Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Zahlenbeispiele

Mit $\varrho = 3$ und $l' = l = 3{,}464$ entsteht folgende Matrix:

Φ_A	W_1	p
$-2{,}4056$	$-0{,}4330$	$0{,}8660$
$-0{,}4330$	$-0{,}2887$	$12{,}1244$

$$\Phi_A = -9{,}8628\,p\,,\qquad W_1 = 56{,}7890\,p\,.$$

Die Schnittkräfte ergeben sich nach (505) oder durch Superposition; z. B.

$$M^{(2)}_{yI,3} = \frac{p\,l^2}{12} + \frac{\sqrt{3}}{l}\,\Phi_A = -3{,}9\,p\ \text{mt}\,.$$

Die Momente sind in Abb. 607 dargestellt.

Trägerrost mit freien Rändern. Werden die Querträger von Brücken mit mehreren Hauptträgern nicht nur als Teile der Fahrbahntafel betrachtet, sondern in statischer Beziehung in derselben Weise bewertet wie die Hauptträger, so entsteht ebenfalls ein Trägerrost mit seitenparalleler Anordnung. Da jedoch nur die Hauptträger gestützt, dagegen die Enden der Querträger frei sind, besteht deren Aufgabe hier nur in der Verteilung der Belastung eines Hauptträgers auf mehrere von ihnen, jedoch nicht mehr in der Entlastung der Hauptträger. Diese sind entweder Balkenträger auf zwei und mehreren Stützen oder Rahmen. Die Knoten zwischen Haupt- und Querträger sind biegungs- und drehsteif, gelten aber zur Vereinfachung der Rechnung in der Regel nur als zug- und druckfest. Der Brückengrundriß ist stets zu einer, meist aber auch zu zwei Achsen symmetrisch, so daß nach Abschn. 27 und 28 mit zwei- oder vierfacher Umordnung der Belastung und mit statisch unbestimmten Gruppenlasten gerechnet werden kann.

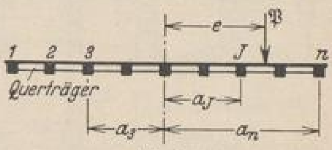


Abb. 611.

Die statische Untersuchung des Trägerrostes ist bei Annahme von sehr steifen Querträgern ($E J_{II} = \infty$) statisch bestimmt, wenn nur die Knotenpunkte und die Querträger belastet sind. Die Achsen der Querträger bleiben dann bei der Formänderung des Rostes gerade Linien. Auf einen Träger J der n Hauptträger entfällt bei Belastung eines Querträgers durch die resultierende Einzellast $\mathfrak{P}$ (Abb. 611) der Anteil

$$P_J = \frac{\mathfrak{P}}{n} + \frac{\mathfrak{P}\,e}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2}\,a_J\,. \tag{909}$$

Diese Annahme ist aber um so weniger berechtigt, je weniger Hauptträger verwendet werden, um die wirtschaftlichen Vorteile einer kreuzweisen Bewehrung der Fahrbahnplatte auszunützen und Schalungskosten zu sparen. Daher genügt die Untersuchung der Trägerroste mit drei und vier Hauptträgern auf je zwei Stützen, die mit den Querträgern zug- und druckfest verbunden angenommen sind. Die Anschlußmomente der mittleren Hauptträger sind die statisch unbestimmten Schnittkräfte der Rechnung.

Berechnung einer Balkenbrücke mit 3 Hauptträgern, Abb. 612.

Geometrische Grundlagen.

$$l = 3{,}5\,,\qquad s = 3{,}6\ \text{m}\,,\qquad \varkappa = \frac{s}{l} = 1{,}0286\,,$$

$$\nu_1 = \frac{J_1}{J_s} = 7{,}1111\,;\qquad \nu_2 = \frac{J_1}{J_2} = 1{,}3846\,,$$

$$J_c = J_1\,.$$

Als statisch überzählige Schnittkräfte X_k dienen die Biegungsmomente des mittleren Trägers in den Knoten $k = 1 \ldots 5$. Das Biegungsmoment X_3 ist in Abb. 612 als Vektor eingetragen.

