



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Die Statik im Stahlbetonbau**

**Beyer, Kurt**

**Berlin [u.a.], 1956**

Zahlenbeispiele

---

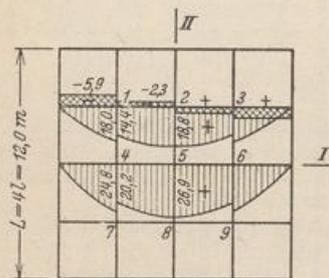
[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

Belastung des Trägerrostes ( $\mathfrak{B}, \Delta t$ ), der Verschiebung  $w_h = 1$  oder von der Verdrehung  $\varphi_h = 1$  oder  $\psi_h = 1$  herrühren. Diese lassen sich aus den Ansätzen (533 ff.) entnehmen, so daß die Vorzeichen und Belastungszahlen mit der Abb. 602 unmittelbar angeschrieben werden können. Dabei zeigt sich, daß

$$\bar{a}_{\psi k, h} = a_{\varphi k, h}^* = 0 \quad \text{und} \quad a_{\varphi k, h} = \bar{a}_{w k, h}, \quad a_{\psi k, h} = a_{w k, h}^*.$$

Die 27 unabhängigen statischen Bedingungen zur Berechnung eines unregelmäßigen Trägerrostes nach Abb. 595 bilden die Matrix auf S. 631.

Die Wurzeln  $w_k, \varphi_k, \psi_k$  können durch die Iteration einer Näherungslösung angeschrieben werden, wenn auch dabei langwierige, mühevollere Zahlenrechnungen nicht ausbleiben. Sie sind bei symmetrischen Rosten durch die Umordnung der Belastung (S. 186) wesentlich einfacher. In einzelnen Fällen ist außerdem die Verdrehung der Knoten um ausgezeichnete Achsen infolge der konstruktiven Ausgestaltung des Rostes Null. Die Vorteile der Lösung treten jedoch vor allem bei Trägerrostern mit mehr als zwei Trägerscharen in Erscheinung (Abb. 607), da dann zwar der Grad der statischen Unbestimmtheit zunimmt, dagegen die Anzahl der geometrisch unbekanntenen Komponenten  $w_k, \varphi_k, \psi_k$  unverändert  $3n$  bleibt.



▨ Biegemomente  
▤ Torsionsmomente  
in  $mt$  aus  $q=1t/m^2$

Abb. 603.

**Berechnung eines seitenparallelen, quadratischen Trägerrostes  $b$  für gleichmäßig verteilte Belastung  $q$  t/m<sup>2</sup>.**

Der Trägerrost Abb. 603 ist bei Lagerung der Trägerenden nach Abb. 591 b und drehsteifen Knoten 33fach statisch unbestimmt und 27fach geometrisch unbestimmt. Infolge der Symmetrie von Tragwerk und Belastung genügt ein Ansatz mit 3 statischen oder 5 geometrischen Größen, um den vollständigen Spannungszustand anzugeben. Daher wird der statische Ansatz gewählt.

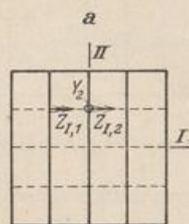
Als Überzählige dienen die Verbindungskräfte  $Y$  und die Verbindungsmomente  $Z_I, Z_{II}$ , deren Drehsinn nach Abb. 604a positiv ist. Infolge der Symmetrie des Tragwerks ist bei gleichmäßig verteilter Belastung

$$Y_1 = Y_3 = Y_9 = Y_7 = Y_5 = 0, \quad (Y_2 = -Y_6 = Y_8 = -Y_4) \equiv X_1,$$

$$(Z_{I,1} \uparrow Z_{II,1} = Z_{I,3} \uparrow Z_{II,3} = -Z_{I,9} \uparrow Z_{II,9} = -Z_{I,7} \uparrow Z_{II,7}) \equiv X_2,$$

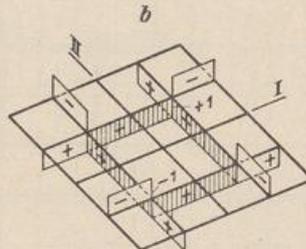
$$Z_{II,2} = Z_{I,6} = Z_{II,8} = Z_{I,4} = Z_{I,5} = Z_{II,5} = 0,$$

$$(Z_{I,2} = -Z_{II,6} = -Z_{I,8} = Z_{II,4}) \equiv X_3.$$



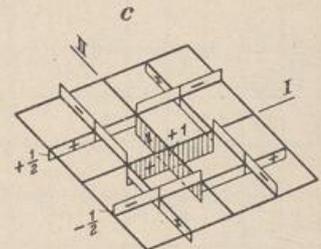
Überzählige  
Verbindungskräfte

Abb. 604.



