



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

A. Die Platten

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

A. Die Platten.

67. Annahmen und Grundlagen für die Berechnung.

Die Platten sind ebene Baukörper, die durch zwei zu einer Mittelebene parallele Ebenen und eine dazu senkrechte Zylinderfläche von beliebiger Leitkurve begrenzt sind. Die Belastung wirkt stets im Sinne der Flächennormalen z . Der Plattenrand ist frei drehbar gelagert, eingespannt oder auch in einzelnen Punkten gestützt. Die untere Laibungsebene ist kräftefrei oder durch Träger und Pfosten in einzelnen geraden Linien, Punkten oder Flächen gestützt. Auf diese Weise entstehen die durchlaufenden Platten, die Rippen- und Pilzdecken. Die Untersuchung kann für die Bedürfnisse des Bauwesens auf Platten beschränkt werden, deren Baustoff durch die Art der Herstellung und konstruktiven Ausbildung als homogen, isotrop und innerhalb der Gebrauchsbelastung als vollkommen elastisch gilt und deren Dicke gegenüber den anderen Abmessungen zurücktritt. Die Änderung der Plattendicke ist von höherer Ordnung klein im Vergleich zu der senkrechten Verschiebung $w(x, y, z)$ eines beliebigen Punktes, so daß

$$w(x, y, z) = w(x, y) + \int_0^z \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial z} dz \rightarrow w(x, y) = w \quad (914)$$

und damit der senkrechte Formänderungszustand der Platte durch die senkrechten Verschiebungen w der Mittelfläche beschrieben ist. Da sich die Platte unter der Belastung p im Vergleich zur Dicke h nur um kleine Wege ausbiegen soll, sind die waagerechten Verschiebungen der Punkte der Mittelfläche Null und die waagerechten Verschiebungen der Punkte im Abstand z von der Mittelebene, abgesehen von kleinen Beträgen höherer Ordnung, lineare Funktionen von z , so daß die Punkte einer Flächennormalen auch nach der Formänderung auf einer Normalen zur elastisch verbogenen Mittelfläche liegen. Daher ist bei Verwendung von kartesischen Koordinaten x, y nach Abb. 621

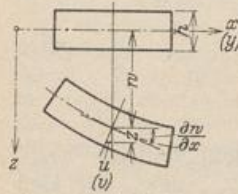


Abb. 621.

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (915)$$

Die Spannung σ_z ist an der unteren kräftefreien Plattenlaibung Null, an der oberen gleich der Belastungsintensität p , also abgesehen von Punktlasten, deren Untersuchung hier ausgeschlossen sein soll, stets sehr klein im Vergleich zu σ_x, σ_y . Sie kann daher in den allgemeinen Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen mit $\sigma_z = 0$ vernachlässigt werden. Diese Annahmen begründen die folgenden Beziehungen der Plattenstatik.

1. Verträglichkeitsbedingungen nach (26)

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (916)$$

2. Elastizitätsgesetz nach (27) für

$$\left. \begin{aligned} (1 + \mu) \frac{\sigma_z}{E} = 0 = \varepsilon_z + \frac{\mu}{1 - 2\mu} e, \quad \varepsilon_z = -\frac{\mu}{1 - \mu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y), \quad \frac{\mu}{1 - 2\mu} e = \frac{\mu}{1 - \mu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y); \\ \sigma_x = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1 - \mu^2} (\mu \varepsilon_x + \varepsilon_y), \quad \tau_{xy} = G \gamma_{xy} = -\frac{E}{1 - \mu^2} z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (1 - \mu). \end{aligned} \right\} \quad (917)$$

und in Verbindung mit den Verträglichkeitsbedingungen (916)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x = -\frac{Ez}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad \sigma_y = -\frac{Ez}{1 - \mu^2} \left(\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ \tau_{xy} = -\frac{Ez}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (1 - \mu) \end{aligned} \right\} \quad (918)$$

Diese mit z linear veränderlichen Spannungen in der Flächennormalen lassen sich zu Schnittkräften in Querschnitten von der Breite 1 zusammenfassen. Sie betragen

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x dF = 0, & N_y &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y dF = 0, & Q_{xy} &= \int_{-h/2}^{-h/2} \tau_{xy} dF = 0, \\ M_x &= \int \sigma_x z dF, & M_y &= \int \sigma_y z dF, & M_{xy} &= \int \tau_{xy} z dF, \\ M_x &= -\frac{E h^3}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), & M_y &= -\frac{E h^3}{12(1-\mu^2)} \left(\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_{xy} &= -\frac{E h^3}{12(1-\mu^2)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (1-\mu). \end{aligned} \right\} \quad (919)$$

M_x, M_y sind Biegemomente, M_{xy}, M_{yx} Drillungsmomente. $\frac{E h^3}{12(1-\mu^2)} = N$ ist eine für Plattenquerschnitt und Plattenwerkstoff charakteristische Größe und heißt Plattenkonstante.

3. Transformation der Schnittkräfte eines differentialen Prismas $dx \cdot dy$ auf einen Schrägschnitt ds im Winkel $\hat{x}\hat{n} = \psi$ mit $ds = dx/\sin \psi = dy/\cos \psi$ (Abb. 622). Die Gleichgewichtsbedingungen liefern

$$\left. \begin{aligned} Q_n ds &= Q_{yx} dy + Q_{xz} dx, \\ M_n ds - (M_x dy + M_{yx} dx) \cos \psi - (M_y dx + M_{xy} dy) \sin \psi &= 0, \\ M_s ds - (M_x dy + M_{yx} dx) \sin \psi + (M_y dx + M_{xy} dy) \cos \psi &= 0; \\ M_n &= M_x \cos^2 \psi + M_y \sin^2 \psi + M_{xy} \sin 2\psi, \\ M_s &= M_x \sin^2 \psi + M_y \cos^2 \psi - M_{xy} \sin 2\psi, \\ M_{ns} &= -(M_y - M_x) \frac{\sin 2\psi}{2} - M_{xy} \cos 2\psi. \end{aligned} \right\} \quad (920)$$

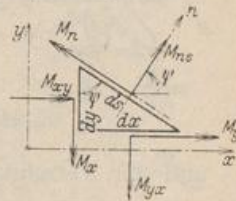


Abb. 622.

Daher bilden die Schrägschnitte I, II mit $M_{I,II} = M_{II,I} = 0$ und den Hauptbiegemomenten M_I, M_{II} den Winkel $\psi = \psi_0$.

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 2\psi_0 &= \frac{2 M_{xy}}{M_x - M_y}, \\ M_{I,II} &= \frac{1}{2} (M_x + M_y) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(M_x - M_y)^2 + 4 M_{xy}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (921)$$

In derselben Weise lassen sich in jedem Punkte der Platte auch die Richtungen I', II' mit $\psi'_0 = \psi_0 \pm 45^\circ$ der beiden Hauptdrillungsmomente $M_{I',II'}$ angeben, in denen die Biegemomente Null sind.

$$M_{I',II'} = \pm \sqrt{(M_x - M_y)^2 + 4 M_{xy}^2}. \quad (922)$$

Richtung und Größe der Hauptbiegungs- und Hauptdrillungsmomente können für jeden Punkt der Mittelebene auch nach den bekannten graphischen Methoden Mohrs festgestellt werden. Die Richtungen I, II bestimmen die Lage der Stahlbewehrung. Bei orthogonaler Bewehrung f_x, f_y sind die vergrößerten Beträge $(M_x \pm M_{yx})$ und $(M_y \pm M_{xy})$ maßgebend.

Die Summe der Biegemomente $(M_n + M_s)$ ist von der Richtung ψ unabhängig. Sie ist wie bei jeder Tensortransformation invariant.

$$M_x + M_y = M_n + M_s = M_I + M_{II}.$$

Dasselbe gilt daher auch für

$$M = \frac{M_x + M_y}{1 + \mu} = -N \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -N \Delta w. \quad (923)$$

M wird als Momentensumme bezeichnet und ist eine skalare Funktion in x und y . Die Bezeichnung Δ ist eine in der Mathematik gebräuchliche Abkürzung der Differentialoperation

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (924)$$

4. Die Gleichgewichtsbedingungen. a) Gleichgewicht der äußeren Kräfte des differentialen Prismas (Abb. 623) bei einer Drehung um die beiden Kanten dx , dy :

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_{yz} = 0; \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_{xz} = 0, \quad (925)$$

und mit (919) daher

$$Q_{yz} = -N \frac{\partial}{\partial y} \Delta w, \quad Q_{xz} = -N \frac{\partial}{\partial x} \Delta w. \quad (926)$$

Da außerdem nach (910) $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ist, wird nach (919) auch $M_{xy} = M_{yx}$.

b) Gleichgewicht der äußeren Kräfte des differentialen Prismas bei einer Verschiebung in der z -Richtung.

$$\frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} + p = 0. \quad (927)$$

Die Bedingung liefert in Verbindung mit (925) die folgende Differentialbeziehung zwischen der Belastung und den Spannungsmomenten

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + p = 0 \quad (928)$$

und bei Verwendung von (926) und (924) die Differentialbeziehung zwischen der Belastung p und der Verschiebung w , der Ordinate der elastischen Fläche der Platte

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{N}. \quad (929)$$

Sie läßt sich in Verbindung mit (924) auch folgendermaßen anschreiben:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w = \Delta \Delta w = \frac{p}{N}. \quad (930)$$

Diese Differentialgleichung 4. Ordnung kann nach H. Marcus mit (923) auch in zwei Differentialgleichungen 2. Ordnung zerlegt werden, die sich in der Reihenfolge

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = -p, \quad (931) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{M}{N} = -w \quad (932)$$

lösen lassen, wenn die Bedingungen für die Momentensumme M am Rande der Platte bekannt sind. Beide Gleichungen bilden den analytischen Ausdruck für eine mit der Kraft 1 gespannte Membran, deren Ordinaten bei der Belastung p durch M und bei der Belastung w mit w bezeichnet werden. Die Zerlegung der Differentialgleichung führt daher, wie H. Marcus zuerst bemerkt hat, zu einer Erweiterung der bekannten Ansätze für die Momentenlinie (90) und die Biegelinie (195) des biegesteifen Stabes. Da nun später nachgewiesen wird, daß w und M am Rande der frei drehbar aufgelagerten Platte mit polygonaler Begrenzung Null sind, besitzen hier die beiden Flächen als Membran über der Randkurve mit der vorgeschriebenen Spannung 1 und dem Druck p oder w konkrete Bedeutung.

Dieselben Betrachtungen gelten auch für Polarkoordinaten. Das Ergebnis kann entweder durch Koordinatentransformation gewonnen oder unmittelbar an

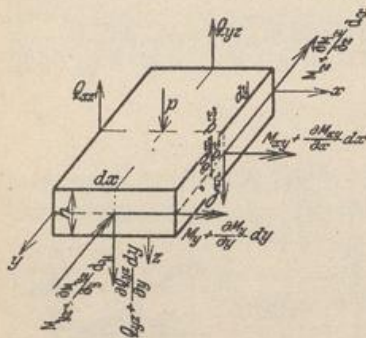


Abb. 623.

einem differentialen Abschnitt (Abb. 624) abgeleitet werden. Das Biegemoment in einem Schnitt $r = \text{const}$ ist M_r , das Biegemoment in einem Schnitt $\alpha = \text{const}$ heißt M_α . Die Drillungsmomente führen die Bezeichnung $M_{r\alpha}, M_{\alpha r}$.

$$\begin{aligned} M_r &= -N \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right) \right], \\ M_\alpha &= -N \left[\mu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right], \\ M_{r\alpha} = M_{\alpha r} &= -N(1-\mu) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \alpha} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) = -N(1-\mu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right). \end{aligned} \quad (933)$$

Die Summe der Biegemomente ($M_r + M_\alpha$) ist wiederum von der Lage der Bezugsachse unabhängig. Dasselbe gilt daher auch von der Momentensumme M .

$$\begin{aligned} M &= \frac{M_r + M_\alpha}{1 + \mu} = -N \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right) = -N \Delta w, \\ Q_{rz} &= -N \frac{\partial}{\partial r} \Delta w, \quad Q_{\alpha z} = -N \frac{\partial}{\partial \alpha} \Delta w. \end{aligned} \quad (934)$$

Die Differentialbeziehung zwischen Belastung p und Ausbiegung w lautet jetzt

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \alpha^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \alpha^2} \right) w = \Delta \Delta w = \frac{p}{N}. \quad (935)$$

Sie kann auch hier wieder mit (934) in zwei Gleichungen 2. Ordnung zerlegt werden.

$$\Delta M = \frac{\partial^2 M}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial M}{\partial r} + \frac{\partial^2 M}{r^2 \partial \alpha^2} = -p, \quad (936)$$

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} = -\frac{M}{N}. \quad (937)$$

Die Berechnung des Spannungs- und Formänderungszustandes einer Platte für eine vorgeschriebene Belastung $p(x, y)$ oder $p(r, \alpha)$ besteht also darin, diejenige Funktion w in x, y oder r, α zu finden, welche die Differentialgleichung (930) oder (935), außerdem aber noch am Rande die von der Stützung der Platte vorgeschriebenen statischen und geometrischen Bedingungen erfüllt. Diese Lösung ist nach Abschn. 8 eindeutig. Dagegen sind unendlich viele Lösungen w vorhanden, welche die Differentialgleichung (930) oder (935) allein befriedigen. Der Plattenrand gilt entweder als frei drehbar aufgelagert, starr-eingespannt oder als kräftefrei.

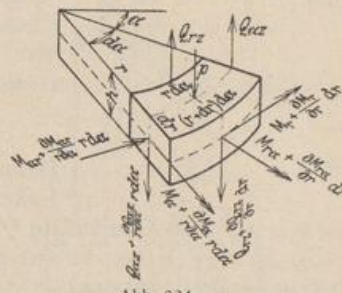


Abb. 624.

Die statischen und geometrischen Bedingungen der Stützung. a) Frei drehbare, starre Auflagerung der Platte in einer Geraden $x = \text{const}$. Geometrische Bedingungen:

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,$$

statische Bedingungen:

$$-\frac{M_r}{N} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad (938)$$

daher auch

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad M_y = 0, \quad \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{und} \quad M = 0.$$

Da also am Rande der frei drehbar aufgelagerten Platte $w = 0$ und $M = 0$ sein muß, kann die Lösung M aus (931) unabhängig von w angegeben und darauf zur Berechnung von w in (932) verwendet werden. Die Stützung wird daher in Überein-

stimmung mit der Untersuchung für den biegeungssteifen Stab als statisch bestimmt bezeichnet, obwohl die Schnittkräfte selbst erst durch die Funktion w bekannt sind.

Die an dem freien Rande vorhandenen Drillungsmomente M_{xy} werden nach dem Vorschlag von Thompson und Tait im Sinne der Abb. 625 durch eine stetige Verteilung von Kräftepaaren ersetzt. Der Spannungszustand wird auf diese Weise nach dem St. Venantschen Prinzip nur in einem eng begrenzten Bereich geändert. Die Kräftepaare ergänzen die Querkräfte am Rande und stehen gemeinsam mit diesen und dem Stützendruck A_x oder A_y im Gleichgewicht. Die Bedingung läßt sich am einfachsten ableiten, wenn die Platte an einem Randträger abgestützt angenommen wird (Abb. 626).

$$Q_{xz} dy + \int_y^{y+dy} \left[\left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy \right) \frac{1}{dy} - \frac{M_{xy}}{dy} \right] dy + A_x dy = 0, \quad (939)$$

$$\left. \begin{aligned} A_x &= - \left(Q_{xz} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) = N \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right), \\ A_y &= - \left(Q_{yz} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} \right) = N \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (940)$$

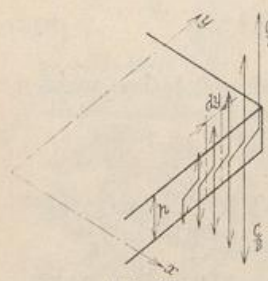


Abb. 625.

Die Substitution der Randdrillungsmomente liefert an den Ecken einer frei aufliegenden rechteckigen Platte aufwärtsgerichtete Einzelkräfte, deren Betrag gleich dem doppelten Drillungsmoment an der Ecke ist.

$$-C = 2 M_{xy} = 2 M_{yx}. \quad (941)$$

Daher ist die Verankerung der Ecken frei aufliegender Platten

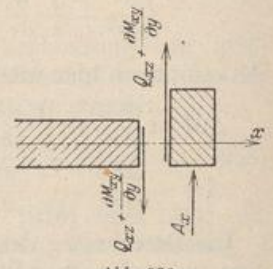


Abb. 626.

notwendig. Die Querkräfte Q_{xz} und Q_{yz} sind an den Ecken Null.

b) Starre Einspannung der Platte in einer Geraden $x = \text{const.}$ Geometrische Bedingungen:

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0.$$

Außerdem sind

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (942)$$

so daß am Rande starr eingespannter Platten keine Drillungsmomente auftreten.

c) Kräftefreie Begrenzung der Platte in einer Geraden $x = \text{const.}$ Statische Bedingungen:

$$-\frac{M_x}{N} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad -\frac{A_x}{N} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0. \quad (943)$$

d) Kräftefreie Ecke der Platte: Außer den statischen Bedingungen für den Rand $x = \text{const}$ mit $M_x = 0$ und $A_x = 0$ und für den Rand $y = \text{const}$ mit $M_y = 0$ und $A_y = 0$ muß die Kraft $C = 0$, also

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad (944)$$

sein.

Die Beschreibung des Verschiebungszustandes einer Platte für eine vorgeschriebene Belastung und vorgeschriebene Randbedingungen ist nach Ableitung der Differentialbeziehungen zwischen der Ausbiegung w und der Belastung ϕ nur noch eine mathematische Aufgabe, deren unmittelbare Lösung allerdings nur in einzelnen

Fällen gelingt. Mit der Funktion $w(x, y)$ sind auch ihre Ableitungen und damit die Schnittkräfte in jedem Punkte der Platte bekannt.