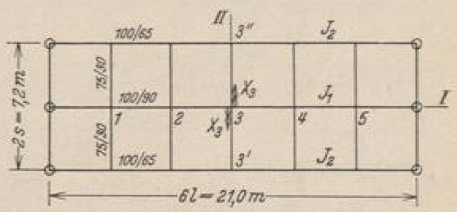
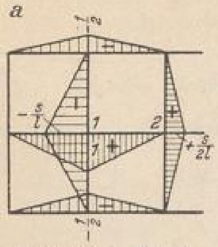


Abb. 612.

Vorzahlen (Abb. 613).

a



M_1 infolge $-X_1 = 1$

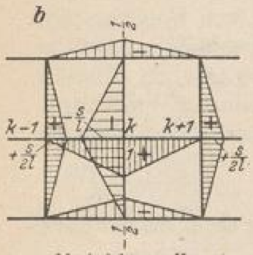
$$\delta_{11} = \frac{l}{3}\left(2 + \nu_2 + \frac{5}{2}\varkappa^3\nu_1\right) = 22{,}7304\,\frac{l}{3},$$

$$\delta_{kk} = \frac{l}{3}\,(2 + \nu_2 + 3\,\varkappa^3\nu_1) = 26{,}5995\,\frac{l}{3},$$

$$\delta_{k(k-1)} = \delta_{k(k+1)} = \frac{l}{6}\left(1 + \frac{\nu_2}{2} - 4\,\varkappa^3\nu_1\right) = -\,14{,}6304\,\frac{l}{3},$$

$$\delta_{k(k-2)} = \delta_{k(k+2)} = \frac{l}{6}\,\varkappa^3\nu_1 = 3{,}8692\,\frac{l}{3}.$$

b



M_k infolge $-X_k = 1$

Abb. 613.

δ Matrix nach Kürzung mit $l/3$.

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
22,7304	− 14,6304	3,8692		
− 14,6304	26,5995	− 14,6304	3,8696	
3,8692	− 14,6304	26,5995	− 14,6304	3,8692
	3,8692	− 14,6304	26,5995	− 14,6304
		3,8692	− 14,6304	22,7304

Konjugierte Matrix $\beta'_{hk} = \frac{l}{3}\,\beta_{hk}$.

	δ_{10}	δ_{20}	δ_{30}	δ_{40}	δ_{50}
X_1	0,072972	0,049733	0,017815	0,001388	− 0,002039
X_2	0,049733	0,090787	0,051121	0,015676	0,001388
X_3	0,017815	0,051121	0,088648	0,051121	0,017815
X_4	0,001388	0,015676	0,051121	0,090787	0,049733
X_5	− 0,002039	0,001388	0,017815	0,049733	0,072972

$$X_h = \sum \frac{3\,\beta'_{hk}}{l}\,\delta_{k0}.$$

Belastungszahlen für $P = 1$ t in Knoten 3 (Abb. 614).

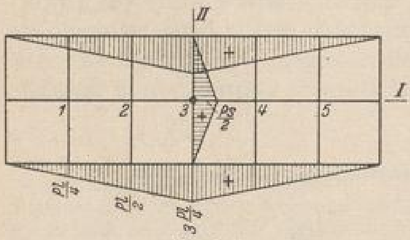


Abb. 614.

$$\delta_{10} = \delta_{50} = -\frac{l}{3}\,P\,l\cdot\frac{3}{4}\,\nu_2 = -\,3.6346\,\frac{l}{3},$$

$$\delta_{20} = \delta_{40} = -\frac{l}{3}\,\frac{P\,l}{2}\,(3\,\nu_2 - \varkappa^3\nu_1) = +\,6{,}2729\,\frac{l}{3},$$

$$\delta_{30} = -\frac{l}{3}\,P\,l\,(2\,\nu_2 + \varkappa^3\nu_1) = -\,36{,}7763\,\frac{l}{3},$$

$$X_1 = X_5 = -\,0{,}5923, \qquad X_2 = X_4 = -\,1{,}3980,$$
$$X_3 = -\,2{,}7483\ \text{mt}.$$

In der Mitte des Querträgers 3 wird das Biegungsmoment

$$M_{II,3} = \frac{P s}{2} + X_3\,\varkappa - X_2\,\frac{\varkappa}{2} - X_4\,\frac{\varkappa}{2} = 0{,}4111\ \text{mt}.$$

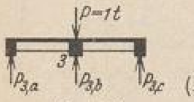


Abb. 615.

