 0$ ist

$$b_0 = \frac{\int_0^{l_1} [\sin\alpha\,(a\cos\alpha + b\sin\alpha) - \varrho\cos\alpha\,(a\sin\alpha - b\cos\alpha)]\,ds'}{\int_0^{l_1} (\sin^2\alpha + \varrho\cos^2\alpha)\,ds'} \tag{884}$$

und

$$\left.\begin{aligned}
&X_2 = \delta_{20}/\delta_{22}, \qquad X_3 = \delta_{30}/\delta_{33},\\
&\delta_{20} = 2\int_0^{l_1} \{M_{y,0}[a\cos\alpha + (b-b_0)\sin\alpha] - \varrho\,M_{x0}[a\sin\alpha - (b-b_0)\cos\alpha]\}\,ds',\\
&\delta_{22} = 2\int_0^{l_1} \{[a\cos\alpha + (b-b_0)\sin\alpha]^2 + \varrho\,[a\sin\alpha - (b-b_0)\cos\alpha]^2\}\,ds',\\
&\delta_{30} = 2\int_0^{l_1} (M_{y,0}\sin\alpha + \varrho\,M_{x,0}\cos\alpha)\,ds', \quad \delta_{33} = 2\int_0^{l_1} (\sin^2\alpha + \varrho\cos^2\alpha)\,ds',\\
&M_y = M_{y,0} - X_2[a\cos\alpha + (b-b_0)\sin\alpha] - X_3\sin\alpha,\\
&M_x = M_{x,0} + X_2[a\sin\alpha - (b-b_0)\cos\alpha] - X_3\cos\alpha.
\end{aligned}\right| \tag{885}$$

Die Integrale werden nach Unterteilung des Bereichs l_1 in Intervalle mit geometrisch oder elastisch konstanter Breite nach S. 95 numerisch berechnet.

Die Biegungsmomente $M_{y,0}$ und die Drillungsmomente $M_{x,0}$ des Hauptsystems entstehen bei symmetrischen oder antimetrischen Kräften $\mathfrak{P}$, $p\,da$ und Kräftepaaren M, $\mu\,da$.

a) Belastung durch Einzellast P und Kräftepaar $\mathsf{M}\,||\,a$ im Punkt (a, b)

$$a < a_k, \quad b < b_k; \qquad M_{I,0} = P(b_k - b) + \mathsf{M}, \quad M_{II,0} = P(a_k - a). \tag{886}$$

b) Stetige Belastung mit den Komponenten p, $\mu\,||\,a$

$$M_{I,0} = \int_0^{a_k} [p\,(b_k - b) + \mu]\,da, \qquad M_{II,0} = \int_0^{a_k} p\,(a_k - a)\,da. \tag{887}$$

Die Berechnung der Schnittkräfte bietet bei numerischer Integration der Vorzahlen keine Schwierigkeiten. Dasselbe gilt für die Einflußlinien.

Berechnung der Bogenbrücke S. 538 für Windbelastung.

1. Geometrische Grundlagen. Bogenform und Überbau nach S. 538. Gewölbebreite $d_2 = 10$ m.

$$J_y = \frac{d_1\,d_2^3}{12}, \qquad J_c = \frac{0{,}52 \cdot 10^3}{12} = 43{,}33\ \text{m}^4,$$

$$\varrho = \frac{E\,J_c}{G\,T\,J_c/J_y} = \frac{86{,}66}{T\,J_c/J_y}.$$

Nach S. 30 ist $\psi_3 \approx 0{,}320$ nahezu konstant und

$$T = d_2\, d_1^3\, \psi_3 = 3{,}20\, d_1^3\ [\mathrm{m}^4]\,.$$

2. Belastung. Winddruck $w = 0{,}250\ \mathrm{t/m^2}$. Die belastete Fläche der rechten Bogenhälfte wird in 10 Trapezstreifen mit $\Delta a = 1{,}372$ m eingeteilt und die stetige Belastung durch eine äquivalente Gruppe von Einzellasten $\mathfrak{P}_k$ in der Mitte der Intervallgrenzen ersetzt (Abb. 583).

$$\mathfrak{P}_k = \mathfrak{P}_{k,l} + \mathfrak{P}_{k,r}\,,$$

$$\mathfrak{P}_{k,l} = \frac{\Delta a}{6}\,(h_{k-1} + 2\,h_k)\,w\,, \qquad \mathfrak{P}_{k,r} = \frac{\Delta a}{6}\,(2\,h_k + h_{k+1})\,w\,.$$

Jeder Anteil ist äquivalent mit der Kraft in der Mittelebene des Bogens und dem Versetzungsmoment

$$\mu_{k,{l \atop r}} = \mathfrak{P}_{k,{l \atop r}} \cdot e_k\,, \qquad e_k = \frac{h_k - v_k}{2}\,.$$

3. Überzählige Größen. Infolge der Symmetrie der Belastung ist nach S. 617 nur eine statisch überzählige Größe $X_1 = \delta_{10}/\delta_{11}$ vorhanden (Abb. 582b).