Lévy, M.: C. R. Acad. Sci., Paris Bd. 129 (1899) S. 535. — Estanave, E.: Contribution à l'étude de l'équilibre élastique d'une plaque etc. Paris 1900. — Nadai, A.: Die elastischen Platten. Berlin 1925. — Geckeler, J. W.: Elastostatik. Handb. d. Physik Bd. VI: Mechanik der elastischen Körper, Kap. 3. Berlin 1928. — Bergsträßer, M.: Forsch.-Arbeiten Ing.-Wes. Heft 302. Berlin 1928.

68. Die Kreisplatte und die Kreisringplatte unter zentralsymmetrischer Belastung.

Platten mit gleichbleibender Dicke. Die Punkte der Mittelebene werden mit Rücksicht auf die Begrenzung der Platte auf Polarkoordinaten r, α mit dem Mittelpunkt O als Ursprung bezogen. Die Schnittkräfte der Platte und die Ausbiegung w ihrer Mittelfläche sind daher nach (935) aus der Belastung p bestimmt. Die Beziehungen sind jedoch bei Zentralsymmetrie der Plattenform, der Stützung und Belastung unabhängig vom Winkel α , so daß die Ableitungen der Funktion $w(r, \alpha) \rightarrow w(r)$ nach α Null sind und die partielle Differentialgleichung in eine totale Differentialgleichung übergeht. Die Drillungsmomente $M_{r\alpha} = M_{\alpha r}$ sind daher nach (933) ebenfalls Null. Im übrigen wird nach S. 647

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -N \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \mu \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right), & M_\alpha &= -N \left(\mu \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right), \\ \text{Momentensumme } M &= \frac{M_r + M_\alpha}{1 + \mu} = -N \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = -N \Delta w. \end{aligned} \right\} \quad (945)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen für die äußeren Kräfte an dem Plattenabschnitt Abb. 627 liefern die Beziehungen

$$Q_{rz} = \frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r - M_\alpha}{r} = -N \frac{d}{dr} (\Delta w); \quad \frac{d(r Q_{rz})}{dr} = -p r \quad (946)$$

und mit (945) die Differentialgleichung

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) w = \Delta \Delta w = \frac{p}{N}. \quad (947)$$

Das Ergebnis kann daher in der Form

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + 2 \frac{1}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} = \frac{p}{N} \quad (948)$$

angeschrieben und nach (946) aus dem Ansatz

$$\frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \right] = \frac{p r}{N} \quad (949)$$

abgeleitet werden. Es läßt sich daher mit $\varphi = dw/dr$ auch folgendermaßen ausdrücken:

$$r \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{d\varphi}{dr} - \frac{1}{r} \varphi = r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \varphi) \right] = \frac{1}{N} \left(\int_0^r p r dr + C \right). \quad (950)$$

Die vollständige Lösung der Differentialgleichung 4. Ordnung besteht aus einem partikulären Integral w_0 der inhomogenen Gleichung (947) und aus vier mit den Integrationskonstanten C_1 bis C_4 erweiterten Lösungen w_1 bis w_4 der homogenen Gleichung. Das partikuläre Integral w_0 kann in diesem Falle aus (936), (937) durch eine zweimalige Wiederholung einer doppelten Quadratur bestimmt werden, denn

$$\left. \begin{aligned} r \frac{d^2 M}{dr^2} + \frac{dM}{dr} &= \frac{d}{dr} \left(r \frac{dM}{dr} \right) = -p r, & M &= - \int \frac{dr}{r} \int p r dr, \\ r \frac{d^2 w_0}{dr^2} + \frac{dw_0}{dr} &= \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw_0}{dr} \right) = -\frac{M r}{N}, & w_0 &= - \int \frac{dr}{r} \int \frac{M}{N} r dr. \end{aligned} \right\} \quad (951)$$

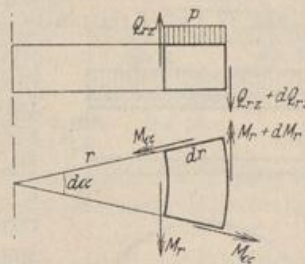


Abb. 627.

Als Lösungen der homogenen Gleichung eignen sich, wie sich leicht durch Einsetzen in (947) prüfen läßt, die folgenden Ansätze:

$$w_1 = 1, \quad w_2 = \left(\frac{r}{a}\right)^2, \quad w_3 = \frac{r^2}{a^2} \ln \frac{r}{a}, \quad w_4 = \ln \frac{r}{a}. \quad (952)$$

a ist der Radius des Plattenrandes (Abb. 628c). Daher lautet die vollständige Lösung von (947) mit $r/a = \varrho$

$$\begin{aligned} w &= w_0 + C_1 + C_2 \varrho^2 + C_3 \varrho^2 \ln \varrho + C_4 \ln \varrho, \\ \frac{dw}{dr} &= \frac{1}{a} \left[\frac{dw_0}{d\varrho} + 2C_2 \varrho + C_3 \varrho (1 + 2 \ln \varrho) + C_4 \frac{1}{\varrho} \right], \\ M_r &= -\frac{N}{a^2} \left\{ \frac{d^2 w_0}{d\varrho^2} + \frac{\mu}{\varrho} \frac{dw_0}{d\varrho} + (1+\mu) \left[2C_2 + C_3 \left(\frac{3+\mu}{1+\mu} + 2 \ln \varrho \right) - C_4 \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{1}{\varrho^2} \right] \right\}, \\ M_\alpha &= -\frac{N}{a^2} \left\{ \mu \frac{d^2 w_0}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dw_0}{d\varrho} + (1+\mu) \left[2C_2 + C_3 \left(\frac{1+3\mu}{1+\mu} + 2 \ln \varrho \right) + C_4 \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{1}{\varrho^2} \right] \right\}, \\ M &= -\frac{N}{a^2} \left[\frac{d^2 w_0}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dw_0}{d\varrho} + 4C_2 + 4C_3 (1 + \ln \varrho) \right], \\ Q_{rz} &= -\frac{N}{a^3} \left(\frac{d^3 w_0}{d\varrho^3} + \frac{d^2 w_0}{\varrho d\varrho^2} - \frac{dw_0}{\varrho^2 d\varrho} + 4C_3 \frac{1}{\varrho} \right). \end{aligned} \quad (953)$$

Der Stützendruck A bei einer zentralsymmetrischen Belastung \mathfrak{P} wird

$$A = \mathfrak{P}/2\pi a. \quad (954)$$

Da jedoch die Durchbiegung w und die Biegemomente M_r, M_α im Mittelpunkt O der Kreisplatte ($\varrho = 0, \ln \varrho = \infty$) für $C_3 \neq 0, C_4 \neq 0$ unendlich groß werden, sind diese Integrationskonstanten des logarithmischen Anteils der Lösung für die Kreisplatte Null. Die Integrationskonstanten C_1, C_2 werden aus den Bedingungen für die Stützung am Plattenrande $r = a, \varrho = 1$ bestimmt. Bei freier Auflagerung des Plattenrandes ist für $\varrho = 1$: $w = 0$ und $M_r = 0$, bei starrer Einspannung des Plattenrandes für $\varrho = 1$: $w = 0, dw/dr = 0$. Bei elastischer Einspannung der Kreisplatte in einem Zylinder besteht die Formänderung aus der Ausbiegung w^* der frei aufgelagerten Platte mit der vorgeschriebenen Belastung p und aus der Ausbiegung Mw^{**} derselben Platte mit einem am Rande angreifenden Einspannungsmoment M (Abb. 628a, b).

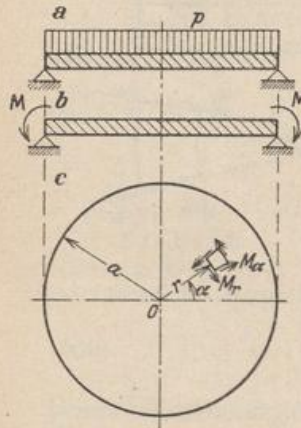


Abb. 628.

$$w = w^* + Mw^{**}. \quad (955)$$

Bei starrer Einspannung mit $M = M_0$ ist für $r = a$ mit $\varrho = 1$

$$\frac{dw}{dr} = \frac{dw^*}{dr} + M_0 \frac{dw^{**}}{dr} = 0 \quad (956)$$

und damit das Einspannungsmoment noch auf andere Weise bestimmt

Die Kreisringplatten werden entweder an beiden Rändern gestützt (Abb. 629a) oder als Kragplatten verwendet. Der freie Rand wird dann mit $r = b, b/a = \beta$, der gestützte Rand mit $r = a, \varrho = 1$ bezeichnet (Abb. 629b, c). Die Platte kann hier wieder frei aufgelagert oder eingespannt sein. Die Formänderung der Kreis-

ringplatte wird durch die vollständige Differentialgleichung mit vier Integrationskonstanten beschrieben. Zu ihrer Berechnung stehen an jedem Rande zwei Bedingungen zur Verfügung. Am freien Rand $\varrho = \beta$ ist $M_r = 0, Q_r = 0$.

Die Kreisplatte vom Durchmesser $2b$ kann außerdem in einem konzentrischen Kreis mit dem Durchmesser $2a$ gestützt sein und daher mit einer Ringplatte von der Breite $b-a$ auskragen. Die äußeren an der Platte angreifenden Kräfte sind dann in $r = a$ unstetig. Die Berechnung zerfällt in die Lösung I für die Formänderung w der Kreisplatte mit den beiden Integrationskonstanten C_1, C_2 und in die Lösung II nach (953) für die Formänderung der Ringplatte von der Breite $(b-a)$ mit vier Integrationskonstanten. Die sechs Integrationskonstanten werden aus den Randbedingungen an der äußeren Begrenzung ($r = b$) mit $M_{b,II} = 0, Q_{bz,II} = 0$ und aus den Bedingungen an dem abgestützten Kreis $r = a$ berechnet. An dieser Stelle ist $w_{a,I} = 0, w_{a,II} = 0, dw_{a,I}/dr = dw_{a,II}/dr$ und $M_{a,I} = M_{a,II}$. Als Kontrolle gilt $Q_{a,I} - Q_{a,II} + \mathfrak{P}/2\pi a = 0$ (Abb. 630) mit \mathfrak{P} als Plattenbelastung. Dasselbe gilt von der Berechnung einer Ringplatte von der Breite $(b-c)$, nur daß in diesem Falle in die Rechnung acht Integrationskonstanten eingehen, die sich aus acht linearen Gleichungen ergeben (Abb. 631). Die Lösung läßt sich bei zentraler Symmetrie naturgemäß leicht auch für die statisch unbestimmte Stützung der Kreis- und Kreisringplatte erweitern.

Die Belastung $\hat{p} = \hat{p}_0$ oder $\hat{p} = \hat{p}(r)$ erstreckt sich über die ganze Breite, über einen Ringstreifen oder als Linienbelastung P über einen ausgezeichneten Breitenkreis der Platte. Die Einzellast P_0 im Ursprung O ist ein Sonderfall. Formänderung und Schnittkräfte der Platte lassen sich in diesem Falle nach den Ansätzen auf S. 650 in dem Bereich um den Plattenmittelpunkt nicht angeben. Unstetigkeiten im Verlauf der zentralsymmetrischen Belastung \hat{p} führen zu einer Unterteilung des Integrationsbereiches. Dasselbe gilt bei einem Wechsel der Plattenstärke. Die

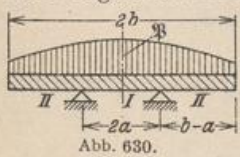


Abb. 630.

Untersuchung beginnt in jedem Falle mit der Berechnung der Integrationskonstanten aus ebenso vielen linearen Gleichungen. Damit ist die Ausbiegung w eindeutig bestimmt. Dasselbe gilt dann auch von den Schnittkräften,

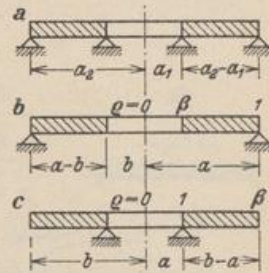


Abb. 629.

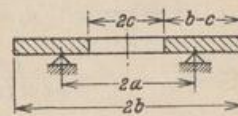


Abb. 631.

die sich nach (953) aus Ableitungen der Funktion w zusammensetzen. Die Lösung ist richtig, wenn sie die Differentialgleichung und die vorgeschriebenen Randbedingungen befriedigt.

Da Kreis- und Kreisringplatten für die konstruktive Ausgestaltung zahlreicher Bauaufgaben verwendet werden, ist das Ergebnis der notwendigen Untersuchungen in den Tabellen 63 u. 64 zusammengefaßt worden. Ihre Anwendung wird wesentlich vereinfacht, wenn die reziproke Poissonsche Zahl μ , die bei Stahl mit 0,25, bei Eisenbeton zwischen 0,16 und 0,10 gemessen ist, vernachlässigt wird. Dies ist in der Regel zulässig.

Die Differentialgleichung vierter Ordnung läßt sich mit (945) ebenso wie in Abschn. 67 in zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung zerlegen

$$\frac{d^2 M}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dM}{dr} = -\hat{p}, \quad \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = -\frac{M}{N} = -w. \quad (957)$$

Da nach (945) und (946)

$$\frac{dM}{dr} = Q_{rz,p} = -\frac{1}{r} \int_0^r \hat{p} r dr, \quad \text{also auch} \quad \frac{dw}{dr} = Q_{rz,w} = -\frac{1}{r} \int_0^r \frac{M}{N} r dr$$

ist, entstehen nach H. Marcus die beiden simultanen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\frac{d^2 M}{dr^2} = - \left[p - \frac{1}{r^2} \int_0^r p r dr \right], \quad \frac{d^2 w}{dr^2} = - \left[\frac{M}{N} - \frac{1}{r^2} \int_0^r \frac{M}{N} r dr \right], \quad (958)$$

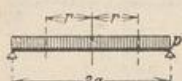
die wiederum eine Analogie zu den Differentialgleichungen der Seilkurve und der Biegelinie des biegeungssteifen Stabes bilden und sich zur Berechnung des Spannungs- und Formänderungszustandes der Kreisplatte ebenfalls eignen.

Tabelle 63. Formänderungen und Schnittkräfte symmetrisch belasteter Kreis- und Kreisringplatten.

$$q = \frac{r}{a}, \quad \beta = \frac{b}{a}, \quad N = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)}, \quad w' = \frac{dw}{dr}.$$

$$\Phi_0 = 1 - q^4, \quad \Phi_1 = 1 - q^2, \quad \Phi_2 = q^2 \ln q, \quad \Phi_3 = \ln q, \quad \Phi_4 = \frac{1}{q^2} - 1.$$

Die Funktionen Φ_0 bis Φ_4 sind in Tabelle 64 enthalten.

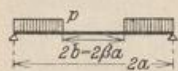


$$w = \frac{p a^4}{64 N (1 + \mu)} [2(3 + \mu) \Phi_1 - (1 + \mu) \Phi_0],$$

$$M_r = \frac{p a^2}{16} (3 + \mu) \Phi_1; \quad M_t = \frac{p a^2}{16} [2(1 - \mu) + (1 + 3\mu) \Phi_1], \quad Q_r = -\frac{p a}{2} q.$$

$$q = 0: \quad w = \frac{p a^4}{64 N} \frac{5 + \mu}{1 + \mu}; \quad M_r = M_t = \frac{p a^2}{16} (3 + \mu),$$

$$q = 1: \quad w' = -\frac{p a^3}{8 N (1 + \mu)}; \quad M_t = \frac{p a^2}{8} (1 - \mu); \quad Q_r = -\frac{p a}{2}.$$



$$\kappa_1 = [(5 + \mu) - (7 + 3\mu) \beta^2] (1 - \beta^2) - 4(1 + \mu) \beta^4 \ln \beta,$$

$$\kappa_2 = [(3 + \mu) - (1 - \mu) \beta^2] (1 - \beta^2) + 4(1 + \mu) \beta^2 \ln \beta.$$

$$q \leq \beta: \quad w = \frac{p a^4}{64 N (1 + \mu)} [\kappa_1 - 2\kappa_2 + 2\kappa_2 \Phi_1], \quad M_r = M_t = \frac{p a^2}{16} \kappa_2, \quad Q_r = 0.$$

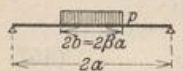
$$q \geq \beta: \quad w = \frac{p a^4}{64 N (1 + \mu)} \{ 2[(3 + \mu)(1 - 2\beta^2) + (1 - \mu)\beta^4] \Phi_1 - (1 + \mu) \Phi_0 - 4(1 + \mu) \beta^4 \Phi_3 - 8(1 + \mu) \beta^2 \Phi_2 \},$$

$$M_r = \frac{p a^2}{16} [(3 + \mu) \Phi_1 - (1 - \mu) \beta^4 \Phi_4 + 4(1 + \mu) \beta^2 \Phi_3], \quad Q_r = -\frac{p a}{2} \left(q - \frac{\beta^2}{q} \right),$$

$$M_t = \frac{p a^2}{16} [(1 + 3\mu) \Phi_1 + (1 - \mu) \beta^4 \Phi_4 + 4(1 + \mu) \beta^2 \Phi_3 + 2(1 - \mu)(1 - \beta^2)^2].$$

$$q = 0: \quad w = \frac{p a^4}{64 N (1 + \mu)} \kappa_1.$$

$$q = 1: \quad w' = -\frac{p a^3}{8 N (1 + \mu)} (1 - \beta^2)^2, \quad M_t = \frac{p a^2}{8} (1 - \mu)(1 - \beta^2)^2, \quad Q_r = -\frac{p a}{2} (1 - \beta^2).$$



$$\kappa_1 = 4 - (1 - \mu) \beta^2, \quad \kappa_2 = [\kappa_1 - 4(1 + \mu) \ln \beta] \beta^2,$$

$$\kappa_3 = 4(3 + \mu) - (7 + 3\mu) \beta^2 + 4(1 + \mu) \beta^2 \ln \beta.$$

$$q \leq \beta: \quad w = \frac{p a^4}{64 N} \left\{ 1 + [4 - 5\beta^2 + 4(2 + \beta^2) \ln \beta] \beta^2 + 2 \frac{\kappa_2}{1 + \mu} \Phi_1 - \Phi_0 \right\}, \quad Q_r = -\frac{p a}{2} q.$$

$$M_r = \frac{p a^2}{16} [\kappa_2 - (3 + \mu) + (3 + \mu) \Phi_1], \quad M_t = \frac{p a^2}{16} [\kappa_2 - (1 + 3\mu) + (1 + 3\mu) \Phi_1].$$

$$q \geq \beta: w = \frac{p a^4}{64 N} \cdot 2 \beta^2 \left[\frac{2(3 + \mu) - (1 - \mu) \beta^2}{1 + \mu} \Phi_1 + 4 \Phi_2 + 2 \beta^2 \Phi_3 \right].$$

$$M_r = \frac{p a^2}{16} [(1 - \mu) \beta^4 \Phi_4 - 4(1 + \mu) \beta^2 \Phi_3], \quad Q_r = -\frac{p b}{2} \frac{\beta}{q}.$$

$$M_t = \frac{p a^2}{16} [-(1 - \mu) \beta^4 \Phi_4 - 4(1 + \mu) \beta^2 \Phi_3 + 2(1 - \mu) \beta^2 (2 - \beta^2)].$$

$$q = 0: w = \frac{p a^2 b^2}{64 N (1 + \mu)} \kappa_3, \quad M_r = M_t = \frac{p a^2}{16} \kappa_2.$$

$$q = \beta: M_r = \frac{p a^2}{16} [\kappa_2 - (3 + \mu) \beta^2], \quad M_t = \frac{p a^2}{16} [\kappa_2 - (1 + 3\mu) \beta^2], \quad Q_r = -\frac{p b}{2}.$$

$$q = 1: w' = -\frac{p a b^2}{8 N (1 + \mu)} (2 - \beta^2), \quad M_t = \frac{p b^2}{8} (1 - \mu) (2 - \beta^2), \quad Q_r = -\frac{p b}{2} \beta.$$



$$\kappa_1 = (3 + \mu) (1 - \beta^2) + 2(1 + \mu) \beta^2 \ln \beta.$$

$$\kappa_2 = (1 - \mu) (1 - \beta^2) - 2(1 + \mu) \ln \beta.$$

$$q \leq \beta: w = \frac{P a^2 b}{8 N (1 + \mu)} [(\kappa_1 - \kappa_2) + \kappa_2 \Phi_1], \quad M_r = M_t = \frac{P b}{4} \kappa_2, \quad Q_r = 0.$$