Damit ergeben sich die Lastanteile $P_{3,i}$ ($i = a, b, c$) für die Hauptträger (Abb. 615)

$$P_{3,a} = P_{3,c} = 0{,}114\ \text{t}, \qquad P_{3,b} = 0{,}772\ \text{t}$$

und das Biegungsmoment im mittleren Hauptträger

$$M_{I,3} = -X_3 = 2{,}748\ \text{mt}\,.$$

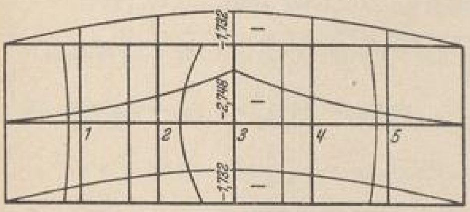
Für Querträger mit $J_s = J_1$, also $\nu_1 = 1$ ist

$$P_{3,a} = P_{3,c} = 0{,}243\ \text{t}\,,\qquad P_{3,b} = 0{,}514\ \text{t}\,,\qquad M_{I,3} = 2{,}586\ \text{mt}\,.$$

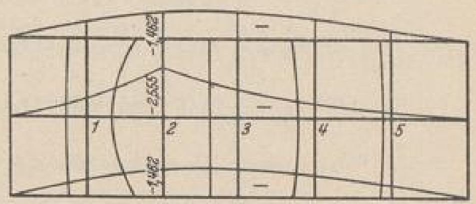
Bei der Annahme $J_{II} = \infty$ wird nach (909)

$$P_{3,a} = P_{3,b} = P_{3,c} = \frac{\mathfrak{P}}{3} = 0{,}333\ \text{t}\,,\qquad M_{I,3} = \frac{1}{3}\,\frac{6\,l}{4} = 1{,}750\ \text{mt}\,.$$

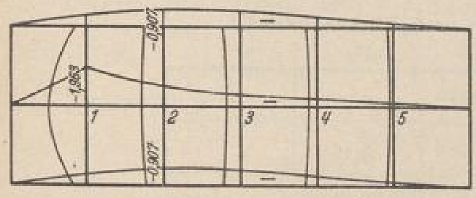
Nach diesem Ergebnis kann auch bei sehr starken Querträgern nicht mit einer gleichmäßigen Lastverteilung auf die 3 Hauptträger gerechnet werden.



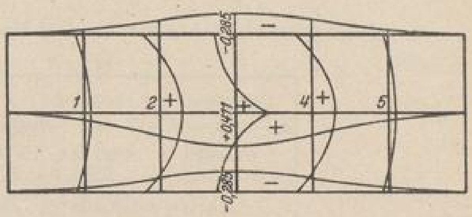
Einflußfläche X_3



Einflußfläche X_2

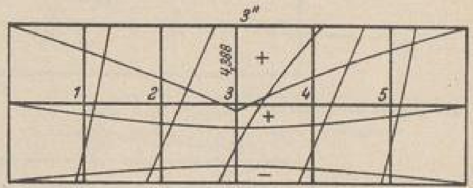


Einflußfläche X_1



Einflußfläche $M_{II,3}$ (4 fach verzerrt)

Einflußflächen. Wird der Reihe nach jeder Knoten mit $P = 1$ t belastet und die Größe einer Schnittkraft im Lastpunkt als Ordinate senkrecht zur Rostebene aufgetragen, so bilden die Endpunkte aller Ordinaten die Einflußfläche dieser Schnittkraft. Die Belastung der Randträger wird dabei in die zur Achse I symmetrischen und antimetrischen Anteile zerlegt. Für den antimetrischen Anteil sind die überzähligen Größen Null, die Schnittkräfte daher statisch bestimmt. Die Rechnung bietet keinerlei Schwierigkeiten. Die Einflußflächen von X_1, X_2, X_3, $M_{I,3''}$ und $M_{II,3}$ sind in Abb. 616 dargestellt.