$M_2$  infolge  $-X_2 = 1$

▨ Biegemomente



$M_3$  infolge  $-X_3 = 1$

□ Torsionsmomente

Das Trägheitsmoment ist hier für alle Träger gleich,

$$I' = l \frac{J_c}{J}, \quad I'' = \rho I', \quad \rho = \frac{E J_y}{G T}$$

und daher nach S. 629

$$\delta_{11} = \frac{32}{3} I' l^2, \quad \delta_{10} = -\frac{23}{6} I' l^3 p.$$

Mit Abb. 604 b, c wird:

$$\delta_{22} = 8 I' (1 + \rho), \quad \delta_{33} = 4 I' (1 + \rho), \quad \delta_{12} = -6 I I', \quad \delta_{13} = 4 I I', \quad \delta_{23} = 4 \rho I',$$

$$\delta_{20} = \frac{44}{3} p I^2 I', \quad \delta_{30} = \frac{22}{3} p I^2 I'.$$

Für Träger, deren Höhe etwa gleich der doppelten Breite ist, ergibt sich nach S. 20  $\rho \approx 3$  und nach Kürzung der Gleichungen mit  $\frac{l'}{3}$  die folgende Matrix.

$X_1$	$X_2$	$X_3$	
$32 l^2$	$-18 l$	$12 l$	$-11,5 p l^3$ ,
$-18 l$	$96$	$36$	$44 p l^2$ ,
$12 l$	$36$	$48$	$22 p l^2$ .

Mit  $l = 3,0 \text{ m}$  und  $q = 1 \text{ t/m}^2$ ;  $p = \frac{q \cdot l}{2} = 1,5 \text{ t/m}$  wird

$$X_1 = -1,523 \text{ t}, \quad X_2 = 3,591 \text{ mt}, \quad X_3 = 4,636 \text{ mt}.$$

Die Schnittkräfte ergeben sich durch Superposition; z. B.:

$$M_{yI,4}^{(4)} = \frac{3}{8} p l^2 - X_1 \cdot l = 24,8 \text{ mt}, \quad M_{yI,4}^{(5)} = \frac{3}{8} p l^2 - X_1 l - X_3 \cdot l = 20,2 \text{ mt},$$

$$M_{xII,4}^{(4)} = M_{xI,2}^{(2)} = -X_3 \cdot \frac{l}{2} = -2,3 \text{ mt}.$$

Die Biegungs- und Torsionsmomente sind in Abb. 603 eingetragen.

#### Berechnung eines seitenschiefen, quadratischen Trägerrostes $b$ für gleichmäßig verteilte Belastung $q \text{ t/m}^2$ .

Der Trägerrost Abb. 605 ist bei Lagerung der Trägerenden nach Abb. 591 b und drehsteifen Knoten 49fach statisch unbestimmt und 39fach geometrisch unbestimmt. Infolge der Symmetrie des Tragwerks genügen jedoch 5 statische oder 7 geometrische Größen zur eindeutigen Angabe des Spannungszustandes. Um auch die Anwendung des Ansatzes (908) zu zeigen, werden die geometrisch unbestimmten Größen  $w_1, w_2, w_4, w_7, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  berechnet und zu symmetrischen Gruppenbewegungen zusammengefaßt.

$$(w_1 = w_3 = w_{13} = w_{11}) \equiv W_1, \quad (\varphi_1 = \varphi_3 = -\varphi_{13} = -\varphi_{11}) \equiv \Phi_A,$$

$$(w_4 = w_5 = w_{10} = w_9) \equiv W_2, \quad (\varphi_4 = \varphi_5 = -\varphi_{10} = -\varphi_9) \equiv \Phi_B,$$

$$(w_2 = w_8 = w_{12} = w_6) \equiv W_3, \quad (\varphi_2 \hat{=} \varphi_2 = -\varphi_8 \hat{=} \varphi_8 = -\varphi_{12} \hat{=} \varphi_{12} = +\varphi_6 \hat{=} \varphi_6) \equiv \Phi_C,$$

$$(w_7) \equiv W_4, \quad \varphi_1 = \varphi_4 = \varphi_7 = \varphi_{10} = \varphi_{13} = \varphi_3 = \varphi_5 = \varphi_7 = \varphi_9 = \varphi_{11} = 0.$$