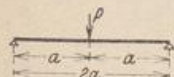
$$q \geq \beta: w = \frac{P a^2 b}{8 N (1 + \mu)} [(3 + \mu) - (1 - \mu) \beta^2] \Phi_1 + 2(1 + \mu) \beta^2 \Phi_3 + 2(1 + \mu) \Phi_2,$$

$$M_r = \frac{P b}{4} [(1 - \mu) \beta^2 \Phi_4 - 2(1 + \mu) \Phi_3], \quad Q_r = -P \frac{\beta}{q}.$$

$$M_t = \frac{P b}{4} [-(1 - \mu) \beta^2 \Phi_4 - 2(1 + \mu) \Phi_3 + 2(1 - \mu) (1 - \beta^2)].$$

$$q = 0: w = \frac{P a^2 b}{8 N (1 + \mu)} \kappa_1.$$

$$q = 1: w' = -\frac{P a b}{2 N (1 + \mu)} (1 - \beta^2), \quad M_t = \frac{P b}{2} (1 - \mu) (1 - \beta^2), \quad Q_r = -P \beta.$$

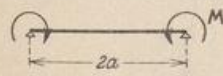


$$w = \frac{P a^2}{16 \pi N} \left[\frac{3 + \mu}{1 + \mu} \Phi_1 + 2 \Phi_2 \right].$$

$$M_r = -\frac{P}{4 \pi} (1 + \mu) \Phi_3, \quad M_t = \frac{P}{4 \pi} [(1 - \mu) - (1 + \mu) \Phi_3], \quad Q_r = -\frac{P}{2 \pi a q}.$$

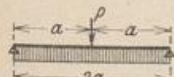
$$q = 0: w = \frac{P a^2}{16 \pi N} \frac{3 + \mu}{1 + \mu}.$$

$$q = 1: w' = -\frac{P a}{4 \pi N (1 + \mu)}, \quad M_t = \frac{P}{4 \pi} (1 - \mu), \quad Q_r = -\frac{P}{2 \pi a}.$$



$$w = \frac{M a^2}{2 N (1 + \mu)} \Phi_1, \quad M_r = M_t = M, \quad Q_r = 0.$$

$$q = 1: w' = -\frac{M a}{N (1 + \mu)}.$$



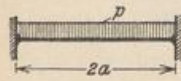
$$w = \frac{P a^2}{64 \pi N} \left(2 \frac{3 + \mu}{1 + \mu} \Phi_1 + \Phi_0 + 8 \Phi_2 \right).$$

$$M_r = -\frac{P}{16 \pi} [(3 + \mu) \Phi_1 + 4(1 + \mu) \Phi_3],$$

$$M_t = -\frac{P}{16 \pi} [(1 + 3\mu) \Phi_1 + 4(1 + \mu) \Phi_3 - 2(1 - \mu)], \quad Q_r = -\frac{P}{2 \pi a} \left(\frac{1}{q} - \nu \right)$$

$$e = 0: \quad w = \frac{P a^2}{64 \pi N} \frac{7 + 3 \mu}{1 + \mu}.$$

$$e = 1: \quad w' = -\frac{P a}{8 \pi N (1 + \mu)}, \quad M_t = \frac{P}{8 \pi} (1 - \mu).$$

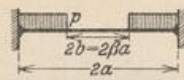


$$w = \frac{p a^4}{64 N} (2 \Phi_1 - \Phi_0), \quad M_r = \frac{p a^2}{16} [(3 + \mu) \Phi_1 - 2],$$

$$M_t = \frac{p a^2}{16} [(1 + 3 \mu) \Phi_1 - 2 \mu], \quad Q_r = -\frac{p a}{2} e.$$

$$e = 0: \quad w = \frac{p a^4}{64 N}, \quad M_r = M_t = \frac{p a^2}{16} (1 + \mu),$$

$$e = 1: \quad M_t = \mu M_r = -\frac{p a^2}{8} \mu, \quad Q_r = -\frac{p a}{2}.$$



$$\kappa_1 = 1 - 4 \beta^2 + \beta^4 (3 - 4 \ln \beta),$$

$$\kappa_2 = 1 - \beta^2 (\beta^2 - 4 \ln \beta).$$

$$e \leq \beta: \quad w = \frac{p a^4}{64 N} [(\kappa_1 - 2 \kappa_2) + 2 \kappa_2 \Phi_1], \quad M_r = M_t = \frac{p a^2}{16} (1 + \mu) \kappa_2, \quad Q_r = 0.$$

$$e \geq \beta: \quad w = \frac{p a^4}{64 N} [2 (1 - 2 \beta^2 - \beta^4) \Phi_1 - \Phi_0 - 4 \beta^4 \Phi_3 - 8 \beta^2 \Phi_2],$$

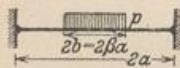
$$M_r = \frac{p a^2}{16} [-2 (1 - \beta^2)^2 + (3 + \mu) \Phi_1 - (1 - \mu) \beta^4 \Phi_4 + 4 (1 + \mu) \beta^2 \Phi_3],$$

$$M_t = \frac{p a^2}{16} [-2 \mu (1 - \beta^2)^2 + (1 + 3 \mu) \Phi_1 + (1 - \mu) \beta^4 \Phi_4 + 4 (1 + \mu) \beta^2 \Phi_3],$$

$$Q_r = -\frac{p a}{2} \left(e - \frac{\beta^2}{e} \right).$$

$$e = 0: \quad w = \frac{p a^4}{64 N} \kappa_1.$$

$$e = 1: \quad M_t = \mu M_r = -\frac{p a^2}{8} \mu (1 - \beta^2)^2, \quad Q_r = -\frac{p a}{2} (1 - \beta^2).$$



$$\kappa_1 = \beta^2 [4 - \beta^2 (3 - 4 \ln \beta)],$$

$$\kappa_2 = \beta^2 (\beta^2 - 4 \ln \beta).$$

$$e \leq \beta: \quad w = \frac{p a^4}{64 N} [(\kappa_1 - 2 \kappa_2 + 1) + 2 \kappa_2 \Phi_1 - \Phi_0],$$

$$M_r = \frac{p a^2}{16} \{[(1 + \mu) \kappa_2 - (3 + \mu)] + (3 + \mu) \Phi_1\},$$

$$M_t = \frac{p a^2}{16} \{[(1 + \mu) \kappa_2 - (1 + 3 \mu)] + (1 + 3 \mu) \Phi_1\}.$$

$$e \geq \beta: \quad w = \frac{p a^2 b^2}{32 N} [(2 + \beta^2) \Phi_1 + 2 \beta^2 \Phi_3 + 4 \Phi_2],$$

$$M_r = \frac{p b^2}{16} [-2 (2 - \beta^2) + (1 - \mu) \beta^2 \Phi_4 - 4 (1 + \mu) \Phi_3], \quad Q_r = -\frac{p b}{2} \frac{\beta}{e},$$

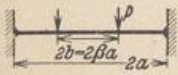
$$M_t = \frac{p b^2}{16} [-2 \mu (2 - \beta^2) - (1 - \mu) \beta^2 \Phi_4 - 4 (1 + \mu) \Phi_3].$$

$$q = 0: \quad w = \frac{p a^4}{64 N} \kappa_1, \quad M_r = M_t = \frac{p a^2}{16} (1 + \mu) \kappa_2.$$

$$q = \beta: \quad M_r = \frac{p a^2}{16} [(1 + \mu) \kappa_2 - (3 + \mu) \beta^2], \quad M_t = \frac{p a^2}{16} [(1 + \mu) \kappa_2 - (1 + 3 \mu) \beta^2];$$

$$Q_r = -\frac{p b}{2}.$$

$$q = 1: \quad M_t = \mu M_r = -\frac{p b^2}{8} \mu (2 - \beta^2), \quad Q_r = -\frac{p b}{2} \beta.$$



$$\kappa_1 = 1 - \beta^2 (1 - 2 \ln \beta),$$

$$\kappa_2 = \beta^2 - 1 - 2 \ln \beta.$$

$$q \leq \beta: \quad w = \frac{P a^2 b}{8 N} [(\kappa_1 - \kappa_2) + \kappa_2 \Phi_1], \quad M_r = M_t = \frac{P b}{4} (1 + \mu) \kappa_2, \quad Q_r = 0.$$

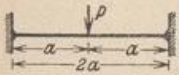
$$q \geq \beta: \quad w = \frac{P a^2 b}{8 N} [(1 + \beta^2) \Phi_1 + 2 \beta^2 \Phi_3 + 2 \Phi_2],$$

$$M_r = -\frac{P b}{4} [2(1 - \beta^2) - (1 - \mu) \beta^2 \Phi_4 + 2(1 + \mu) \Phi_3],$$

$$M_t = -\frac{P b}{4} [2 \mu (1 - \beta^2) + (1 - \mu) \beta^2 \Phi_4 + 2(1 + \mu) \Phi_3], \quad Q_r = -P \frac{\beta}{e}.$$

$$q = 0: \quad w = \frac{P a^2 b}{8 N} \kappa_1.$$

$$q = 1: \quad M_t = \mu M_r = -\frac{P b}{2} \mu (1 - \beta^2), \quad Q_r = -P \beta.$$

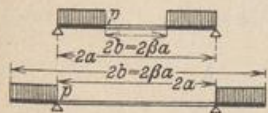


$$w = \frac{P a^2}{16 \pi N} (\Phi_1 + 2 \Phi_2).$$

$$M_r = -\frac{P}{4 \pi} [1 + (1 + \mu) \Phi_3], \quad M_t = -\frac{P}{4 \pi} [\mu + (1 + \mu) \Phi_3], \quad Q_r = -\frac{P}{2 \pi a e}.$$

$$q = 0: \quad w = \frac{P a^2}{16 \pi N}.$$

$$q = 1: \quad M_t = \mu M_r = -\frac{P}{4 \pi} \mu, \quad Q_r = -\frac{P}{2 \pi a}.$$



$$\kappa_1 = (3 + \mu) + 4(1 + \mu) \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \ln \beta,$$

$$\kappa_2 = (3 + \mu) - 4(1 + \mu) \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \ln \beta,$$

$$w = \frac{p a^4}{64 N} \left\{ \frac{2}{1 + \mu} [(3 + \mu) - \beta^2 \kappa_2] \Phi_1 - \Phi_0 - \frac{4}{1 - \mu} \beta^2 \kappa_1 \Phi_3 - 8 \beta^2 \Phi_2 \right\},$$

$$M_r = \frac{p a^2}{16} [(3 + \mu) \Phi_1 - \beta^2 \kappa_1 \Phi_4 + 4(1 + \mu) \beta^2 \Phi_3], \quad Q_r = -\frac{p a}{2} \left(e - \frac{\beta^2}{e} \right),$$

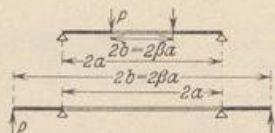
$$M_t = \frac{p a^2}{16} \{ (1 + 3 \mu) \Phi_1 + \beta^2 \kappa_1 \Phi_4 + 4(1 + \mu) \beta^2 \Phi_3 + 2(1 - \mu) - 2 \beta^2 [2(1 - \mu) - \kappa_1] \}.$$

$$q = \beta: \quad w = \frac{p a^4}{64 N} \left\{ [(5 + \mu) - (7 + 3 \mu) \beta^2] \frac{1 - \beta^2}{1 + \mu} - \frac{4}{1 - \mu} \beta^2 \kappa_1 \ln \beta \right\},$$

$$w' = -\frac{p a^2 b}{8 N (1 + \mu)} \left(\frac{\kappa_1}{1 - \mu} - \beta^2 \right), \quad M_t = \frac{p a^2}{8} [\kappa_1 - (1 - \mu) \beta^2].$$

$$\varrho = 1: \quad w' = -\frac{p a^3}{8 N (1 + \mu)} \left[1 - \beta^2 \left(2 - \frac{\varkappa_1}{1 - \mu} \right) \right],$$

$$M_t = \frac{p a^2}{8} \left\{ (1 - \mu) - \beta^2 [2(1 - \mu) - \varkappa_1] \right\}, \quad Q_r = -\frac{p a}{2} (1 - \beta^2).$$



$$\varkappa = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \ln \beta.$$

$$w = \frac{P a^2 b}{8 N} \left[\left(\frac{3 + \mu}{1 + \mu} - 2\varkappa \right) \Phi_1 + 4 \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \varkappa \Phi_3 + 2 \Phi_2 \right].$$

$$M_r = -\frac{P b}{2} (1 + \mu) (-\varkappa \Phi_4 + \Phi_3); \quad Q_r = -P \frac{\beta}{\varrho},$$

$$M_t = -\frac{P b}{2} (1 + \mu) \left[\varkappa \Phi_4 + \Phi_3 + \left(2\varkappa - \frac{1 - \mu}{1 + \mu} \right) \right].$$

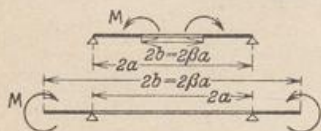
$$\varrho = \beta: \quad w = \frac{P a^2 b}{8 N} \left[\frac{3 + \mu}{1 + \mu} (1 - \beta^2) + 4 \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \varkappa \ln \beta \right],$$

$$w' = -\frac{P a^2}{2 N (1 + \mu)} \left(\beta^2 - 2\varkappa \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \right),$$

$$M_t = -\frac{P b}{2} (1 + \mu) \left(2 \frac{\varkappa}{\beta^2} - \frac{1 - \mu}{1 + \mu} \right); \quad Q_r = -P.$$

$$\varrho = 1: \quad w' = -\frac{P a b}{2 N (1 + \mu)} \left(1 - 2\varkappa \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \right); \quad Q_r = -P \beta,$$

$$M_t = -\frac{P b}{2} (1 + \mu) \left(2\varkappa - \frac{1 - \mu}{1 + \mu} \right).$$



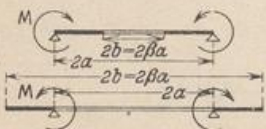
$$w = -\frac{M b^2}{2 N (1 + \mu)} \frac{1}{1 - \beta^2} \left(\Phi_1 - 2 \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \Phi_3 \right),$$

$$M_r = M \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \Phi_4; \quad M_t = -M \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} (\Phi_4 + 2), \quad Q_r = 0.$$

$$\varrho = \beta: \quad w = -\frac{M b^2}{2 N (1 + \mu)} \left(1 - 2 \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \frac{\ln \beta}{1 - \beta^2} \right),$$

$$w' = \frac{M b}{N (1 + \mu)} \frac{1}{1 - \beta^2} \left(\beta^2 + \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \right); \quad M_t = -M \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2}.$$

$$\varrho = 1: \quad w' = 2 \frac{M b}{N (1 - \mu^2)} \frac{\beta}{1 - \beta^2}; \quad M_t = -2 M \frac{\beta^2}{1 - \beta^2}.$$



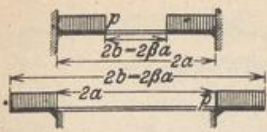
$$w = \frac{M a^2}{2 N (1 + \mu) (1 - \beta^2)} \left(\Phi_1 - 2 \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \beta^2 \Phi_3 \right),$$

$$M_r = M \left(1 - \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \Phi_4 \right); \quad M_t = M \left(\frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2} + \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \Phi_4 \right); \quad Q_r = 0$$

$$\varrho = \beta: \quad w = \frac{M a^2}{2 N (1 + \mu)} \left(1 - 2 \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \ln \beta \right),$$

$$w' = -\frac{M b}{N (1 - \mu^2)} \frac{2}{1 - \beta^2}; \quad M_t = M \frac{2}{1 - \beta^2}.$$

$$\varrho = 1: \quad w' = -\frac{M a}{N (1 + \mu) (1 - \beta^2)} \left(1 + \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \beta^2 \right), \quad M_t = M \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2}.$$



$$\kappa_1 = (1 + \mu) + (1 - \mu) \beta^2, \quad \psi_1 = 4(1 + \mu) \beta^2 \ln \beta,$$

$$\kappa_2 = (1 - \mu) + (1 + \mu) \beta^2, \quad \psi = \frac{\kappa_1 + \psi_1}{\kappa_2} \beta^2.$$

$$w = \frac{p a^4}{64 N} [2(1 - 2\beta^2 - \psi) \Phi_1 - \Phi_0 - 4\psi \Phi_3 - 8\beta^2 \Phi_2].$$

$$M_r = -\frac{p a^2}{16} [2(1 - 2\beta^2 + \psi) - (3 + \mu) \Phi_1 + (1 - \mu) \psi \Phi_4 - 4(1 + \mu) \beta^2 \Phi_3].$$