Einflußfläche $M_{I,3''}$

Abb. 616.

Berechnung einer Balkenbrücke mit 4 Hauptträgern, Abb. 617.

Geometrische Grundlagen.

$$l = 35\ \text{m}\,,\qquad s = 3{,}6\ \text{m}\,,\qquad \varkappa = \frac{s}{l} = 1{,}0286\,,$$

$$\nu_1 = \frac{J_1}{J_s} = 1\,,\qquad \nu_2 = \frac{J_1}{J_2} = 1{,}3846\,,$$

$$J_c = J_1\,.$$

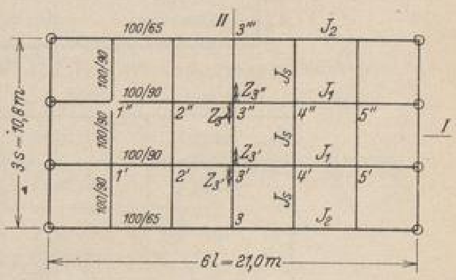
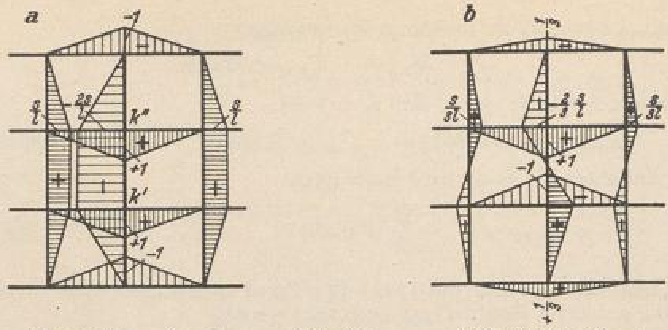


Abb. 617.

Aus den überzähligen Biegungsmomenten Z_k', Z_k'' der mittleren Hauptträger werden die symmetrischen und antimetrischen Gruppenlasten X_k, Y_k gebildet. Mit diesen ist

$$Z_{k''} = X_k + Y_k\,,\qquad Z_{k'} = X_k - Y_k\,,\qquad k = 1\ldots 5\,.$$

Vorzahlen (Abb. 618).



$^{(1)}M_k$ infolge $-X_k = 1$ Abb. 618. $^{(2)}M_k$ infolge $-Y_k = 1$

$$^{(1)}\delta_{11} = \frac{l}{3}\left[4(1+\nu_2) + 25\,\varkappa^3\nu_1\right], \qquad ^{(2)}\delta_{11} = \frac{l}{3}\left[\frac{4}{9}(9+\nu_2) + \frac{5}{3}\varkappa^3\nu_1\right],$$

$$^{(1)}\delta_{kk} = \frac{l}{3}\left[4(1+\nu_2) + 30\,\varkappa^3\nu_1\right], \qquad ^{(2)}\delta_{kk} = \frac{l}{3}\left[\frac{4}{9}(9+\nu_2) + 2\,\varkappa^3\nu_1\right].$$

$$^{(1)}\delta_{k(k-1)} = \frac{l}{3}\left[(1+\nu_2) - 20\,\varkappa^3\nu_1\right], \qquad ^{(2)}\delta_{k(k-1)} = \frac{l}{3}\left[\frac{1}{9}(9+\nu_2) - \frac{4}{3}\varkappa^3\nu_1\right],$$

$$^{(1)}\delta_{k(k-2)} = \frac{l}{3}\,5\,\varkappa^3\nu_1. \qquad ^{(2)}\delta_{k(k-2)} = \frac{l}{3}\,\frac{\varkappa^3\nu_1}{3}.$$

a) Symmetrischer Anteil X_k. $^{(1)}\delta$ Matrix nach Kürzung mit $l/3$.