Die Vorzeichen der statischen Bedingungsgleichungen lassen sich nach Abb. 602 unmittelbar anschreiben. Mit

$$l = L \frac{\sqrt{2}}{6}, \quad l'_1 = l \frac{J_c}{J_1}, \quad l'_2 = l \frac{J_c}{J_2}, \quad l'_3 = l \frac{J_c}{J_3},$$

$$l''_1 = \rho_1 l'_1, \quad l''_2 = \rho_2 l'_2, \quad l''_3 = \rho_3 l'_3$$

ist z. B.

$$a_{11} = 4 \left[ -\frac{3}{l^2 l'_3} - 2 \frac{3}{l^2 l'_1} - \frac{12}{l^2 l'_3} \right] = -\frac{12}{l^2 l'_3} \left( 5 + 2 \frac{l'_3}{l'_1} \right),$$

$$a_{12} = 4 \frac{12}{l^2 l'_3} = \frac{48}{l^2 l'_3}, \quad a_{13} = 0, \quad a_{14} = 0,$$

$$a_{22} = 4 \left[ -2 \frac{12}{l^2 l'_3} - 2 \frac{12}{l^2 l'_2} \right] = -\frac{96}{l^2 l'_3} \left( 1 + \frac{l'_3}{l'_2} \right),$$

$$a_{AA} = 4 \left( -\frac{3}{l'_3} - \frac{4}{l'_3} - \frac{1}{l''_1} - \frac{1}{l''_1} \right) = -\frac{4}{l'_3} \left( 7 + 2 \frac{l'_3}{\rho_1 l'_1} \right),$$

$$a_{AB} = -4 \frac{2}{l'_3} = -\frac{8}{l'_3}, \quad a_{AC} = 0, \quad a_{BB} = 4 \left( -2 \frac{4}{l'_3} - \frac{2}{l''_2} \right) = -\frac{8}{l'_3} \left( 4 + \frac{l'_3}{\rho_2 l'_2} \right),$$

$$a_{A1} = 4 \left( -\frac{3}{l l'_3} + \frac{4}{l l'_3} + \frac{2}{l l'_3} \right) = \frac{12}{l l'_3}, \quad a_{A2} = -\frac{24}{l l'_3}, \quad a_{A3} = 0, \quad a_{A4} = 0,$$

$$a_{B1} = \frac{24}{l l'_3}, \quad a_{B2} = 0, \quad a_{B3} = 0, \quad a_{B4} = -\frac{24}{l l'_3}.$$



$$M_{y,12}^{(0)} = -\frac{p l^2}{8} + W_3 \frac{3}{l l'} + \Phi_c \frac{3}{l'} = 14,1 \text{ mt.}$$

$$M_{y,12}^{(2)} = +\frac{p l^2}{8} - W_3 \frac{6}{l l'} + W_2 \frac{6}{l l'} + \Phi_c \frac{4}{l'} = -10,3 \text{ mt.}$$

$$M_{x,12}^{(0)} = -\Phi_c \frac{1}{\varrho l'} = 4,1 \text{ mt.}, \quad M_{x,12}^{(2)} = \Phi_c \frac{1}{\varrho l'} - \Phi_B \frac{1}{\varrho l'} = 0,3 \text{ mt.}$$

Die Biegungs- und Torsionsmomente sind in Abb. 605 aufgetragen.

**Seitenschief, quadratischer Trägerrost nach Abb. 606 mit gleichmäßig verteilter Belastung  $q = 1 \text{ t/m}^2$ .**

Die Rechnung bietet nichts Neues. Die Biegemomente ohne Berücksichtigung des Drillungswiderstandes der Träger sind in Abb. 606a, mit Berücksichtigung desselben in Abb. 606b dargestellt (vgl. Fußnote S. 625).