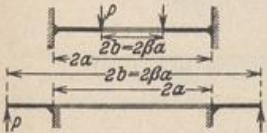
$$M_t = -\frac{p a^2}{16} [2\mu(1 - 2\beta^2 + \psi) - (1 + 3\mu) \Phi_1 - (1 - \mu) \psi \Phi_4 - 4(1 + \mu) \beta^2 \Phi_3].$$

$$Q_r = -\frac{p a}{2} \left(\varrho - \frac{\beta^2}{\varrho} \right).$$

$$\varrho = \beta: \quad w = \frac{p a^4}{64 N} [(1 - \beta^2)^2 - 2(1 - \beta^2)(\psi + 2\beta^2) - 4(\psi + 2\beta^2) \ln \beta],$$

$$w' = -\frac{p a^3}{8 N (1 + \mu)} \frac{\psi - \beta^4}{\beta}; \quad M_t = \frac{p a^2}{8} \frac{1 - \mu^2}{\kappa_2} (1 - \beta^4 + 4\beta^2 \ln \beta).$$

$$\varrho = 1: \quad M_t = \mu M_r = -\frac{p a^2}{8} \mu (1 - 2\beta^2 + \psi); \quad Q_r = -\frac{p a}{2} (1 - \beta^2).$$



$$\kappa = (1 - \mu) + (1 + \mu) \beta^2;$$

$$\psi = [1 + (1 + \mu) \ln \beta] \frac{\beta^2}{\kappa}.$$

$$w = \frac{P a^2 b}{8 N} [(1 + 2\psi) \Phi_1 + 4\psi \Phi_3 + 2\Phi_2].$$

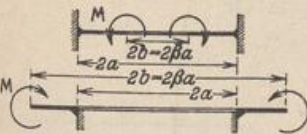
$$M_r = -\frac{P b}{2} [(1 - 2\psi) - (1 - \mu) \psi \Phi_4 + (1 + \mu) \Phi_3]. \quad Q_r = -P \frac{\beta}{\varrho}.$$

$$M_t = -\frac{P b}{2} [\mu(1 - 2\psi) + (1 - \mu) \psi \Phi_4 + (1 + \mu) \Phi_3].$$

$$\varrho = \beta: \quad w = \frac{P a^2 b}{8 N} [(1 + 2\psi)(1 - \beta^2) + 2(\beta^2 + 2\psi) \ln \beta],$$

$$w' = \frac{P b^2}{2 N \kappa} (1 - \beta^2 + 2 \ln \beta), \quad M_t = -\frac{P b}{2} \frac{1 - \mu^2}{\kappa} (1 - \beta^2 + 2 \ln \beta).$$

$$\varrho = 1: \quad M_t = \mu M_r = -\frac{P b}{2} \mu (1 - 2\psi),$$



$$\kappa = (1 - \mu) + (1 + \mu) \beta^2,$$

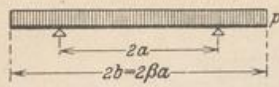
$$w = \frac{M b^2}{2 N \kappa} [\Phi_1 + 2\Phi_3]; \quad Q_r = 0,$$

$$M_r = \frac{M \beta^2}{\kappa} [2 + (1 - \mu) \Phi_4]; \quad M_t = \frac{M \beta^2}{\kappa} [2\mu - (1 - \mu) \Phi_4].$$

$$\varrho = \beta: \quad w = \frac{M b^2}{2 N \kappa} (1 - \beta^2 + 2 \ln \beta); \quad w' = \frac{M b}{N \kappa} (1 - \beta^2).$$

$$M_t = -\frac{M}{\kappa} [(1 - \mu) - (1 + \mu) \beta^2].$$

$$\varrho = 1: \quad M_t = \mu M_r = \frac{2 M \beta^2}{\kappa} \mu.$$



$$\begin{aligned} \kappa_1 &= 2(1 - \mu) + (1 + 3\mu)\beta^2 - 4(1 + \mu)\beta^2 \ln \beta, \\ \kappa_2 &= 2(1 - \mu) - (3 + \mu)\beta^2 - 4(1 + \mu)\beta^2 \ln \beta. \end{aligned}$$

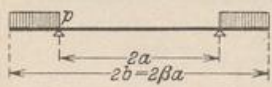
$$\begin{aligned} \varrho \leq 1: \quad w &= \frac{p a^4}{64 N} \left(\frac{2 \kappa_1}{1 + \mu} \Phi_1 - \Phi_0 \right), \\ M_r &= \frac{p a^2}{16} [\kappa_1 - (3 + \mu) + (3 + \mu) \Phi_1], \\ M_t &= \frac{p a^2}{16} [\kappa_1 - (1 + 3\mu) + (1 + 3\mu) \Phi_1], \quad Q_r = -\frac{p a}{2} \varrho. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varrho \geq 1: \quad w &= \frac{p a^4}{64 N} \left(\frac{2 \kappa_2}{1 + \mu} \Phi_1 - \Phi_0 - 8 \beta^2 \Phi_3 - 8 \beta^2 \Phi_2 \right), \quad Q_r = \frac{p a}{2} \left(\frac{\beta^2}{\varrho} - \varrho \right), \\ M_r &= \frac{p a^2}{16} [\kappa_1 - (3 + \mu) + (3 + \mu) \Phi_1 - 2(1 - \mu)\beta^2 \Phi_4 + 4(1 + \mu)\beta^2 \Phi_3], \\ M_t &= \frac{p a^2}{16} [\kappa_1 - (1 + 3\mu) + (1 + 3\mu) \Phi_1 + 2(1 - \mu)\beta^2 \Phi_4 + 4(1 + \mu)\beta^2 \Phi_3]. \end{aligned}$$

$$\varrho = 0: \quad w = \frac{p a^4}{64 N} \left(\frac{2 \kappa_1}{1 + \mu} - 1 \right), \quad M_r = M_t = \frac{p a^2}{16} \kappa_1.$$

$$\begin{aligned} \varrho = 1: \quad w' &= -\frac{p a^3}{16 N} \left(\frac{\kappa_1}{1 + \mu} - 1 \right), \quad Q_{r1} = -\frac{p a}{2}, \quad Q_{ra} = \frac{p a}{2} (\beta^2 - 1), \\ M_r &= \frac{p a^2}{16} [\kappa_1 - (3 + \mu)], \quad M_t = \frac{p a^2}{16} [\kappa_1 - (1 + 3\mu)]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varrho = \beta: \quad w &= -\frac{p a^4}{64 N (1 + \mu)} \{ [(3 - 5\mu) - (7 + 3\mu)\beta^2] (\beta^2 - 1) + 16(1 + \mu)\beta^2 \ln \beta \}, \\ w' &= -\frac{p a^2 b}{8 N (1 + \mu)} (2 - \beta^2), \quad M_t = \frac{p a^2}{8} (1 - \mu) (2 - \beta^2). \end{aligned}$$



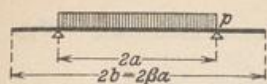
$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{1}{\beta^2} [(1 - \mu) + 4\mu\beta^2 - (1 + 3\mu)\beta^4 + 4(1 + \mu)\beta^4 \ln \beta], \\ \kappa_2 &= \frac{1}{\beta^2} [(1 - \mu)(1 - 2\beta^2) + (3 + \mu)\beta^4 + 4(1 + \mu)\beta^4 \ln \beta]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varrho \leq 1: \quad w &= -\frac{p a^4}{32 N (1 + \mu)} \kappa_1 \Phi_1, \quad M_r = M_t = -\frac{p a^2}{16} \kappa_1, \quad Q_r = 0. \\ \varrho \geq 1: \quad w &= -\frac{p a^4}{64 N (1 + \mu)} [2 \kappa_2 \Phi_1 + (1 + \mu) \Phi_0 + 4(1 + \mu)(2\beta^2 - 1) \Phi_3 + 8(1 + \mu)\beta^2 \Phi_2], \\ M_r &= -\frac{p a^2}{16} [\kappa_1 - (3 + \mu) \Phi_1 + (1 - \mu)(2\beta^2 - 1) \Phi_4 - 4(1 + \mu)\beta^2 \Phi_3], \\ M_t &= -\frac{p a^2}{16} [\kappa_1 - (1 + 3\mu) \Phi_1 - (1 - \mu)(2\beta^2 - 1) \Phi_4 - 4(1 + \mu)\beta^2 \Phi_3], \\ Q_r &= \frac{p a}{2} \left(\frac{\beta^2}{\varrho} - \varrho \right). \end{aligned}$$

$$\varrho = 0: \quad w = -\frac{p a^4}{32 N (1 + \mu)} \kappa_1, \quad M_r = M_t = -\frac{p a^2}{16} \kappa_1.$$

$$\varrho = 1: \quad w' = \frac{p a^3}{16 N (1 + \mu)} \kappa_1, \quad M_r = M_t = -\frac{p a^2}{16} \kappa_1, \quad Q_{r1} = 0, \quad Q_{ra} = \frac{p a}{2} (\beta^2 - 1).$$

$$\begin{aligned} \varrho = \beta: \quad w &= \frac{p a^4}{64 N (1 + \mu)} \cdot \left\{ [2(1 - \mu) - (3 - 5\mu)\beta^2 + (7 + 3\mu)\beta^4] \frac{\beta^2 - 1}{\beta^2} - 4(1 + \mu)(4\beta^2 - 1) \ln \beta \right\}, \\ w' &= \frac{p a^3}{8 N (1 + \mu)} \frac{(\beta^2 - 1)^2}{\beta}, \quad M_t = -\frac{p a^2}{8} (1 - \mu) \frac{(\beta^2 - 1)^2}{\beta^2}. \end{aligned}$$



$$\kappa = \frac{1-\mu}{\beta^2} + 2(1+\mu).$$

$$q \leq 1: \quad w = \frac{p a^4}{64 N} \left(2 \frac{\kappa}{1+\mu} \Phi_1 - \Phi_0 \right), \quad M_r = \frac{p a^2}{16} [\kappa - (3+\mu) + (3+\mu) \Phi_1],$$

$$M_t = \frac{p a^2}{16} [\kappa - (1+3\mu) + (1+3\mu) \Phi_1], \quad Q_r = -\frac{p a}{2} q.$$

$$q \geq 1: \quad w = \frac{p a^4}{32 N} \left[\frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{1}{\beta^2} \Phi_1 - 2 \Phi_3 \right], \quad Q_r = 0.$$

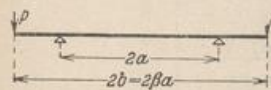
$$M_r = -\frac{p a^2}{16} (1-\mu) \left(\frac{\beta^2-1}{\beta^2} + \Phi_4 \right), \quad M_t = -\frac{p a^2}{16} (1-\mu) \left(-\frac{\beta^2+1}{\beta^2} - \Phi_4 \right).$$

$$q = 0: \quad w = \frac{p a^4}{64 N} \left(2 \frac{\kappa}{1+\mu} - 1 \right), \quad M_r = M_t = \frac{p a^2}{16} \kappa.$$

$$q = 1: \quad w' = -\frac{p a^3}{16 N} \left(\frac{\kappa}{1+\mu} - 1 \right), \quad M_r = -\frac{p a^2}{16} (1-\mu) \frac{\beta^2-1}{\beta^2},$$

$$M_t = \frac{p a^2}{16} (1-\mu) \frac{\beta^2+1}{\beta^2}, \quad Q_r = -\frac{p a}{2}.$$

$$q = \beta: \quad w = -\frac{p a^4}{32 N} \left[\frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{\beta^2-1}{\beta^2} + 2 \ln \beta \right], \quad w' = -\frac{p a^3}{8 N (1+\mu) \beta}, \quad M_t = \frac{p a^2}{8} \frac{1-\mu}{\beta^2}.$$



$$\kappa = (1-\mu) \left(\beta - \frac{1}{\beta} \right) + 2(1+\mu) \beta \ln \beta.$$

$$q \leq 1: \quad w = -\frac{P a^3}{8 N} \frac{\kappa}{1+\mu} \Phi_1, \quad M_r = M_t = -\frac{P a}{4} \kappa, \quad Q_r = 0.$$

$$q \geq 1: \quad w = \frac{P a^3}{8 N} \left\{ -\left[\frac{\kappa}{1+\mu} + 2\beta \right] \Phi_1 - 2\beta \Phi_3 - 2\beta \Phi_2 \right\},$$

$$M_r = -\frac{P a}{4} [\kappa + (1-\mu) \beta \Phi_4 - 2(1+\mu) \beta \Phi_3], \quad Q_r = +P \frac{\beta}{q}.$$

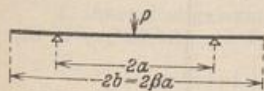
$$M_t = -\frac{P a}{4} [\kappa - (1-\mu) \beta \Phi_4 - 2(1+\mu) \beta \Phi_3].$$

$$q = 0: \quad w = -\frac{P a^3}{8 N (1+\mu)} \kappa.$$

$$q = 1: \quad w' = \frac{P a^2}{4 N (1+\mu)} \kappa; \quad M_r = M_t = -\frac{P a}{4} \kappa.$$

$$q = \beta: \quad w = \frac{P a^3}{8 N (1+\mu)} \left\{ [(1-\mu) + (3+\mu) \beta^2] \left(\beta - \frac{1}{\beta} \right) - 2\kappa \right\},$$

$$w' = \frac{P a^2}{2 N (1+\mu)} (\beta^2 - 1); \quad M_t = \frac{P a}{2 \beta} (1-\mu) (1-\beta^2).$$



$$\kappa = 2(1+\mu) \beta^2.$$

$$q \leq 1: \quad w = \frac{P a^2}{8 \pi N} \left[\left(\frac{1-\mu}{\kappa} + 1 \right) \Phi_1 + \Phi_2 \right],$$

$$M_r = -\frac{P}{8 \pi \beta^2} [(1-\mu) (\beta^2-1) + \kappa \Phi_3],$$

$$M_t = -\frac{P}{8 \pi \beta^2} [-(1-\mu) (\beta^2+1) + \kappa \Phi_3]; \quad Q_r = -\frac{P}{2 \pi a q}.$$

$$e \geq 1: \quad w = \frac{P a^2}{8 \pi N} \left(\frac{1-\mu}{\kappa} \Phi_1 - \Phi_3 \right), \quad M_r = -\frac{P}{8 \pi \beta^2} (1-\mu) [(\beta^2-1) + \beta^2 \Phi_4],$$

$$M_t = -\frac{P}{8 \pi \beta^2} (1-\mu) [-(\beta^2+1) - \beta^2 \Phi_4]; \quad Q_r = 0.$$

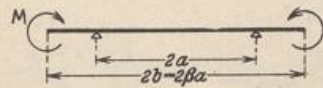
$$e = 0: \quad w = \frac{P a^2}{8 \pi N} \left(\frac{1-\mu}{\kappa} + 1 \right).$$

$$e = 1: \quad w' = -\frac{P a}{8 \pi N} \left(2 \frac{1-\mu}{\kappa} + 1 \right), \quad M_r = -\frac{P}{8 \pi \beta^2} (1-\mu) (\beta^2-1);$$

$$M_t = \frac{P}{8 \pi \beta^2} (1-\mu) (\beta^2+1).$$

$$e = \beta: \quad w = -\frac{P a^2}{8 \pi N} \left[\frac{1-\mu}{\kappa} (\beta^2-1) + \ln \beta \right]; \quad w' = -\frac{P a}{4 \pi N (1+\mu) \beta},$$

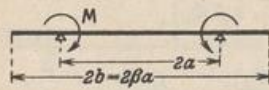
$$M_t = \frac{P}{4 \pi \beta^2} (1-\mu).$$



$$w = \frac{M a^2}{2 N (1+\mu)} \Phi_1; \quad M_r = M_t = M; \quad Q_r = 0.$$

$$e = 0: \quad w = \frac{M a^2}{2 N (1+\mu)}; \quad e = 1: \quad w' = -\frac{M a}{N (1+\mu)}.$$

$$e = \beta: \quad w = -\frac{M a^2}{2 N (1+\mu)} (\beta^2-1); \quad w' = -\frac{M b}{N (1+\mu)}.$$



$$\psi = \frac{1-\mu}{\beta^2}; \quad \kappa = (1+\mu) + \psi.$$

$$e \leq 1: \quad w = \frac{M a^2}{4 N} \frac{\kappa}{1+\mu} \Phi_1, \quad M_r = M_t = \frac{M}{2} \kappa, \quad Q_r = 0.$$

$$e \geq 1: \quad w = \frac{M a^2}{4 N} \left(\frac{\psi}{1+\mu} \Phi_1 - 2 \Phi_3 \right); \quad Q_r = 0,$$

$$M_r = \frac{M}{2} (1-\mu) \left[\left(\frac{1}{\beta^2} - 1 \right) - \Phi_4 \right], \quad M_t = \frac{M}{2} (1-\mu) \left[\left(\frac{1}{\beta^2} + 1 \right) + \Phi_4 \right].$$

$$e = 0: \quad w = \frac{M a^2}{4 N} \frac{\kappa}{1+\mu}.$$

$$e = 1: \quad w' = -\frac{M a}{2 N} \left(1 + \frac{\psi}{1+\mu} \right),$$

$$M_{r,t} = \frac{M}{2} \kappa; \quad M_{r,a} = -\frac{M}{2} (2 - \kappa),$$

$$M_{t,t} = \frac{M}{2} \kappa; \quad M_{t,a} = \frac{M}{2} \psi (\beta^2 + 1).$$

$$e = \beta: \quad w = -\frac{M a^2}{4 N} \left[\frac{\psi}{1+\mu} (\beta^2-1) + 2 \ln \beta \right].$$

$$w' = -\frac{M a}{N (1+\mu) \beta}, \quad M_t = M \psi.$$

Tabelle 64. Funktionen Φ_0 bis Φ_4 .