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
36,7434	− 16,9948	5,4410		
− 16,9948	42,1844	− 16,9948	5,4410	
5,4410	− 16,9948	42,1844	− 16,9948	5,4410
	5,4410	− 16,9948	42,1844	− 16,9948
		5,4410	− 16,9948	36,7434

Konjugierte Matrix $^{(1)}\beta'_{hk} = \frac{l}{3}\,{}^{(1)}\beta_{hk}$

	δ_{10}	δ_{20}	δ_{30}	δ_{40}	δ_{50}
X_1	0,033623	0,014069	0,000676	− 0,001944	− 0,001000
X_2	0,014069	0,034300	0,012125	− 0,000323	− 0,001944
X_3	0,000676	0,012125	0,033300	0,012125	0,000676
X_4	− 0,001944	− 0,000323	0,012125	0,034300	0,014069
X_5	− 0,001000	− 0,001944	0,000676	0,014069	0,033623

b) Antimetrischer Anteil Y_k. $^{(2)}\delta$ Matrix nach Kürzung mit $l/3$.

Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
6,4291	−0,2971	0,3627		
−0,2971	6,7918	−0,2971	0,3627	
0,3727	−0,2971	6,7918	−0,2971	0,3627
	0,3627	−0,2971	6,7918	−0,2971
		0,3627	−0,2971	6,4291

Konjugierte Matrix ${}^{(2)}\beta'_{h k} = \frac{l}{3}\,{}^{(2)}\beta_{h k}$.

	δ_{10}	δ_{20}	δ_{30}	δ_{40}	δ_{50}
Y_1	0,15630	0,00652	−0,00812	−0,00069	−0,00043
Y_2	0,00652	0,14810	0,00584	−0,00769	−0,00069
Y_3	−0,00812	0,00584	0,14861	0,00584	−0,00812
Y_4	−0,00069	−0,00769	0,00584	0,14810	0,00652
Y_5	+0,00043	−0,00069	−0,00812	0,00652	0,15630

Belastung $P = 1$ t in $3''$. Für den symmetrischen Anteil $P/2$ auf $3'$ und $3''$ wird (Abb. 618a)

$$ {}^{(1)}\delta_{10} = {}^{(1)}\delta_{50} = -\frac{l}{3} P l \frac{3}{2} v_2 = -7{,}2692 \frac{l}{3}, \quad {}^{(1)}\delta_{20} = {}^{(1)}\delta_{40} = -\frac{l}{3} P l \frac{1}{2}(6 v_2 - 5 \varkappa^3 v_1) = -5{,}0166 \frac{l}{3}, $$

$$ {}^{(1)}\delta_{30} = -\frac{l}{3} P l (4 v_2 + 5 \varkappa^3 v_1) = -38{,}4279 \frac{l}{3}. $$

$$ X_1 = X_5 = -0{,}3239, \qquad X_2 = X_4 = -0{,}7295, \qquad X_3 = -1{,}4112. $$

Für den antimetrischen Anteil $+P/2$ auf $3''$, $-P/2$ auf $3'$ wird (Abb. 618b)

$$ {}^{(2)}\delta_{10} = {}^{(2)}\delta_{50} = -\frac{l}{3} P l \frac{1}{6} v_2 = -0{,}8077 \frac{l}{3}, \quad {}^{(2)}\delta_{20} = {}^{(2)}\delta_{40} = -\frac{l}{3} P l \frac{1}{6}(2 v_2 - \varkappa^3 v_1) = -0{,}9806 \frac{l}{3}, $$

$$ {}^{(2)}\delta_{30} = -\frac{l}{3} P l \frac{1}{9}(4 v_2 + 3 \varkappa^3 v_1) = -3{,}4235 \frac{l}{3}. $$