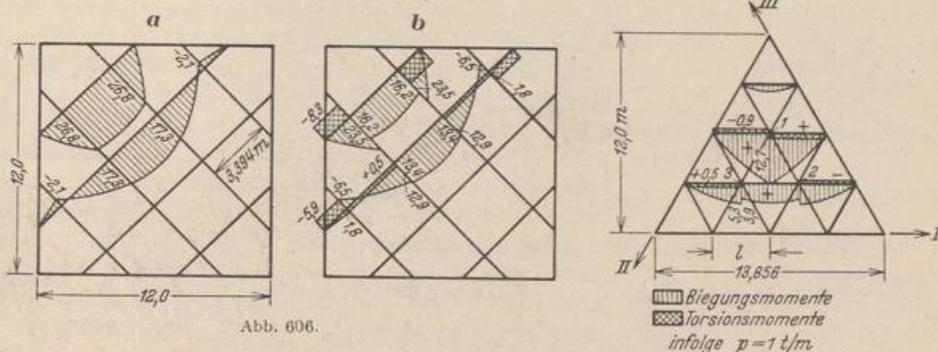


Abb. 606.

Abb. 607.

**Berechnung eines Trägerrostes mit drei Trägerscharen über einem gleichseitigen Dreieck.**

Der Trägerrost Abb. 607 mit Abstützung der Trägerenden nach Abb. 591 b und drehsteifer Verbindung der Trägerscharen I, II, III ist 21-fach statisch unbestimmt und 9-fach geometrisch unbestimmt. Wegen der Symmetrieeigenschaften genügt bei gleichmäßig verteilter Last  $q \text{ t/m}^2$  die Berechnung von 3 Verbindungskräften (Lösung a) oder 2 Komponenten des Verschiebungszustandes (Lösung b), um den vollständigen Spannungszustand angeben zu können.

Lösung a) Die lotrechten Verbindungskräfte  $U_1, U_2, U_3$  wirken an den Trägern Abb. 608a nach unten, an den Trägern Abb. 608b nach oben. Sie werden in der symmetrischen Gruppen-

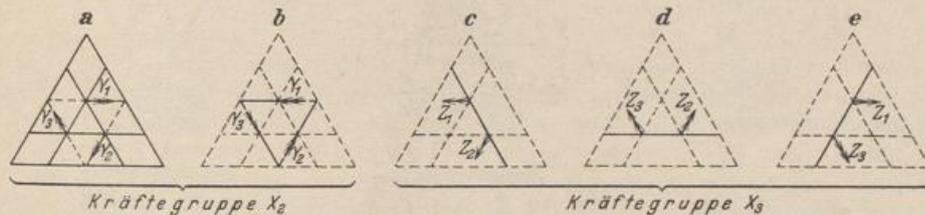


Abb. 608.

last  $X_1$  zusammengefaßt. Die zyklisch liegenden Verbindungsmomente  $Y_1, Y_2, Y_3$  zwischen den Trägern der Abb. 608a und Abb. 608b bilden die Gruppenlast  $X_2$ , die Verbindungsmomente  $Z_1, Z_2, Z_3$  zwischen den Trägern der Abb. 608c, d und e die Gruppenlast  $X_3$ .

Das Trägheitsmoment ist für alle Träger gleich.

$$l' = l \frac{J_c}{J_v}, \quad l'' = \varrho l', \quad \varrho = \frac{E J_v}{G T}.$$

Abb. 609: 
$$\delta_{11} = 3 \left[ 2 l' \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{l^2}{4} + 2 l' \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{l^2}{4} + 3 l' \cdot \frac{l^2}{4} \right] = \frac{7}{4} l^2 l',$$

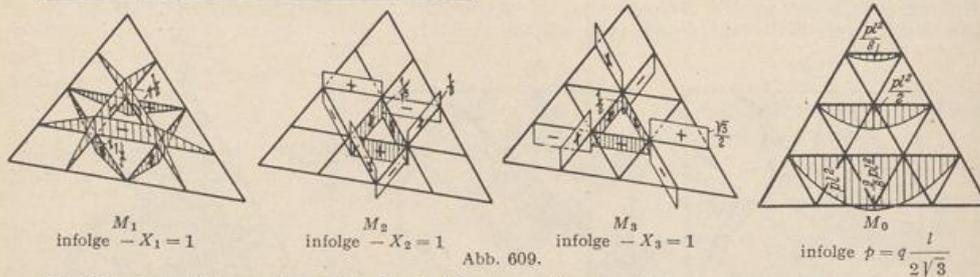
$$\delta_{22} = l' \left( 1 + \frac{3}{2} \varrho \right), \quad \delta_{33} = \frac{3}{4} l' (1 + 6 \varrho), \quad \delta_{12} = -\frac{\sqrt{3}}{2} l l'.$$

$$\delta_{13} = -\frac{3}{4} l l', \quad \delta_{23} = \frac{\sqrt{3}}{2} l';$$

$$\delta_{10} = -\frac{17}{8} p l' l^2, \quad \delta_{20} = \frac{13}{12} \sqrt{3} p l' l^2, \quad \delta_{30} = \frac{13}{8} p l' l^2.$$

Mit  $q = 3$ ,  $l = 3,464$  m entsteht die folgende Matrix.