ϱ	Φ_0	Φ_1	Φ_2	Φ_3	Φ_4
0,0	+ 1,0000	+ 1,00	0	- ∞	+ ∞
1	+ 0,9999	+ 0,99	- 0,0230	- 2,3026	+ 99,0000
2	+ 0,9984	+ 0,96	- 0,0644	- 1,6094	+ 24,0000
3	+ 0,9919	+ 0,91	- 0,1084	- 1,2040	+ 10,1111
4	+ 0,9744	+ 0,84	- 0,1556	- 0,9163	+ 5,2500
5	+ 0,9375	+ 0,75	- 0,1733	- 0,6931	+ 3,0000
6	+ 0,8704	+ 0,64	- 0,1839	- 0,5108	+ 1,7778
7	+ 0,7599	+ 0,51	- 0,1748	- 0,3567	+ 1,0408
8	+ 0,5904	+ 0,36	- 0,1428	- 0,2231	+ 0,5625
9	+ 0,3439	+ 0,19	- 0,0853	- 0,1053	+ 0,2346
1,0	0	0	0	0	0
1	- 0,4641	- 0,21	+ 0,1153	+ 0,0953	- 0,1736
2	- 1,0736	- 0,44	+ 0,2625	+ 0,1823	- 0,3056
3	- 1,8561	- 0,69	+ 0,4434	+ 0,2624	- 0,4083
4	- 2,8416	- 0,96	+ 0,6595	+ 0,3365	- 0,4898
5	- 4,0625	- 1,25	+ 0,9123	+ 0,4055	- 0,5556
6	- 5,5536	- 1,56	+ 1,2032	+ 0,4700	- 0,6094
7	- 7,3521	- 1,89	+ 1,5335	+ 0,5306	- 0,6540
8	- 9,4976	- 2,24	+ 1,9044	+ 0,5878	- 0,6914
9	- 12,0321	- 2,61	+ 2,3171	+ 0,6419	- 0,7230
2,0	- 15,0000	- 3,00	+ 2,7726	+ 0,6931	- 0,7500
1	- 18,4481	- 3,41	+ 3,2719	+ 0,7419	- 0,7732
2	- 22,4256	- 3,84	+ 3,8161	+ 0,7885	- 0,7934
3	- 26,9841	- 4,29	+ 4,4061	+ 0,8329	- 0,8110
4	- 32,1776	- 4,76	+ 5,0427	+ 0,8755	- 0,8264
5	- 38,0625	- 5,25	+ 5,7268	+ 0,9163	- 0,8400

Beispiel für die Anwendung der Tabelle 63.

Der Verlauf der Biegemomente wird für eine Kreisringplatte mit verschiedener Stützung aus der Tabelle 63 entwickelt ($\mu = 1/2$).

1. Innen eingespannte Kreisringplatte (Abb. 632a).

Mit $\beta = b/a = 5,5/2,5 = 2,20$ ist nach S. 657

$$\kappa_1 = 5,20, \quad \kappa_2 = 6,48, \quad \psi_1 = 17,808, \quad \psi = 17,185.$$

Damit wird

$$M_r = -6,6445 + 1,2370 \Phi_1 - 5,5942 \Phi_4 + 8,8230 \Phi_3,$$

$$M_t = -1,1074 + 0,5859 \Phi_1 + 5,5942 \Phi_4 + 8,8230 \Phi_3 \quad (\text{Abb. 633a})$$

2. Innen frei gelagerte Kreisringplatte (Abb. 632b).

Mit $\beta = 2,20$ ist nach S. 655

$$\kappa_1 = -1,4710, \quad \kappa_2 = 7,8043, \quad \text{und damit}$$

$$M_r = 1,2370 \Phi_1 + 2,7811 \Phi_4 + 8,8230 \Phi_3,$$

$$M_t = 0,5859 \Phi_1 - 2,7811 \Phi_4 + 8,8230 \Phi_3 - 11,2132 \quad (\text{Abb. 633b}).$$

3. Außen eingespannte Kreisringplatte (Abb. 632c).

Mit $\beta = \frac{b}{a} = \frac{2,5}{5,5} = 0,4545$ ist nach S. 657

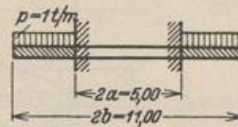


Abb. 632 a.

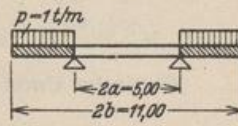


Abb. 632 b.

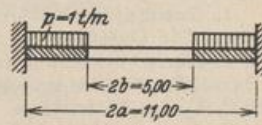


Abb. 632 c.

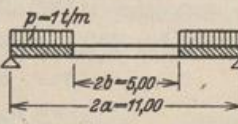


Abb. 632 d.

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= 1,33884, & \kappa_2 &= 1,07438, & \psi_1 &= -0,760222, & \psi &= 0,111273; \\ M_r &= -2,6395 + 5,9870 \Phi_1 - 0,1753 \Phi_4 + 1,8229 \Phi_3, \\ M_t &= -0,4399 + 2,8359 \Phi_1 + 0,1753 \Phi_4 + 1,8229 \Phi_3 \quad (\text{Abb. 633 c}). \end{aligned}$$

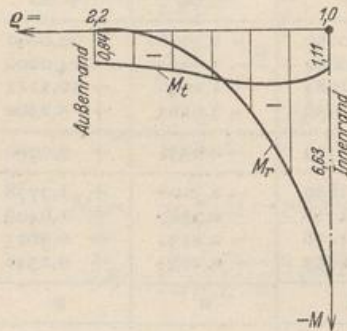


Abb. 633a.

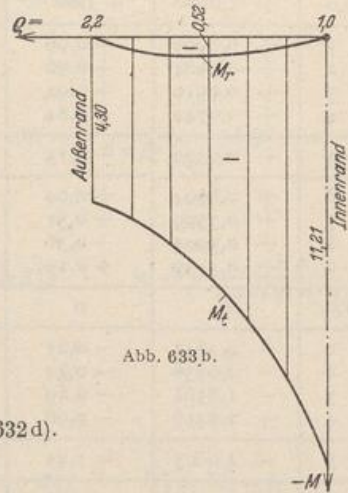


Abb. 633b.

4. Außen frei gelagerte Kreisringplatte (Abb. 632 d).
Mit $\beta = 0,4545$ ist nach § 655

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= 2,2085, & \kappa_2 &= 4,1249; \\ M_r &= 5,9870 \Phi_1 - 0,8627 \Phi_4 + 1,8229 \Phi_3, \\ M_t &= 2,8359 \Phi_1 + 0,8627 \Phi_4 + 1,8229 \Phi_3 + 3,5743 \quad (\text{Abb. 633 d}). \end{aligned}$$

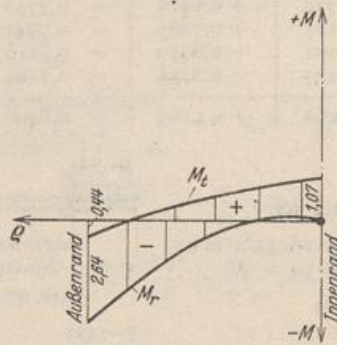


Abb. 633c.

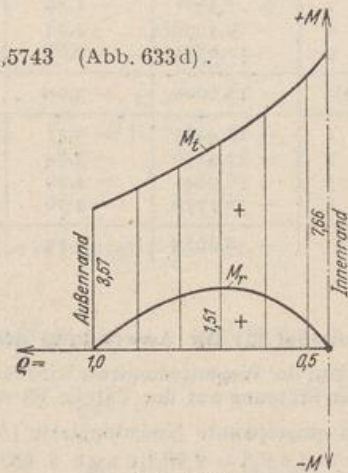


Abb. 633d.

Statische Untersuchung für die Decke eines kreisrunden Behälters mit Zwischenstützen.

Der Abstand der Stützen auf dem Parallelkreis $r = a$ ist so klein, daß die Punkt- oder Flächenkräfte durch eine rotationsymmetrische Linienstützung ersetzt werden können.

1. Geometrische Grundlagen. Die Abmessungen des Tragwerks sind in Abb. 634a enthalten. Die Querdehnung wird mit $\mu = 1/6$ eingesetzt.

2. Hauptsystem und Überzählige. Zur Berechnung dient das Hauptsystem Abb. 634b. Überzählige Größen sind die Linienstützkraft X_1 über den ganzen äußeren Rand und die Stützkraft X_2 der Mittelstütze.

3. Formänderung und Schnittkräfte des Hauptsystems. Die Verschiebungen werden im Nfachen Betrag angegeben und von den Schnittkräften nur die Biegemomente M_r berechnet.

$$\begin{aligned} \text{Zustand } X_1 &= -1 \quad (\text{Abb. 634c, Tabelle 63 S. 659}). \\ \beta &= 2,0, & \ln \beta &= 0,693147, & \kappa &= 4,48469, \\ \delta_{11} &= 0,30216 \frac{a^2}{\pi}, & \delta_{21} &= -0,12013 \frac{a^2}{\pi}, \end{aligned}$$

$$w_i = -\frac{a^2}{\pi} 0,12013 \Phi_1, \quad w_a = \frac{a^2}{\pi} (-0,24513 \Phi_1 - 0,125 \Phi_3 - 0,125 \Phi_2),$$

$$M_{r,i} = -\frac{1}{\pi} 0,28029, \quad M_{r,a} = -\frac{1}{\pi} (0,28029 + 0,10417 \Phi_4 - 0,29167 \Phi_3).$$

Zustand $X_2 = -1$ (Abb. 634d, Tabelle 63 S. 659).

$$\kappa = 9,33333, \quad \delta_{22} = 0,13616 \frac{a^2}{\pi}, \quad \delta_{12} = -0,12013 \frac{a^2}{\pi},$$

$$w_i = \frac{a^2}{\pi} (0,13616 \Phi_1 + 0,125 \Phi_2), \quad w_a = \frac{a^2}{\pi} (0,01116 \Phi_1 - 0,125 \Phi_3),$$

$$M_{r,i} = -\frac{1}{\pi} (0,07812 + 0,29167 \Phi_3),$$

$$M_{r,a} = -\frac{1}{\pi} (0,07812 + 0,10417 \Phi_4).$$

Belastung durch p t/m (Abb. 634e, Tabelle 63 S. 658).

$$\kappa_1 = -5,27208, \quad \kappa_2 = -23,9387,$$

$$\delta_{10} = 0,42516 p a^4, \quad \delta_{20} = -0,15686 p a^4,$$

$$w_i = -p a^4 (0,14123 \Phi_1 + 0,01562 \Phi_0),$$

$$w_a = -p a^4 (0,64122 \Phi_1 + 0,01562 \Phi_0 + 0,5 \Phi_3 + 0,5 \Phi_2),$$

$$M_{r,i} = p a^2 (-0,52742 + 0,19792 \Phi_1),$$

$$M_{r,a} = p a^2 (-0,52742 + 0,19792 \Phi_1 - 0,41667 \Phi_4 + 1,16667 \Phi_3).$$

4. Elastizitätsgleichungen nach Erweiterung

mit $\frac{\pi}{a^2}$

	X_1	X_2	
1	+0,30216	-0,12013	+0,42516 $p a^2 \pi$
2	-0,12013	+0,13616	-0,15686 $p a^2 \pi$

Lösung: $X_1 = 1,4618 p a^2 \pi$, $X_2 = 0,1377 p a^2 \pi$.

5. Superposition.

$$w = w_0 - X_1 w_1 - X_2 w_2,$$

$$w_i = p a^4 (-0,14123 \Phi_1 - 0,01562 \Phi_0) - 1,4618 p a^2 \pi \cdot \frac{a^2}{\pi} (-0,12013 \Phi_1) - 0,1377 p a^2 \pi \cdot \frac{a^2}{\pi} (0,13616 \Phi_1 + 0,125 \Phi_2),$$

$$= p a^4 (-0,01562 \Phi_0 + 0,01561 \Phi_1 - 0,01721 \Phi_2),$$

$$w_a = p a^4 (-0,01562 \Phi_0 - 0,28444 \Phi_1 - 0,31728 \Phi_2 - 0,30006 \Phi_3),$$

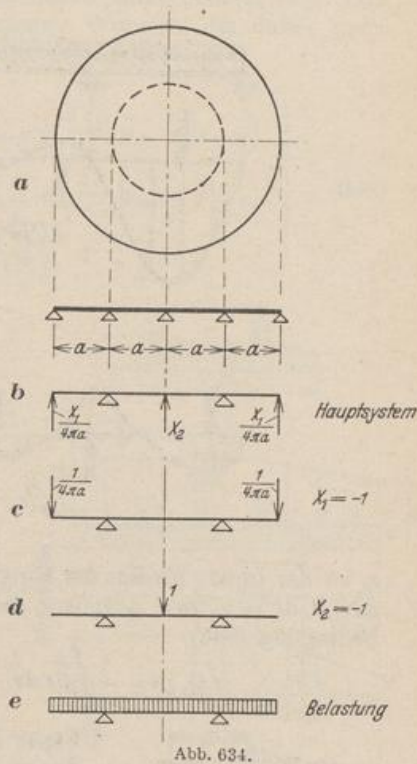
$$M_{r,i} = p a^2 (-0,10693 + 0,19792 \Phi_1 + 0,04016 \Phi_3),$$

$$M_{r,a} = p a^2 (-0,10693 + 0,19792 \Phi_1 + 0,74031 \Phi_3 - 0,25005 \Phi_4).$$

Die Biegelinie und die Biegemomente M_r , ferner M_t und Q_r sind in Abb. 635 dargestellt.

Platten mit veränderlicher Dicke. Werden die Ausdrücke (945) der Biegemomente M_r, M_α in die allgemeingültigen Gleichgewichtsbedingungen (947) eingesetzt, so entsteht die Differentialgleichung

$$N \Delta \Delta w + \frac{dN}{dr} \left(2 \frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{2 + \mu}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) + \frac{d^2 N}{dr^2} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} \right) = p. \quad (959)$$



Sie läßt sich durch Differentiation aus

$$\frac{d}{dr} \left[r N \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) + r \frac{dN}{dr} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} \right) \right] = p r \quad (960)$$

gewinnen und daher mit $dw/dr = \text{tg } \varphi \approx \varphi$ und $\bar{\varphi} = \varphi E h_0^3 / 12 (1 - \mu^2) = \varphi N_0$ auch als Differentialgleichung 2ter Ordnung anschreiben:

$$\frac{N}{N_0} \frac{d^2 \bar{\varphi}}{dr^2} + \left(\frac{N}{r N_0} + \frac{dN}{N_0 dr} \right) \frac{d\bar{\varphi}}{dr} - \left(\frac{N}{N_0} \frac{1}{r^2} - \frac{\mu}{r} \frac{dN}{N_0 dr} \right) \bar{\varphi} = \frac{1}{r} \left[\int_{r_i}^r p r dr + C \right]. \quad (961)$$

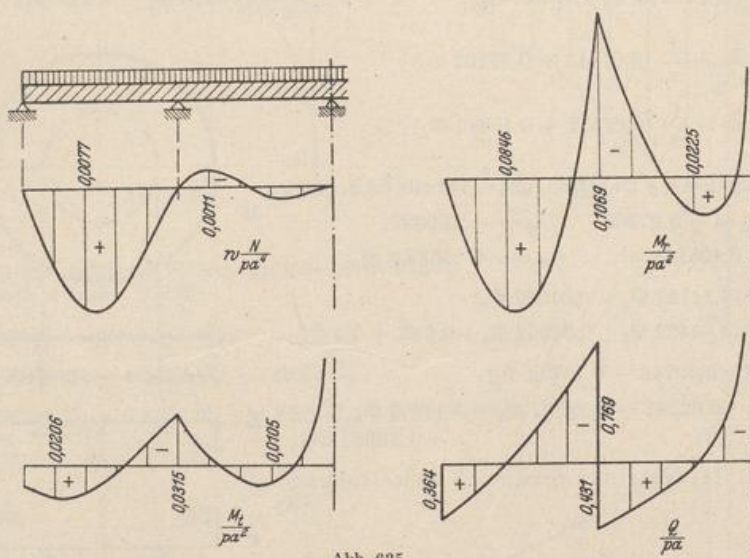


Abb. 635.

r_i ist der innere Radius der Ringplatte (Abb. 636). Die Funktionen $N/N_0 = h^3/h_0^3 = v_1$, $dN/N_0 dr = v_2$ sind gegeben; die rechte Seite ist das Integral zur Gleichgewichtsbedingung (946).

$$r Q_{rz} = - \int_{r_i}^r p r dr + C \quad \text{und daher} \quad C = r Q_{rz} + \int_{r_i}^r p r dr. \quad (962)$$



Abb. 636.

Freier Außenrand ($r_s = r_i$, Abb. 636), $Q_{rz,a} = 0$, $C = \mathfrak{F}$.
 Freier Innenrand ($r_s = r_a$, Abb. 636), $Q_{rz,i} = 0$, $C = 0$.
 Freier Innen- und Außenrand ($r_i < r_s < r_a$), $Q_{rz,i} = 0$, $C = 0$.
 In diesem Falle ist die Querkraft in $r = r_s$ unstetig, die Lösung der Gl. (961) daher für zwei Bereiche anzuschreiben. Nach Division mit v_1 lautet die Gl. (961)

$$\frac{d^2 \bar{\varphi}}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} + \frac{v_2}{v_1} \right) \frac{d\bar{\varphi}}{dr} - \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\mu}{r} \frac{v_2}{v_1} \right) \bar{\varphi} = \frac{1}{r v_1} \left[\int_{r_i}^r p r dr + C \right]. \quad (963)$$

Sie läßt sich leicht angenähert berechnen, wenn die Differentialquotienten durch Differenzenquotienten ersetzt werden. Hierbei ist die Unstetigkeit der Querkraft bei einer Stützung nach Abb. 636 ohne Bedeutung für die Lösung. Die bekannten Vorzeichen der Gleichung werden durch einzelne Buchstaben abgekürzt. Es ist

$$\frac{1}{r} + \frac{v_2}{v_1} = a, \quad \frac{1}{r^2} - \frac{\mu}{r} \frac{v_2}{v_1} = b, \quad \frac{1}{v_1 r} \left(\int_{r_i}^r p r dr + C \right) = K. \quad (964)$$

Der Integrationsbereich ($r_a - r_i$) zerfällt in n Stufen von konstanter Breite s mit den Intervallgrenzen $0, \dots, m, \dots, n$. Die Bedingung für die Formänderung der

Platte am Punkte m kann also in Verbindung mit den Bemerkungen auf S. 129 folgendermaßen angeschrieben werden:

$$\begin{aligned}
 & + \Delta^2 \bar{\varphi}_m + s a_m \Delta \bar{\varphi}_m - s^2 b_m \bar{\varphi}_m = K_m s^2, \\
 - \bar{\varphi}_{m-1} \left(1 - \frac{s a_m}{2}\right) + \bar{\varphi}_m (2 + s^2 b_m) - \bar{\varphi}_{m+1} \left(1 + \frac{s a_m}{2}\right) &= -K_m s^2, \quad (965) \\
 & m = 0 \dots n.
 \end{aligned}$$

Der Ansatz enthält $(n + 3)$ unbekannte Wurzeln φ_m in $(n + 1)$ linearen Gleichungen, die daher noch durch die Randbedingungen für $r = r_i$ und $r = r_a$ ergänzt werden müssen. Bei freien oder frei aufliegenden Rändern ist $M_i = 0, M_a = 0$, bei eingespannten Rändern $\varphi_i = 0, \varphi_a = 0$, bei der Kreisplatte außerdem $\varphi_i = 0$. Der Kern der Matrix enthält in jeder Zeile 3 unbekannte Wurzeln, die daher nach Abschn. 29 oder durch Iteration nach Abschn. 30 berechnet werden.