4. Schnittkräfte im Hauptsystem und numerische Berechnung von δ_{11} und δ_{10}:

$$Q_k = \sum_0^{k-1} \mathfrak{P}_k\,, \qquad \Delta b_k = b_k - b_{k-1}\,,$$

$$M_{I,k0} = M_{I,(k-1)0} + Q_k\,\Delta b_k + \mu_{(k-1),r} + \mu_{k,l}\,,$$

$$M_{II,k0} = M_{II,(k-1)0} + Q_k\,\Delta a\,.$$

Hieraus $M_{x,0}$, $M_{y,0}$ nach Gl. (881).

Die Integrale (882) für δ_{10}, δ_{11} werden nach Simpson numerisch berechnet.

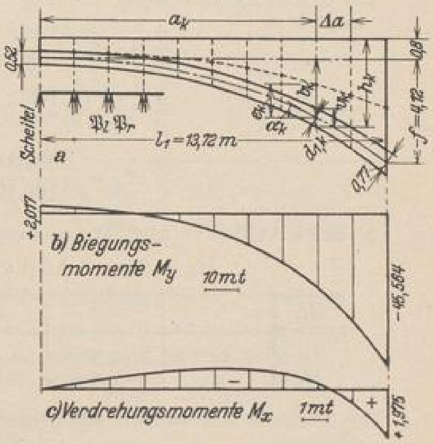

Abb. 583.

$$\frac{1}{2}\,\delta_{10} = \frac{\Delta a}{3} \sum_0^{l_1} n\,\lambda_1\,, \qquad \lambda_1 = (M_{y,0}\cos\alpha - M_{x,0}\,\varrho\,\sin\alpha)\,\frac{J_c}{J\cos\alpha}\,,$$

$$\frac{1}{2}\,\delta_{11} = \frac{\Delta a}{3} \sum_0^{l_1} n\,\lambda_2\,, \qquad \lambda_2 = (\cos^2\alpha + \varrho\,\sin^2\alpha)\,\frac{J_c}{J\cos\alpha}\,.$$

$\frac{a}{l_1}$	d_1	b	Δb	h	e	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\frac{J_c}{J}$	$\frac{J_c}{J\cos\alpha}$	T	ϱ
0	0,520	0	—	1,060	0,270	0	1	1,000	1,000	0,451	192,151
0,1	0,520	0,029	0,029	1,090	0,285	0,0418	0,9984	1,000	1,000	0,451	192,151
0,2	0,525	0,116	0,087	1,180	0,327	0,0853	0,9963	0,990	0,994	0,464	188,654
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1	0,770	4,120	1,002	5,417	2,212	0,6315	0,7753	0,675	0,871	1,462	87,815

Berechnung für $w = 1\ \mathrm{t/m^2}$

a/l_1	$\mathfrak{P}_l$	$\mathfrak{P}_r$	$\mathfrak{P}$	μ_l	μ_r	Q	$Q\Delta b$	$Q\Delta a$	$M_{I,0}$	$M_{II,0}$
0	0	0,734	0,734	0	0,198	—	—	—	0	0
0,1	0,741	0,768	1,509	0,211	0,219	0,734	0,021	1,007	0,430	1,007
0,2	0,789	0,845	1,634	0,258	0,276	2,243	0,195	3,077	1,102	4,084
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1	3,466	0	3,466	7,667	0	28,256	28,313	38,767	108,982	154,376

	Berechnung für $w = 1$ t/m²							$w = 0{,}250$ t/m²	
a/l_1	$M_{y,0}$	$M_{x,0}$	λ_1	n	$n\lambda_1$	λ_2	$n\lambda_2$	$M_{y,0}$ [mt]	$M_{x,0}$ [mt]
0	0	0	0	1	0	1	1	0	0
0,1	− 1,023	− 0,387	+ 2,087	4	+ 8,348	1,332	5,328	− 0,256	− 0,0978
0,2	− 4,163	− 0,750	+ 7,873	2	+ 15,746	2,351	4,702	− 1,041	− 0,188
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1	− 188,510	+ 12,995	− 754,976	1	− 754,976	31,026	31,026	− 47,128	+ 3,249
					$\Sigma = -3388{,}492$		$\Sigma = 420{,}052$		