$X_1$	$X_2$	$X_3$	$p l^3$	
72,7461	-10,3926	-9,0000	-7,3612	$X_1 = -3,8676 p t,$
-10,3926	19,0526	3,0000	1,8762	$X_2 = 1,8980 p mt,$
-9,0000	3,0000	49,3634	1,6250	$X_3 = 0,5479 p mt.$



Die Schnittkräfte ergeben sich durch Superposition; z. B.:

$$M_{yI,3}^{(3)} = p l^2 + X_1 \frac{l}{2} = 5,3 p mt, \quad M_{yI,3}^{(2)} = p l^2 + X_1 \frac{l}{2} - X_2 \frac{1}{\sqrt{3}} - X_3 \frac{1}{2} = 3,9 p mt,$$

$$M_{xI,3}^{(3)} = + X_3 \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,5 p mt, \quad M_{xII,3}^{(2)} = 0.$$

Die Biegungs- und Torsionsmomente sind in Abb. 607 dargestellt.

Lösung b) Als geometrisch überzählige Größen dienen die zyklischen Gruppenbewegungen (Abb. 610)

$$(w_1 = w_2 = w_3) \equiv W_1, \quad (\varphi_{I,1} = \varphi_{II,2} = \varphi_{III,3}) \equiv \Phi_A.$$

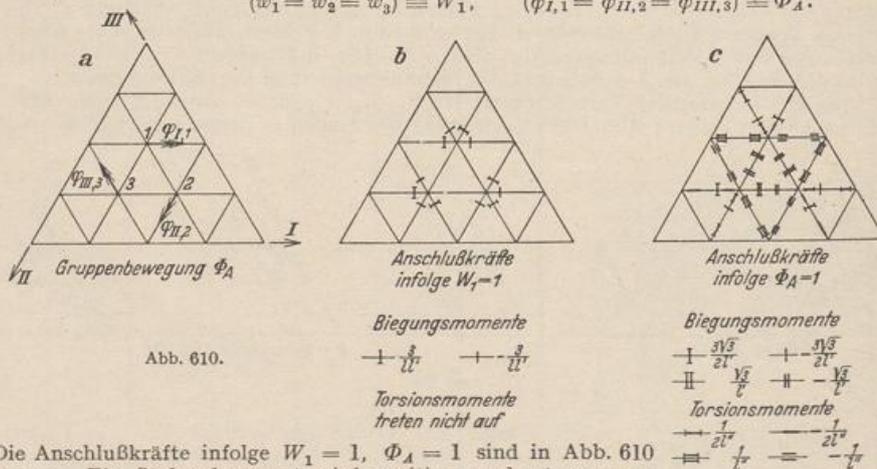


Abb. 610.

Die Anschlußkräfte infolge  $W_1 = 1$ ,  $\Phi_A = 1$  sind in Abb. 610 eingetragen. Ein Stabendmoment wird positiv gerechnet, wenn es bei Betrachtung von der zur Stabschar gehörenden Ecke des Rostes im Uhrzeigersinn dreht.

$$a_{AA} = -\frac{2}{l''} - \frac{2}{2l''} \cdot \frac{1}{2} - 2 \frac{3\sqrt{3}}{2l'} \frac{3}{2\sqrt{3}} - 2 \frac{\sqrt{3}}{l'} \frac{3}{2\sqrt{3}} = -\frac{5}{2l'} \left(3 + \frac{1}{\rho}\right),$$

$$\frac{a_{11}}{3} = -4 \cdot \frac{3}{l'l'} \cdot \frac{1}{l} = -\frac{12}{l^2 l'}, \quad \frac{a_{A1}}{3} = -2 \frac{3}{l'l'} \cdot \frac{3}{2\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{l'l'},$$

$$\frac{a_{A0}}{3} = 2 \frac{pl^2}{8} \cdot \frac{3}{2\sqrt{3}} - 2 \frac{pl^2}{12} \cdot \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{8\sqrt{3}} pl^2, \quad \frac{a_{10}}{3} = 4 \frac{pl^2}{8} \cdot \frac{1}{l} + 4 pl \cdot \frac{1}{2} + pl = \frac{7}{2} pl.$$