Die Schnittkräfte sind

$$\left. \begin{aligned}
 M_r &= -\frac{N}{N_0} \left(\frac{d\bar{\varphi}}{dr} + \frac{\mu}{r} \bar{\varphi} \right) \rightarrow -\frac{v_{1,m}}{2s} \left(\bar{\varphi}_{m+1} + \frac{2s\mu}{r_m} \bar{\varphi}_m - \bar{\varphi}_{m-1} \right), \\
 M_\alpha &= -\frac{N}{N_0} \left(\mu \frac{d\bar{\varphi}}{dr} + \frac{1}{r} \bar{\varphi} \right) \rightarrow -\frac{\mu v_{1,m}}{2s} \left(\bar{\varphi}_{m+1} + \frac{2s}{\mu r_m} \bar{\varphi}_m - \bar{\varphi}_{m-1} \right), \\
 Q_r &= -\frac{N}{N_0} \left(\frac{d^2 \bar{\varphi}}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \bar{\varphi} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{\varphi}}{dr} \right) + \frac{dN}{N_0 dr} \left(\frac{d\bar{\varphi}}{dr} + \frac{\mu}{r} \bar{\varphi} \right) \\
 &\rightarrow -\frac{v_{1,m}}{s^2} \left[\left(1 + \frac{s}{2r_m} - \frac{s}{2} \frac{v_{2,m}}{v_{1,m}}\right) \varphi_{m+1} \right. \\
 &\quad \left. - \left(2 + \frac{s^2}{r_m^2} + \mu \frac{s^2}{r_m} \frac{v_{2,m}}{v_{1,m}}\right) \varphi_m \right. \\
 &\quad \left. + \left(1 - \frac{s}{2r_m} + \frac{s}{2} \frac{v_{2,m}}{v_{1,m}}\right) \varphi_{m-1} \right].
 \end{aligned} \right\} (966)$$

Die Verformung der Platte folgt aus $d w / dr = \bar{\varphi} / N_0$ zu

$$w_{m+0,5} = w_{m-0,5} + \frac{\bar{\varphi}_m}{N_0} s. \quad (967)$$

Berechnung der Gründungsplatte für einen Schornstein.

1. Geometrische Grundlagen. Abmessungen der Platte nach Abb. 637.

$$h_0 = h_6 = 2,2 \text{ m}, \quad h_{10} = 1,5 \text{ m}.$$

Intervallbreite $s = r_a / 10 = 0,9 \text{ m}$. Im schrägen Teil der Platte ist

$$h_m = h_6 - (h_6 - h_{10}) \frac{m-6}{n-6} = 2,2 - 0,175(m-6),$$

$$n = 10, \quad m = 6 \div 10.$$

$$\mu = \frac{1}{6}, \quad N_0 = \frac{2100000 \cdot 2,2^3}{12 \cdot (1 - 0,028)} = 1918000 \text{ tm}^2/\text{m}.$$

2. Belastung. Ringförmige Belastung P nach Abb. 637 a. Der Bodendruck $\bar{p} = P / r_a^2 \pi$ wird gleichmäßig verteilt angenommen.

3. Vorzahlen der Differenzgleichungen (965) nach (964)

$$v_1 = \frac{h^3}{h_0^3}, \quad v_2 = \frac{1}{h_0^3} \frac{d}{dr} (h^3) = \frac{3 h^2}{h_0^3} \frac{1}{s} \frac{d}{dm} (h), \quad (\text{Abb. 637 b})$$

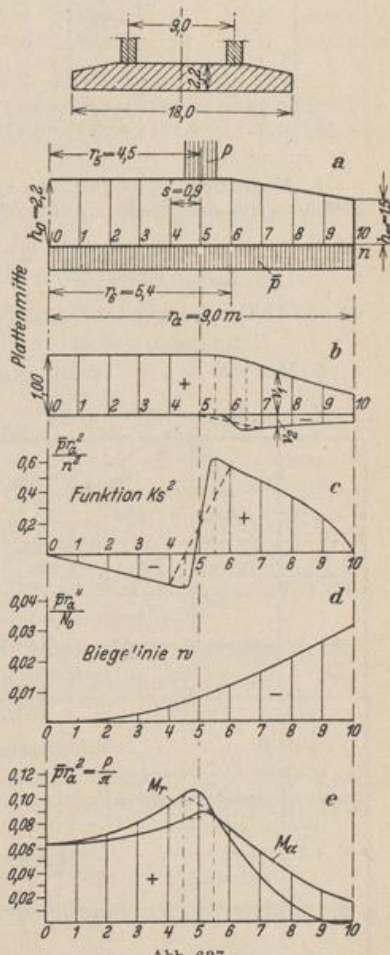


Abb. 637.

$$0 \leq m \leq 6: \quad v_{1,m} = 1, \quad v_{2,m} = 0,$$

$$6 \leq m \leq 10: \quad v_{1,m} = \frac{h_m^3}{10,65}, \quad v_{2,m} = -0,0548 \frac{h_m^2}{n^2}.$$

$$\frac{s a_m}{2} = \frac{1}{2m} + 0,45 \frac{v_2}{v_1},$$

$$s^2 b_m = \frac{1}{m^2} - \frac{0,15}{m} \frac{v_2}{v_1}.$$

Für freien Innenrand ($r_i = 0$) ist nach S. 664 $C = 0$ und daher nach (964)

$$K s^2 = \frac{s^2}{r_1 r} \int_0^r p r dr.$$

$$0 \leq m \leq 5: \quad K_m s^2 = -\bar{p} r_a^3 \frac{m}{2 v_1 n^3}, \quad 5 \leq m \leq 10: \quad K_m s^2 = -\bar{p} r_a^3 \frac{1}{2 v_1 n^3} \left(m - \frac{n^2}{m} \right).$$

An den Unstetigkeitsstellen $m = 5$ und 6 werden die Funktionswerte v_1, v_2, K_m nach Abb. 637 c festgesetzt.

m	h	$v_{1,m}$	$v_{2,m}$	$\frac{1}{2m}$	$0,45 \frac{v_2}{v_1}$	$\frac{s a_m}{2}$	$\frac{1}{m^2}$	$0,15 \frac{v_2}{m v_1}$	$s^2 b_m$	$\frac{m}{2 v_1 n}$	$\frac{n}{2 v_1 m}$	$K_m s^2$
1	2,200	1	0	0,500	0	0,500	1	0	1	0,050	—	$-0,050 \cdot \bar{p} r_a^3 / n^2$
2	2,200	1	0	0,250	0	0,250	0,250	0	0,250	0,100	—	$-0,100 \cdot \bar{p} r_a^3 / n^2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
9	1,675	0,441	-0,154	0,056	-0,157	-0,213	0,012	-0,006	0,018	1,022	1,261	$-0,239 \cdot \bar{p} r_a^3 / n^2$
10	1,500	0,317	-0,124	0,050	-0,175	-0,225	0,010	-0,006	0,016	1,579	1,579	0

4. Randbedingungen. In Plattenmitte ist $\varphi_0 = 0$, daher wird die erste Differenzgleichung für den Punkt 1 aufgestellt. Bei $m = 10$ ist $M_{10} = 0$, so daß nach (966)

$$\bar{\varphi}_{11} + \frac{2s\mu}{r_{10}} \bar{\varphi}_{10} - \bar{\varphi}_9 = \bar{\varphi}_{11} + 0,0333 \bar{\varphi}_{10} - \bar{\varphi}_9 = 0$$

ist und 11 Gleichungen für die 11 Unbekannten $\bar{\varphi}_m, m = 1 \dots 11$ zur Verfügung stehen.

5. Matrix der Differenzgleichungen (965) nach Elimination von φ_{11} .

$\bar{\varphi}_1$	$\bar{\varphi}_2$	$\bar{\varphi}_3$	$\bar{\varphi}_4$	$\bar{\varphi}_5$	$\bar{\varphi}_6$	$\bar{\varphi}_7$	$\bar{\varphi}_8$	$\bar{\varphi}_9$	$\bar{\varphi}_{10}$	$\frac{\bar{p} r_a^3}{n^2}$
3,000	-1,500									0,050
-0,750	2,250	-1,250								0,100
	-0,833	2,111	-1,167							0,150
		-0,875	2,063	-1,125						0,200
			-0,900	2,040	-1,100					-0,167
				-1,134	2,031	-0,866				-0,561
					-1,201	2,027	-0,799			-0,466
						-1,204	2,022	-0,796		-0,367
							-1,213	2,018	-0,787	-0,239
								-2,000	2,042	0

Die Auflösung nach Abschn. 29 liefert

$\bar{\varphi}_1$	$\bar{\varphi}_2$	$\bar{\varphi}_3$	$\bar{\varphi}_4$	$\bar{\varphi}_5$	$\bar{\varphi}_6$	$\bar{\varphi}_7$
-0,54941	-1,13216	-1,78824	-2,55517	-3,47254	-4,19757	-4,64943
			$\bar{\varphi}_8$	$\bar{\varphi}_9$	$\bar{\varphi}_{10}$	$\bar{\varphi}_{11}$
			-4,90251	-4,95976	-4,85775	-4,79800
						$\frac{\bar{p} r_a^3}{n^2}$

6. Die Verformung der Platte. Nach (967) ist für die Zwischenpunkte $w_{m+0,5} = w_{m-0,5} + \bar{\varphi}_m s/N_0$. Die Verformung wird mit $w_{0,5} = 0$ auf den Plattenmittelpunkt bezogen, so daß mit

$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}^* \bar{p} r_a^3 / n^2; \quad w_{m+0,5} = \frac{\bar{p} r_a^4}{n^3 N_0} \sum \bar{\varphi}^*. \quad \text{Abb. 637 d.}$$

$w_{0,5}$	$w_{1,5}$	$w_{2,5}$	$w_{3,5}$	$w_{4,5}$	$w_{5,5}$	$w_{6,5}$	$w_{7,5}$	$w_{8,5}$	$w_{9,5}$	$w_{10,5}$	
0	-0,5494	-1,6816	-3,4698	-6,0250	-9,4975	-13,6951	-18,3445	-23,2470	-28,2008	-33,0645	$\frac{\bar{p} r_a^4}{1000 N_0}$

7. Die Schnittkräfte. Mit $r_m/s = m$ und $r_a/s = n$ wird aus (966)

$$M_{r,m} = -\frac{r_{1,m}}{2n} \left(\bar{\varphi}_{m+1}^* + \frac{1}{3m} \bar{\varphi}_m^* - \bar{\varphi}_{m-1}^* \right) \bar{p} r_a^2.$$

$$M_{\alpha,m} = -\frac{r_{1,m}}{12n} \left(\bar{\varphi}_{m+1}^* + \frac{12}{m} \bar{\varphi}_m^* - \bar{\varphi}_{m-1}^* \right) \bar{p} r_a^2.$$

In Plattenmitte ist $\bar{\varphi}_0 = 0$, $\left(\frac{\bar{\varphi}_m}{m} \right)_{m \rightarrow 0} \approx \bar{\varphi}_1$, $\bar{\varphi}_{-1} = -\bar{\varphi}_1$.

Z. B. ist

$$M_{r,0} = -\frac{1}{20} \left(-0,54941 - \frac{1}{3} \cdot 0,54941 - 0,54941 \right) \bar{p} r_a^2 = 0,0641 \bar{p} r_a^2 \text{ mt.}$$

$$M_{r,1} = -\frac{1}{20} \left(-1,13216 - \frac{1}{3} \cdot 0,54941 + 0 \right) \bar{p} r_a^2 = 0,0658 \bar{p} r_a^2 \text{ mt.}$$

$$M_{r,2} = -\frac{1}{20} \left(-1,78824 - \frac{1}{6} \cdot 1,13216 + 0,54941 \right) \bar{p} r_a^2 = 0,0714 \bar{p} r_a^2 \text{ mt.}$$

Die Momente sind in Abb. 637e dargestellt. Positive Momente erzeugen auf der Plattenunterseite Zugspannungen. Im Lastbereich wird die Momentenlinie parabelförmig ergänzt.

Um ein Urteil über die Genauigkeit der Differenzmethode zu bekommen, sind die Momente M_r der Gründungsplatte mit gleichbleibender Dicke $h = 2,2$ m für eine Intervallteilung $n = 6$ und $n = 10$ berechnet und in Abb. 638 mit den Werten der exakten Berechnung ($n = \infty$) nach Tabelle 63 verglichen worden.

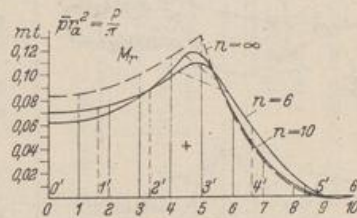


Abb. 638.

Kreisplatte mit gleichbleibender Dicke auf elastischer Bettung. Die äußeren Kräfte bestehen aus der Auflast $\bar{p}(r)$ und dem Bodendruck $\bar{\phi}(r)$, der nach den Angaben auf S. 17 proportional zur Einsenkung w der Platte gesetzt werden soll ($\bar{\phi} = cw$). Daher besteht zwischen dem Verschiebungszustand w und den äußeren Kräften nach (948) folgende Differentialbeziehung:

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + 2 \frac{1}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} + \frac{c}{N} w = \frac{\bar{p}}{N}. \quad (968)$$

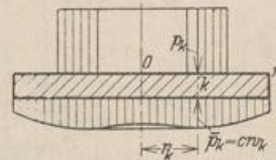


Abb. 639.

Sie besitzt auch Bedeutung für $\bar{p} = 0$, um den Verschiebungszustand w für vorgeschriebene Randkräfte $M_{r=r_n}$, $Q_{r=r_n}$ anzugeben.

Um den geometrischen Zusammenhang in einfacher Weise zu klären, werden die Differentialquotienten hier ebenfalls durch Differenzenquotienten ersetzt. Dabei zerfällt der Integrationsbereich wiederum in n Stufen mit der konstanten Breite s . Für den Punkt k mit $r = r_k$, $s/r_k = \lambda_k$ und $p = p_k$ entsteht folgende Gleichung k ($k = 0, \dots, n$),

$$(1 - \lambda_k)w_{k-2} - \left[2(2 - \lambda_k) + \frac{\lambda_k^2}{2}(2 + \lambda_k)\right]w_{k-1} + \left[6 + 2\lambda_k^2 + \frac{c s^4}{N}\right]w_k - \left[2(2 + \lambda_k) + \frac{\lambda_k^2}{2}(2 - \lambda_k)\right]w_{k+1} + (1 + \lambda_k)w_{k+2} = \frac{p_k s^4}{N}. \quad (969)$$

Die Wurzeln w_k des Ansatzes werden entweder mit dem Gaußschen Algorithmus nach S. 216 ff. oder durch Iteration einer Anfangslösung nach Abschn. 30 berechnet. Die fehlenden Gleichungen liefern die Randbedingungen. Die Schnittkräfte sind dann aus den Verschiebungen w_k folgendermaßen bestimmt:

$$\left. \begin{aligned} M_{r,k} &= -\frac{N}{s^2} (\Delta^2 w_k + \mu \frac{s}{r_k} \Delta w_k) = -\frac{N}{s^2} \left[w_{k+1} \left(1 + \frac{\mu s}{2 r_k}\right) - 2 w_k + w_{k-1} \left(1 - \frac{\mu s}{2 r_k}\right) \right], \\ M_{\alpha,k} &= -\frac{N \mu}{s^2} (\Delta^2 w_k + \frac{s}{\mu r_k} \Delta w_k) = -\frac{N \mu}{s^2} \left[w_{k+1} \left(1 + \frac{s}{2 \mu r_k}\right) - 2 w_k + w_{k-1} \left(1 - \frac{s}{2 \mu r_k}\right) \right], \\ Q_{rz,k} &= -\frac{N}{s^3} (\Delta^3 w_k + \frac{s}{r_k} \Delta^2 w_k - \frac{s^2}{r_k^2} \Delta w_k) \\ &= -\frac{N}{2 s^3} [w_{k+2} - w_{k+1} (2 - 2 \lambda_k + \lambda_k^2) - 4 \lambda_k w_k + w_{k-1} (2 + 2 \lambda_k + \lambda_k^2) - w_{k-2}]. \end{aligned} \right\} (970)$$

Berechnung der Gründungsplatte für einen Schornstein unter Berücksichtigung der elastischen Bettung.