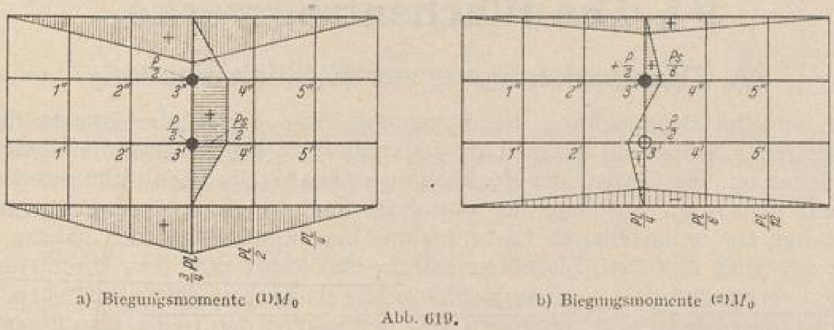
$$ Y_1 = Y_5 = -0{,}1045, \qquad Y_2 = Y_4 = -0{,}1625, \qquad Y_3 = -0{,}5071; $$

$$ Z_{3''} = -1{,}4112 - 0{,}5071 = -1{,}9183 \text{ mt}. $$

Die Biegungsmomente in Querträger 3 werden

$$ M_{II,3''} = \frac{s}{2} + 2\varkappa(X_3 - X_2) + \frac{s}{6} + \frac{2}{3}\varkappa(Y_3 - Y_2) = 0{,}7510 \text{ mt}, $$

$$ M_{II,3'} = \frac{s}{2} + 2\varkappa(X_3 - X_2) - \frac{s}{6} - \frac{2}{3}\varkappa(Y_3 - Y_2) = 0{,}0236 \text{ mt}. $$



a) Biegungsmomente ${}^{(1)}M_0$ b) Biegungsmomente ${}^{(2)}M_0$

Abb. 619.

Damit ergeben sich die Lastanteile $P_{3,i}$ ($i = a \div d$) für die Hauptträger (Abb. 619a).

$P_{3,a} = 0{,}209$ t, $P_{3,b} = 0{,}589$ t, $P_{3,c} = 0{,}195$ t, $P_{3,d} = 0{,}0065$ t;

$$ M_{I,3''} = -Z_{3''} = 1{,}918 \text{ mt}, $$
$$ M_{I,3'''} = 1{,}579 \text{ mt}. $$

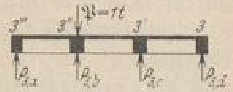


Abb. 619a.

Bei der Annahme $J_{II} = \infty$ wird nach (909)

$$ P_{3,a} = 0{,}40 \text{ t}, \qquad P_{3,b} = 0{,}30 \text{ t}, \qquad P_{3,c} = 0{,}20 \text{ t}, \qquad P_{3,d} = 0{,}10 \text{ t}. $$

$$ M_{I,3''} = \frac{0{,}3 \cdot 6 l}{4} = 1{,}58 \text{ mt}, \qquad M_{I,3'''} = \frac{0{,}4 \cdot 6 l}{4} = 2{,}10 \text{ mt}. $$

Belastung $P = 1$ t in $3'''$. Das Ergebnis ist:

$$P_{3,a} = 0{,}844\ \mathrm{t}, \quad P_{3,b} = 0{,}250\ \mathrm{t}, \quad P_{3,c} = -0{,}031\ \mathrm{t}, \quad P_{3,d} = -0{,}063\ \mathrm{t}.$$