Mit  $\rho = 3$  und  $l' = l = 3,464$  entsteht folgende Matrix:

$\Phi_A$	$W_1$	$p$
-2,4056	-0,4330	0,8660
-0,4330	-0,2887	12,1244

$$\Phi_A = -9,8628 p,$$

$$W_1 = 56,7890 p.$$

Die Schnittkräfte ergeben sich nach (505) oder durch Superposition; z. B.

$$M_{v1,3}^{(2)} = \frac{p l^2}{12} + \frac{\sqrt{3}}{l} \Phi_A = -3,9 p \text{ mt.}$$

Die Momente sind in Abb. 607 dargestellt.

**Trägerrost mit freien Rändern.** Werden die Querträger von Brücken mit mehreren Hauptträgern nicht nur als Teile der Fahrbahntafel betrachtet, sondern in statischer Beziehung in derselben Weise bewertet wie die Hauptträger, so entsteht ebenfalls ein Trägerrost mit seitenparalleler Anordnung. Da jedoch nur die Hauptträger gestützt, dagegen die Enden der Querträger frei sind, besteht deren Aufgabe hier nur in der Verteilung der Belastung eines Hauptträgers auf mehrere von ihnen, jedoch nicht mehr in der Entlastung der Hauptträger. Diese sind entweder Balkenträger auf zwei und mehreren Stützen oder Rahmen. Die Knoten zwischen Haupt- und Querträger sind biegungs- und drehsteif, gelten aber zur Vereinfachung der Rechnung in der Regel nur als zug- und druckfest. Der Brückengrundriß ist stets zu einer, meist aber auch zu zwei Achsen symmetrisch, so daß nach Abschn. 27 und 28 mit zwei- oder vierfacher Umordnung der Belastung und mit statisch unbestimmten Gruppenlasten gerechnet werden kann.

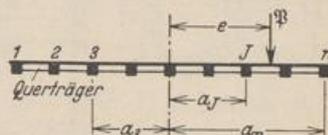


Abb. 611.

Die statische Untersuchung des Trägerrostes ist bei Annahme von sehr steifen Querträgern ( $E J_{II} = \infty$ ) statisch bestimmt, wenn nur die Knotenpunkte und die Querträger belastet sind. Die Achsen der Querträger bleiben dann bei der Formänderung des Rostes gerade Linien. Auf einen Träger  $J$  der  $n$  Hauptträger entfällt bei Belastung eines Querträgers durch die resultierende Einzellast  $P$  (Abb. 611) der Anteil

$$P_J = \frac{P}{n} + \frac{P e}{\sum_{k=1}^n a_k^2} a_J. \quad (909)$$

Diese Annahme ist aber um so weniger berechtigt, je weniger Hauptträger verwendet werden, um die wirtschaftlichen Vorteile einer kreuzweisen Bewehrung der Fahrbahnplatte auszunützen und Schalungskosten zu sparen. Daher genügt die Untersuchung der Trägerroste mit drei und vier Hauptträgern auf je zwei Stützen, die mit den Querträgern zug- und druckfest verbunden angenommen sind. Die Anschlußmomente der mittleren Hauptträger sind die statisch unbestimmten Schnittkräfte der Rechnung.

**Berechnung einer Balkenbrücke mit 3 Hauptträgern, Abb. 612.**

Geometrische Grundlagen.

$$l = 3,5, \quad s = 3,6 \text{ m}, \quad \kappa = \frac{s}{l} = 1,0286,$$

$$v_1 = \frac{J_1}{J_s} = 7,1111; \quad v_2 = \frac{J_1}{J_2} = 1,3846,$$

$$J_s = J_1.$$

Als statisch überzählige Schnittkräfte  $X_k$  dienen die Biegemomente des mittleren Trägers in den Knoten  $k = 1 \dots 5$ . Das Biegemoment  $X_3$  ist in Abb. 612 als Vektor eingetragen.

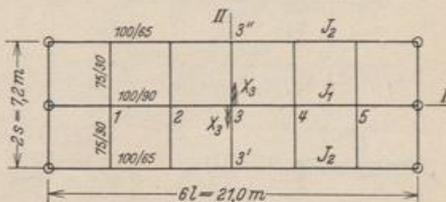


Abb. 612.