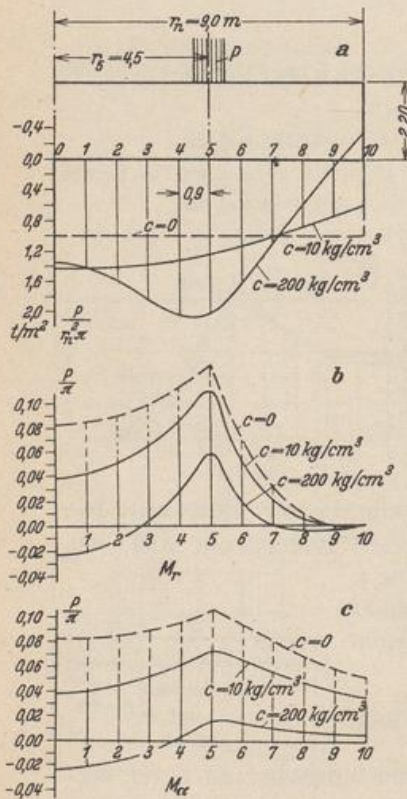


Abb. 640.

1. Geometrische Grundlagen. Abmessungen der Platte nach Abb. 640. Mit $\mu = 1/6$, $E = 2100000 \text{ t/m}^2$ ist nach S. 645

$$N = \frac{2100000 \cdot 2,2^3}{12 (1 - 0,0278)} = 1916684 \text{ tm}^2/\text{m}.$$

2. Belastung. Die senkrechte Belastung P durch den Schornstein verteilt sich auf einen Ring von der Breite s und dem mittleren Radius $r_3 = 4,5 \text{ m}$. Der Bodendruck wird nach S. 17 mit $\bar{p} = c w$ angenommen. Der Leitwert c liegt zwischen 10 und 200 kg/cm^3 , so daß die Rechnung für beide Grenzwerte durchgeführt wird.

3. Die Randbedingungen. Am Rand $r = r_{10}$ ist $M_{r,10} = 0$, $Q_{rz,10} = 0$; daher nach (970) mit $s = 0,9$, $r_{10} = 9,0$, $\lambda_{10} = 0,1$

$$1,0083 w_{11} - 2 w_{10} + 0,9917 w_9 = 0,$$

$$w_{12} - 1,81 w_{11} - 0,40 w_{10} + 2,21 w_9 - w_8 = 0.$$

In Plattenmitte ist aus Symmetriegründen $w_{-1} = w_1$, $w_{-2} = w_2$. Die Glieder der Differentialgleichung (968) werden für den Plattenmittelpunkt mit $r = 0$ unbestimmt, so daß sich die erste Differenzgleichung (969) für $k = 0$ erst nach einem Grenzübergang anschreiben läßt. Nach der Taylorentwicklung ist in der Umgebung des Mittelpunktes

$$w = w(0) + \frac{w''(0)}{2!} r^2 + \frac{w^{IV}(0)}{4!} r^4 + \dots,$$

$$w' = w'(0) r + \frac{w^{IV}(0)}{3!} r^3 + \dots,$$

$$w'' = w''(0) + \frac{w^{IV}(0)}{2!} r^2 + \dots, \quad w''' = w^{IV}(0) r + \dots,$$

$$w^{IV} = w^{IV}(0) + \dots$$

	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	$\frac{P r_m^2}{1000 \pi N}$
	16,005 217	-21,333 333	5,333 333									0
	-3,50000	8,003 423	-6,500 000	2,000 000								0
	0,500 000	-3,312 500	6,503 423	-5,187 500	1,500 000							0
		0,666 667	-3,462 964	6,225 645	-4,759 260	1,333 333						0
			0,750 000	-3,570 313	6,128 423	-4,554 688	1,250 000					0
				0,800 000	-3,644 000	6,083 423	-4,436 000	1,200 000				1
					0,833 333	-3,696 759	6,058 979	-4,358 797	1,166 667			0
						0,857 143	-3,736 152	6,044 239	-4,304 664	1,142 857		0
							0,875 000	-3,766 602	6,034 673	-4,264 648	1,125 000	0
								0,888 889	-3,790 812	4,935 368	-2,030 024	0
									2,000 000	-4,059 658	2,063 071	0

6. Die Auflösung nach Abschn. 29 liefert:

k	Für $c = 10 \text{ kg/cm}^3$											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
w	41,721 844	41,557 311	41,022 914	40,937 339	38,467 969	36,132 603	32,802 740	29,042 026	25,160 666	21,311 919	17,545 764	$\frac{P r_m^2}{1000 \pi N}$
$\bar{p} = c w$	1,4282	1,4225	1,4043	1,3705	1,3168	1,2369	1,1229	0,9941	0,8613	0,7295	0,6006	$\frac{P}{r_m^2 \pi}$

Für $c = 200 \text{ kg/cm}^3$

w	1,961 285	2,061 615	2,324 233	2,668 974	2,951 416	2,948 407	2,348 391	1,590 896	0,851 008	0,166 964	-0,481 272	$\frac{P r_m^2}{1000 \pi N}$
$\bar{p} = c w$	1,3427	1,4114	1,5912	1,8272	2,0206	2,0185	1,6078	1,0892	0,5826	0,1143	-0,3295	$\frac{P}{r_m^2 \pi}$

Die Zahlenrechnung ist wegen ihrer Fehlerempfindlichkeit mit 6 Stellen durchgeführt worden.
Der Bodendruck \bar{p} ist in Abb. 640a dargestellt.

Daher lautet die Differentialgleichung (968) für den Plattenmittelpunkt $r = 0$

$$w^{IV}(0) + 2w^{IV}(0) - \frac{w^{IV}(0)}{2!} + \frac{w^{IV}(0)}{3!} + \frac{c}{N}w(0) = 0,$$

$$\frac{8}{3}w^{IV}(0) + \frac{c}{N}w(0) = 0,$$

oder in Differenzen ausgedrückt

$$\left(16 + \frac{cs^4}{N}\right)w_0 - \frac{64}{3}w_1 + \frac{16}{3}w_2 = 0.$$

4. Die Vorzahlen der Differenzgleichungen (969).

k	λ_k	$1 - \lambda_k$	$1 + \lambda_k$	$2 - \lambda_k$	$2 + \lambda_k$	λ_k^2	$[]_{k-1}$	$[]_{k+1}$	$6 + 2\lambda_k^2$
1	1	0	2	1	3	1	3,5	6,5	8
2	0,500	0,500	1,500	1,500	2,500	0,250	3,312500	5,187500	6,5
3	0,333	0,666	1,333	1,666	2,333	0,111	3,462964	4,759260	6,222
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

$$\frac{cs^4}{N} = \frac{10000 \cdot 0,9^4}{1916684} = 0,003432 \quad \text{oder} \quad \frac{200000 \cdot 0,9^4}{1916684} = 0,068462.$$

Mit $p = \frac{P}{2r_0 \cdot \pi \cdot s} = \frac{10P}{\pi r_0^2}$ wird für $k = 5$ das Absolutglied $\frac{p_5 s^4}{N} = \frac{P r_0^2}{1000 \pi N}$, die übrigen sind Null.

5. Matrix der Differenzgleichungen (969) für $c = 10 \text{ kg/cm}^3$. (Die Matrix für $c = 200 \text{ kg/cm}^3$ ergibt sich durch Addition von 0,065039 zu den Hauptgliedern.) Die Wurzeln w_{11} und w_{12} sind bereits durch die Randbedingungen eliminiert. Matrix und Auflösung s. S. 669.

7. Die Schnittkräfte. Für $r = 0$ ist

$$M_{r,0} = M_{\alpha,0} = -N(1 + \mu) \frac{d^2w}{dr^2} = -N(1 + \mu) \frac{2}{s^2}(w_1 - w_0) = +0,0384 \frac{P}{\pi}, \quad \left(-0,0234 \frac{P}{\pi}\right).$$

Mit $\frac{\mu s}{2r_k} = \frac{1}{12k}$, $\frac{s}{2\mu r_k} = \frac{3}{k}$ ist nach (970) z. B.

$$M_{r,1} = -\frac{N}{s^2} \left[\left(1 - \frac{1}{12}\right) \cdot 0 - 2w_1 + \left(1 + \frac{1}{12}\right)w_2 \right] = 0,043 \frac{P}{\pi}, \quad \left(-0,019 \frac{P}{\pi}\right),$$

$$M_{r,2} = -\frac{N}{s^2} \left[\left(1 - \frac{1}{24}\right)w_1 - 2w_2 + \left(1 + \frac{1}{24}\right)w_3 \right] = 0,051 \frac{P}{\pi}, \quad \left(-0,011 \frac{P}{\pi}\right).$$

Die eingeklammerten Werte gelten für $c = 200 \text{ kg/cm}^3$.

Die Schnittkräfte sind in Abb. 640b, c dargestellt.

Melan, E.: Die Durchbiegung einer exzentrisch durch eine Einzellast belasteten Kreisplatte. Eisenbau Bd. 11 (1920) S. 190. — Nádai, A.: Die elastischen Platten. Berlin 1925. — Schleicher, F.: Kreisplatten auf elastischer Grundlage. Berlin 1926. — Crämer, H.: Die Beanspruchung von Kreisplatten mit veränderlicher Stärke. Beton u. Eisen 1928 S. 382. — Flügge, W.: Die strenge Berechnung von Kreisplatten unter Einzellasten. Berlin 1928. — Pichler, O.: Die Biegung kreissymmetrischer Platten von veränderlicher Dicke. Berlin 1928. — Haynal-Konyi: Die Berechnung von kreisförmig begrenzten Pilzdecken bei zentralsymmetrischer Belastung. Berlin 1929. — Schmidt, H.: Ein Beitrag zur Theorie der Biegung homogener Kreisplatten. Ing.-Arch. 1930 S. 147.

69. Die Kreisplatte und die Kreisringplatte unter antimetrischer Belastung.

Die antimetrische Belastung ist graphisch durch Abb. 641, analytisch durch

$$p = p_0 \frac{r \cos \alpha}{a} \quad \text{und mit} \quad \frac{r}{a} = \varrho \quad \text{durch} \quad p = p_0 \varrho \cos \alpha \quad (971)$$

beschrieben. Sie kann als der antimetrische Teil der hydraulischen Belastung einer senkrecht oder schräg eingebauten Kreisplatte oder als der antimetrische Teil des

Bodendruckes \bar{p} eines Kreisplattenfundamentes angesehen werden, dessen Steifigkeit die Annahme des Gradliniengesetzes für \bar{p} rechtfertigt. Die Ordinaten der Biegefläche sind in diesem Falle von dem Winkel α abhängig, so daß sich die Beziehungen zwischen Belastung, Formänderung und Beanspruchung der Platte nur durch den allgemeinen Ansatz auf S. 647 beschreiben lassen.

Die Lösung der Differentialgleichung (935) besteht aus einem partikulären Integral der inhomogenen Gleichung und aus vier mit den Integrationskonstanten C_1, \dots, C_4 erweiterten Lösungen der homogenen Gleichung. Sie läßt sich daher in der folgenden Form anschreiben:

$$w = C(\varrho^5 + C_1\varrho^3 + C_2\varrho + C_3\varrho \ln \varrho + C_4\varrho^{-1}) \cos \alpha, \quad (972)$$

denn

$$A \Delta w = \frac{192}{a^4} C \varrho \cos \alpha = \frac{p_0 \varrho \cos \alpha}{N}, \quad \text{wenn } C = \frac{p_0 a^4}{192 N}. \quad (973)$$

Die Integrationskonstanten sind durch die Randbedingungen der Aufgabe bestimmt. Die Lösung vereinfacht sich für Kreisplatten, da C_3 und C_4 Null sein müssen, damit die Ausbiegung w für $\varrho = 0$ endlich bleibt. Sie lautet in diesem Falle nach S. 650 folgendermaßen:

$$\begin{aligned} w &= \frac{p_0 a^4}{192 N} (\varrho^5 + C_1 \varrho^3 + C_2 \varrho) \cos \alpha, & \frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{p_0 a^3}{192 N} (5 \varrho^4 + 3 C_1 \varrho^2 + C_2) \cos \alpha, \\ M_r &= -\frac{p_0 a^2}{192} [4(5 + \mu) \varrho^3 + 2(3 + \mu) C_1 \varrho] \cos \alpha, \\ M_\alpha &= -\frac{p_0 a^2}{192} [4(1 + 5\mu) \varrho^3 + 2(1 + 3\mu) C_1 \varrho] \cos \alpha, \\ M_{rz} &= \frac{p_0 a^2}{192} (1 - \nu) (4 \varrho^3 + 2 C_1 \varrho) \sin \alpha, \\ Q_r &= -\frac{p_0 a}{96} (36 \varrho^2 + 4 C_1) \cos \alpha, & Q_\alpha &= \frac{p_0 a}{96} (12 \varrho^3 + 4 C_1 \varrho) \sin \alpha, \\ A_r &= \frac{p_0 a}{192} [4(17 + \nu) \varrho^2 + 2(3 + \nu) C_1] \cos \alpha. \end{aligned} \quad (974)$$

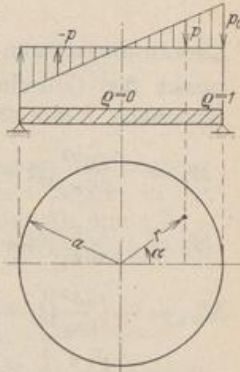


Abb. 641.

Freie Auflagerung am Rande $\varrho = 1$: $w = 0, M_r = 0$.

$$\left. \begin{aligned} 1 + C_1 + C_2 &= 0, & 4(5 + \mu) + 2(3 + \mu) C_1 &= 0, \\ C_1 &= -2 \frac{5 + \mu}{3 + \mu}, & C_2 &= \frac{7 + \mu}{3 + \mu}. \end{aligned} \right\} \quad (975)$$

Einspannung am Rande $\varrho = 1$: $w = 0, \partial w / \partial r = 0$.

$$\left. \begin{aligned} 1 + C_1 + C_2 &= 0, & 5 + 3 C_1 + C_2 &= 0. \\ C_1 &= -2, & C_2 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (976)$$

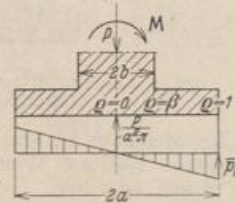


Abb. 642.

Bei einer Kreisringplatte sind die Integrationskonstanten C_3 und C_4 der allgemeinen Lösung von Null verschieden und durch die Randbedingungen $M_r = 0, A_r = 0$ am freien Rande bestimmt. Bei einer Gründungsplatte, die sich aus einer Kreisringplatte und einem starren Kern zusammensetzt (Abb. 642), genügen 3 Randbedingungen. Für $\varrho = 1$ sind M_r und A_r Null, während die Verdrehung der Elemente an der inneren Begrenzung der Ringplatte ($r = b, \varrho = b/a = \beta$) durch die Verdrehung des starren Kerns vorgeschrieben ist.

$$\frac{dw}{dr} = \frac{w}{b} \quad \text{oder} \quad \frac{dw}{d\varrho} = \frac{w}{\beta}. \quad (977)$$

Aus diesen drei Bedingungsgleichungen wird mit den Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} (3 + \mu) + (1 - \mu) \beta^4 &= \kappa_1, & 4(2 + \mu) + (1 - \mu)(3 + \beta^4) \beta^2 &= \kappa_2, \\ 4(2 + \mu) \beta^4 - (3 + \mu)(3 + \beta^4) \beta^2 &= \kappa_3, \\ C_1 &= -2 \frac{\kappa_2}{\kappa_1}, & C_3 &= 12, & C_4 &= -2 \frac{\kappa_3}{\kappa_1}. \end{aligned} \right\} (978)$$

Liefere die äußeren Kräfte an dem Tragwerk ein Moment M in bezug auf den Mittelpunkt der Gründungsplatte, so ist $\bar{p}_0 = 4M/\pi a^3$ (Abb. 642). Das Ergebnis der Rechnung lautet dann folgendermaßen:

$$\left. \begin{aligned} M_r &= \frac{\bar{p}_0 a^2}{48 \kappa_1} \{ (5 + \mu) \kappa_1 \varrho^3 - (3 + \mu) \kappa_2 \varrho + 3(1 + \mu) \kappa_1 \varrho^{-1} - (1 - \mu) \kappa_3 \varrho^{-3} \} \cos \alpha, \\ M_\alpha &= \frac{\bar{p}_0 a^2}{48 \kappa_1} \{ (1 + 5\mu) \kappa_1 \varrho^3 - (1 + 3\mu) \kappa_2 \varrho + 3(1 + \mu) \kappa_1 \varrho^{-1} + (1 - \mu) \kappa_3 \varrho^{-3} \} \cos \alpha, \\ M_{r,\alpha} &= -\frac{\bar{p}_0 a^2}{48 \kappa_1} (1 - \mu) \{ \kappa_1 \varrho^3 - \kappa_3 \varrho + 3 \kappa_1 \varrho^{-1} + \kappa_3 \varrho^{-3} \} \sin \alpha, \\ Q_r &= \frac{\bar{p}_0 a}{24} (9 \varrho^2 - 2 \frac{\kappa_2}{\kappa_1} - 3 \varrho^{-2}) \cos \alpha, \\ Q_\alpha &= -\frac{\bar{p}_0 a}{24} (3 \varrho^3 - 2 \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \varrho + 3 \varrho^{-1}) \sin \alpha. \end{aligned} \right\} (979)$$

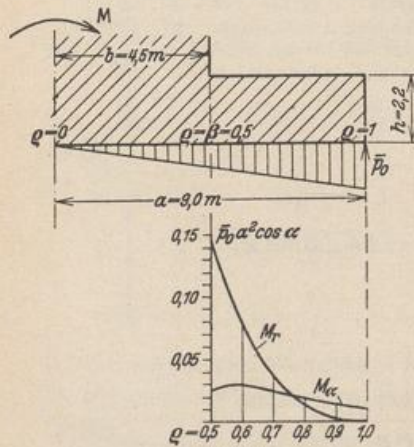


Abb. 643.

Berechnung der Gründungsplatte eines Schornsteins für antimetrische Belastung.

1. Geometrische Grundlagen. Abmessungen der Platte nach Abb. 643. Der mittlere Teil, auf dem der Schornstein aufsitzt, wird als starr angenommen.