Das Biegungsmoment im Randträger wird

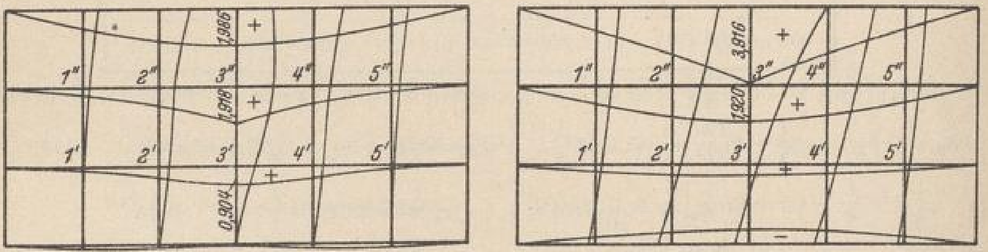
$$M_{I,3'''} = 3{,}916\ \mathrm{mt}.$$

Bei der Annahme $J_{II} = \infty$ wird nach (909)

$$P_{3,a} = 0{,}70\ \mathrm{t}, \quad P_{3,b} = 0{,}40\ \mathrm{t}, \quad P_{3,c} = 0{,}10\ \mathrm{t}, \quad P_{3,d} = -0{,}26\ \mathrm{t},$$

$$M_{I,3'''} = 3{,}68\ \mathrm{mt}.$$

Einflußflächen. Entwicklung nach S. 639 (Abb. 620).



Einflußfläche $M_{I,3''}$ Einflußfläche $M_{I,3'''}$

Abb. 620.

Zschetzsche: Theorie lastverteilender Querverbindungen. Z. öst. Ing.- u. Arch.-Ver. 1893. — Bleich: Theorie und Berechnung eiserner Brücken. Berlin 1924. — Petermann: Überlastverteilende Wirkung durchgehender Querverbindungen. Bautechn. 1925. — Schilling, W.: Statik der Bodenkonstruktionen der Schiffe. Berlin 1925. — Faltus, F.: Lastverteilende Querverbindungen. Bauing. 1927 S. 853. — Genthner, R.: Der Eisenbetonträgerrost. Beton u. Eisen 1928 S. 411. — Marcus, H.: Die weitgespannten Decken des Sportgebäudes im Stadion Breslau-Leerbeutel. Beton u. Eisen 1929 S. 73. — Szegö, St.: Kreuzweise gespannte Balkenkonstruktionen. Zement 1930 S. 34. — Derselbe: Über die Berechnung quadratischer Kreuzeckroste. Zement 1930 Heft 38 bis 42. — Marcus, H.: Die Theorie der Rautendecke. Bauing. 1932 S. 303. — Szegö, St.: Die Kreuzeckrostbauweise. Beton u. Eisen 1932 S. 122. — Derselbe: Anwendung der Kreuzeckrostbauweise auf Hofkellerdecken. Zement 1932 S. 676.

VI. Die Flächentragwerke.

66. Die Beziehungen zur Elastizitätstheorie.

Die einfache Beherrschung des Spannungs- und Verschiebungszustandes der biegungssteifen Stäbe und Träger hat wesentlich dazu beigetragen, die Überbauten der Brücken und die Gerüste der Hochbauten als Stab- oder Fachwerke auszubilden. Während jedoch im Stahlbau die Formänderung des Haupttragwerks von den sekundären, zur unmittelbaren Lastaufnahme bestimmten Bauteilen nahezu unabhängig ist, sind diese im Eisenbetonbau in der Regel mit dem Haupttragwerk homogen verbunden, so daß zusammenhängende elastische Gebilde entstehen, deren Verschiebungszustand sich wesentlich von demjenigen des freien Haupttragwerks unterscheidet. Auf diese Weise sind in der jüngsten Vergangenheit, begünstigt durch den Fortschritt der theoretischen und physikalischen Erkenntnis, auch Flächentragwerke entwickelt worden. Die Trägerroste wurden zu Platten und Pilzdecken, die ebenen Stab- und Fachwerke zu Scheiben, die Rippenkuppeln und Flechtwerke zu Schalen.

Der Festigkeitsnachweis dieser elastischen Gebilde ist seit Jahrzehnten durch wissenschaftliche Arbeiten über Elastizitätstheorie vorbereitet worden, so daß sich die Baustatik auf zahlreiche bekannte Ergebnisse zu stützen vermag. Trotzdem bereitet der Festigkeitsnachweis für die Flächentragwerke des Bauwesens oft noch