Mit $w = 0{,}250$ t/m² wird

$$\frac{1}{2}\,\delta_{10} = -\frac{1{,}372}{3}\cdot 3388{,}492\cdot 0{,}250 = -387{,}417\,,$$

$$\frac{1}{2}\,\delta_{11} = +\frac{1{,}372}{3}\cdot 420{,}052 = +192{,}104\,,$$

$$X_1 = -\frac{387{,}417}{192{,}104} = -2{,}017 \text{ mt}\,.$$

5. Schnittkräfte und Spannungen. Nach Gl. (883) wird

$$M_y = M_{y,0} + 2{,}017\cos\alpha\,, \qquad M_x = M_{x,0} - 2{,}017\sin\alpha\,.$$

a/l_1	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	
M_y	+ 2,017	+ 0,969	− 2,454	− 9,278	− 21,812	− 45,564	mt
M_x	0	− 0,360	− 0,673	− 0,780	− 0,217	+ 1,975	mt

Die Momente sind in Abb. 583 dargestellt. Die größten Spannungen treten am Kämpfer auf.

$$\sigma_x = \frac{6\,M_y}{d_1\,d_2^2} = \frac{6\cdot 45{,}564}{0{,}77\cdot 100} = 3{,}55 \text{ t/m}^2 = 0{,}36 \text{ kg/cm}^2.$$

Nach S. 30 ist nach C. Weber $\psi_1 \approx 1$ und

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{T}\,\psi_1 d_1 = \frac{1{,}975}{1{,}462}\cdot 1\cdot 0{,}77 = 1{,}04 \text{ t/m}^2 = 0{,}104 \text{ kg/cm}^2.$$

Berechnung eines eingespannten, symmetrischen Trapezrahmens mit räumlicher Belastung.

$$l'_{1y} = l_1\frac{J_c}{J_{y,l}}\,,\qquad s'_y = s\,\frac{J_c}{J_{y,s}}\,,\qquad \varkappa_y = \frac{l'_{1,y}}{s'_y}\,,\qquad \varrho_l = \frac{l''_1}{l'_{1,y}} = \frac{E\,J_{y,l}}{G\,T_l}\,,\qquad \varrho_s = \frac{s''}{s'_y} = \frac{E\,J_{y,s}}{G\,T_s}\,.$$

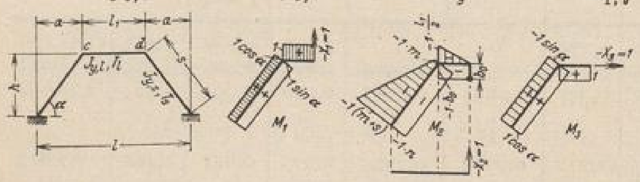

Abb. 584.

$$m = \frac{l_1}{2}\cos\alpha - b_0\sin\alpha\,,$$

$$n = \frac{l_1}{2}\sin\alpha + b_0\cos\alpha\,.$$

Das Hauptsystem besteht aus 2 Kragträgern. Die Überzähligen sind bei symmetrischer Belastung $X_1 = \delta_{10}/\delta_{11}$, bei antimetrischer Belastung $X_3 = \delta_{30}/\delta_{33}$ und $X_2 = \delta_{20}/\delta_{22}$ am Hebelarm b_0, so daß $\delta_{23} = 0$ (Abb. 584).

Vorzahlen. Mit den Abkürzungen

$$\psi_1 = 2\,(\cos^2\alpha + \varrho_s\sin^2\alpha)\,,$$

$$\psi_2 = 2 + 6\,\frac{m}{s}\left(\frac{m}{s}+1\right) + \varkappa_y\left(\frac{l_1}{2\,s}\right)^2 + 6\,\varrho_s\left(\frac{n}{s}\right)^2 + 3\,\varkappa_y\,\varrho_l\left(\frac{b_0}{s}\right)^2,$$

$$\psi_3 = 2\,(\sin^2\alpha + \varrho_s\cos^2\alpha)$$

wird $\delta_{11} = s'(\varkappa_y + \psi_1)$, $\quad \delta_{22} = \dfrac{s'\,s^2}{3}\,\psi_2$, $\quad \delta_{33} = s'(\psi_3 + \varkappa_y\,\varrho_l)\,.$