2. Belastung. Die Belastung besteht aus dem Moment M infolge Winddruck auf den Schornstein. Der Bodendruck wird geradlinig und antimetrisch angesetzt

$$\bar{p}_0 = 4M/\pi a^3.$$

3. Die Schnittkräfte. Nach (978) ist mit

$$\mu = 1/6: \quad \kappa_1 = 3,2188, \quad \kappa_2 = 9,3048, \quad \kappa_3 = -1,8827.$$

Damit wird nach (979)

$$M_r = \frac{\bar{p}_0 a^2}{154,5024} (16,6306 \varrho^3 - 29,4655 \varrho + 11,2661 \varrho^{-1} + 1,5689 \varrho^{-3}) \cos \alpha,$$

$$M_\alpha = \frac{\bar{p}_0 a^2}{154,5024} (5,9010 \varrho^3 - 13,9572 \varrho + 11,2661 \varrho^{-1} - 1,5689 \varrho^{-3}) \cos \alpha,$$

$$M_{r,\alpha} = -\frac{\bar{p}_0 a^2}{178,2651} (3,2188 \varrho^3 + 1,8827 \varrho + 9,6564 \varrho^{-1} - 1,8827 \varrho^{-3}) \sin \alpha.$$

Die Momente M_r und M_α sind in Abb. 643 dargestellt. Das vollständige Kräftebild infolge zentrischer Last und Winddruck ergibt sich nach Abb. 642 durch Superposition der Ergebnisse von S. 665 oder 668.

Flügge, W.: Kreisplatten mit linear veränderlichen Belastungen. Bauing. 1929 S. 221.

70. Die rechteckige Platte.

Die Platte mit rechteckiger Begrenzung wird im Bauwesen selten einzeln, sondern in der Regel als Teil zusammenhängender Konstruktionen verwendet. Die Ränder der einfachen Platte sind entweder kräftefrei, eingespannt oder frei drehbar

aufgelagert, so daß Zug- und Druckkräfte auf den Unterbau übertragen werden (Abb. 644). Die Oberfläche erhält in der Regel gleichförmige Belastung, bei Verwendung der Platten im Behälterbau auch hydrostatische Belastung.

Die Biegesteifigkeit der Platte ist bei homogenem und isotropem Baustoff in jeder Richtung die gleiche. Die Beziehungen auf S. 646 zwischen der vorgeschrie-

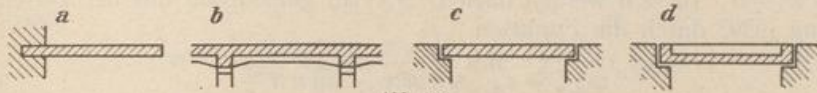


Abb. 644.

benen Belastung $p(x,y)$ und den Ordinaten $w(x,y)$ der ausgebogenen Mittelebene lassen sich jedoch auch auf Platten mit verschiedener Biegesteifigkeit in der Längs- und Querrichtung erweitern. Der Nachweis der Formänderung von Eisenbetonplatten oberhalb der Reißlast im Sinne des Stadiums II der Festigkeit ist ausgeschlossen.

Die Untersuchung des Spannungs- und Verschiebungszustandes besteht bei homogenem und isotropem Baustoff und den Annahmen auf S. 644 in der Integration der partiellen Differentialgleichung (929) für vorgeschriebene Randbedingungen an den Kanten $x = 0, x = a, y = 0, y = b$ (Abb. 645). Das Ergebnis kann in der Regel nur als Reihenentwicklung angegeben werden, deren Brauchbarkeit für die Zahlenrechnung nicht allein von der Konvergenz der Reihe $w(x,y)$ selbst, sondern auch von der Konvergenz ihrer Ableitungen abhängt. Damit scheidet Näherungslösungen aus, welche nur die Durchbiegung, aber nicht die Krümmung der elastischen Fläche ausreichend beschreiben. Brauchbare Lösungen sind von L. Navier, A. Nadai, H. Hencky und einigen französischen Mathematikern angegeben worden. Sie bestehen entweder aus Gliedern $w_h(x,y), h = 1, \dots, \infty$, welche die Differentialgleichung (929) und die Randbedingungen für den Anteil $p_h(x,y)$ der vorgeschriebenen Belastung $p = \sum p_h, h = 1, \dots, \infty$ erfüllen oder aus einer partikulären Lösung w^* der inhomogenen Gleichung, welche die Randbedingungen nur teilweise befriedigt und in einer Lösung w^{**} der homogenen Gleichung $\Delta \Delta w^{**} = 0$, die mit w^* überlagert, das gesuchte Ergebnis darstellt.

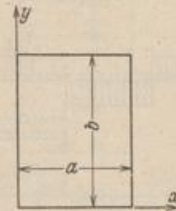


Abb. 645.

Der Plattenstreifen unter einer Belastung $p(x)$. Der Plattenstreifen ist in den Kanten $x = 0$ und $x = a$ gestützt (Abb. 646). Die Ableitungen der Durchbiegung w nach y sind Null, so daß aus (929) folgende Beziehung entsteht.

$$d^4 w / dx^4 = p(x) / N. \tag{980}$$

Die Lösung kann nach Abschn. 20 für die frei drehbare Auflagerung des Streifens unmittelbar angeschrieben werden.

a) Gleichförmige Belastung

$$w = \frac{p a^4}{24 N} \left(\frac{x}{a} - 2 \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^4}{a^4} \right). \tag{981}$$

b) Hydrostatische Belastung (Abb. 646)

$$w = \frac{p_0 a^4}{360 N} \left(7 \frac{x}{a} - 10 \frac{x^3}{a^3} + 3 \frac{x^5}{a^5} \right). \tag{982}$$



Abb. 646.

Die rechteckige Platte mit frei drehbarer Auflagerung der Kanten. Die Platte ist in den Punkten $y \neq 0, x = 0$ oder $x = a$ und $x \neq 0, y = 0$ oder $y = b$ gestützt. Die Durchbiegung w und ihre Ableitung Δw sind hier nach S. 647 Null. Die Biegemomente verschwinden an den Rändern, die Krümmung ist hier nach zwei winkelrechten Richtungen Null. Die Tangentialebene fällt also in den Ecken mit

der ursprünglichen Mittelebene zusammen. Die elastische Fläche zeigt daher von den Ecken ausgehende Grate, in denen die Krümmung und daher auch die Biegemomente groß sind. Die größten Auflagerkräfte A_{x_2} , A_{y_2} in Kantenmitte sind bei gleichmäßiger Belastung vom Seitenverhältnis a/b der Platte nahezu unabhängig ($0,42pa$ bis $0,5pa$, a die kleinere Rechteckseite). Die Randbedingungen $w = 0$, $\Delta w = 0$ werden nach L. Navier gemeinsam mit der Differentialgleichung (929) durch die Funktion

$$w_{m,n} = c_{m,n} \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b} \quad (983)$$

für die Belastung

$$p(x,y)_{m,n} = N c_{m,n} \pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b} \quad (984)$$

erfüllt, wie sich an Hand der Gleichung (929) nachweisen läßt. Da nun jede Belastung $p(x,y)$ über die Kanten der Platte hinaus nach beiden Seiten periodisch fortgesetzt werden kann (Abb. 647), ohne die Randbedingungen $w = 0$, $\Delta w = 0$ zu verletzen, so kann sie nach Fourier in eine trigonometrische Doppelreihe entwickelt werden.

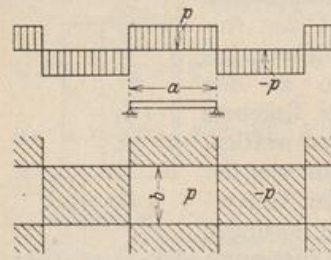


Abb. 647.

$$p(x,y) = \sum \sum a_{m,n} \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}. \quad (985)$$

Die Koeffizienten sind nach bekannten mathematischen Regeln

$$a_{m,n} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a p(x,y) \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b} dx dy. \quad (986)$$

Daher ist bei gleichförmiger Belastung p der ganzen Platte

$$a_{m,n} = \frac{16 p_0}{m n \pi^2} \quad (m, n = 1, 3, 5, \dots). \quad (987)$$

Die gliedweise Gegenüberstellung von (984) mit (985) liefert $c_{m,n}$ und damit

$$w = \frac{16 p_0}{N \pi^6} \sum_m \sum_n \frac{\sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}}{m n \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}. \quad (988)$$

In dieser Reihe wird zuerst $m = 1$ und $n = 1, 3, 5$ usw., darauf $m = 3$ und $n = 1, 3, 5$ usw. eingesetzt, so daß die Buchstaben m und n der Reihe nach alle ungeraden Zahlen durchlaufen. Leider konvergiert die Reihe $\sum w_{m,n}$ mit ihren Ableitungen nur bei gleichförmiger Belastung p der Oberfläche schnell genug, um darnach numerisch zu rechnen. Sie ist neuerdings von V. Lewy zur Untersuchung von Pilzdecken verwendet worden, indem die äußeren an der Platte angreifenden Kräfte aus der Auflast und der über die Fläche des Pilzkopfes gleichmäßig verteilten Stützkraft ähnlich wie nach (988) in eine trigonometrische Doppelreihe entwickelt werden.

Um Lösungen zu erhalten, welche die Differentialgleichung (929) für eine vorgeschriebene Belastung $p(x)$ streng erfüllen und nur aus einfachen und besser konvergierenden Reihen bestehen, addiert A. Nadai zur Durchbiegung w^* des Plattenstreifens mit den Randbedingungen der Platte für $x = 0$ und $x = a$ die Durchbiegung w^{**} einer Platte mit Randkräften, welche die homogene Gleichung $\Delta w^{**} = 0$ erfüllt und gemeinsam mit w^* die für w vorgeschriebenen Randbedingungen an allen vier Kanten befriedigt.

Bei gleichförmiger Belastung p und frei drehbarer Stützung in $x = 0, x = a$ ist nach (981)

$$w^* = \frac{p a^4}{24 N} \left(\frac{x}{a} - 2 \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^4}{a^4} \right) = \frac{4 p a^4}{N \pi^5} \sum \frac{1}{n^5} \sin \frac{n \pi x}{a} \quad (n = 1, 3, 5, \dots). \quad (989)$$

Der Ansatz

$$w^{**} = \sum Y_n \sin \frac{n \pi x}{a} \quad \text{mit} \quad Y_n = f_n(y) \quad (990)$$

erfüllt die Randbedingungen $w^{**} = 0, \Delta w^{**} = 0$ in $x = 0$ und $x = a$ und die Differentialgleichung $\Delta \Delta w^{**} = 0$ für

$$Y_n = a_n \operatorname{Cof} \frac{n \pi y}{a} + b_n \frac{n \pi y}{a} \operatorname{Sin} \frac{n \pi y}{a} + c_n \operatorname{Sin} \frac{n \pi y}{a} + d_n \frac{n \pi y}{a} \operatorname{Cof} \frac{n \pi y}{a}, \quad (991)$$

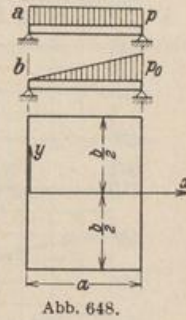


Abb. 648.

da jedes einzelne Glied eine Lösung der biharmonischen Gleichung ist. Die Freiwerte a_n, b_n, c_n, d_n ($n = 1, \dots, \infty$) werden so bestimmt, daß die Funktion $w = w^* + w^{**}$ die vier Randbedingungen für $y = \pm b/2$ befriedigt (Abb. 648). Bei Symmetrie der Stützung genügen die in y geraden Funktionen der allgemeinen Lösung w^{**} . Das Ergebnis lautet nach A. Nadai mit

$$\xi_n = \frac{n \pi x}{a}, \quad \eta_n = \frac{n \pi y}{a}, \quad \alpha_n = \frac{n \pi b}{2 a}, \quad (992)$$

$$w = \frac{4 p a^4}{N \pi^5} \sum \frac{1}{n^5} \left[1 - \frac{2 \operatorname{Cof} \alpha_n \operatorname{Cof} \eta_n + \alpha_n \operatorname{Sin} \alpha_n \operatorname{Cof} \eta_n - \eta_n \operatorname{Sin} \eta_n \operatorname{Cof} \alpha_n}{1 + \operatorname{Cof} 2 \alpha_n} \right] \sin \xi_n \quad (993)$$

$(n = 1, 3, 5, \dots)$.

Bei hydrostatischer Belastung (Abb. 648b) $p = p_0 x/a$ ist

$$w = \frac{2 p_0 a^4}{N \pi^5} \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^5} \left[1 - \frac{(2 + \alpha_n \operatorname{Tg} \alpha_n) \operatorname{Cof} \eta_n - \eta_n \operatorname{Sin} \eta_n}{2 \operatorname{Cof} \alpha_n} \right] \sin \xi_n. \quad (994)$$

Die Reihen konvergieren schnell, so daß bereits das erste Glied als Näherung genügt. Mit $w(x, y)$ sind nach S. 645 auch die Schnittkräfte $M_x, M_y, M_{xy}, Q_{xz}, Q_{yz}$ und die Stützkkräfte A_{xz}, A_{yz} der Platte bestimmt, so daß Richtung und Größe der Hauptbiegungs- und Hauptdrillungsmomente berechnet und darauf die Trajektorien und die Linien gleichen Hauptmomentes aufgetragen werden können. Um daran das Wesen der Plattenbiegung zu studieren, ist die Zahlenrechnung für zwei Platten unter gleichförmiger Belastung mit dem Seitenverhältnis 1 : 1 und 3 : 4 ausgeführt worden (s. S. 677). In Abb. 649 sind die Biegemomente M_x, M_y in den Symmetrieachsen der rechteckigen Platten mit dem Seitenverhältnis $b/a = 1; 1,5; 2$ für $\mu = 1/4$ dargestellt. Die Abhängigkeit der Momente und der Durchbiegung von dem Seitenverhältnis zeigt nach A. Nadai für $\mu = 3/10$ Abb. 650.

Der gleichmäßig belastete Halbstreifen ist ein Sonderfall der rechteckig begrenzten Platte mit $b \gg a$ und von A. Nadai in der gleichen Weise untersucht worden. Das Ergebnis ist hier wiedergegeben, um damit später andere Aufgaben zu lösen.

a) Die drei Seiten des Halbstreifens liegen frei auf (Abb. 651a)

$$w = \frac{4 p a^4}{N \pi^5} \sum \left[1 - \left(1 + \frac{\eta_n}{2} \right) e^{-\eta_n} \right] \frac{1}{n^5} \sin \xi_n, \quad (n = 1, 3, 5, \dots). \quad (995)$$

b) Die Längsseiten des Halbstreifens liegen frei auf, die kurze Seite ist frei (Abb. 651b)

$$w = \frac{4 p a^4}{N \pi^5} \sum \left[1 + \frac{\mu}{3 + \mu} \left(\frac{1 + \mu}{1 - \mu} - \eta_n \right) e^{-\eta_n} \right] \frac{1}{n^5} \sin \xi_n, \quad (n = 1, 3, 5, \dots). \quad (996)$$

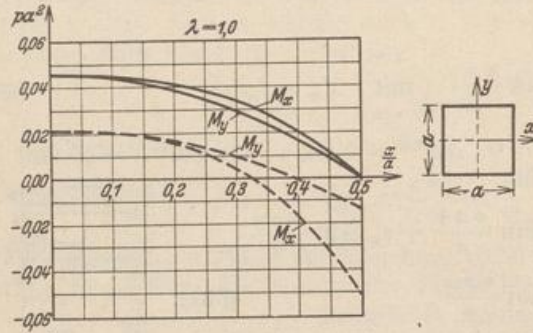
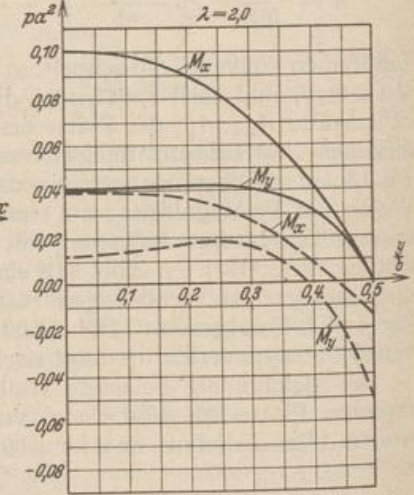
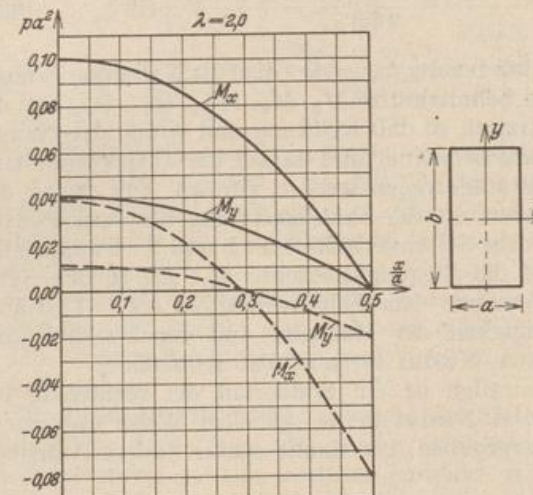
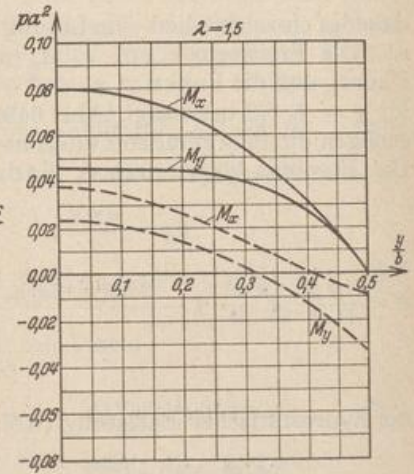
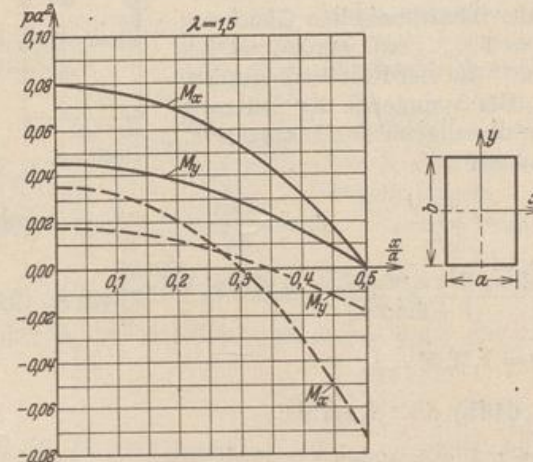


Abb. 649.
Biegemomente M_x und M_y
für rechteckige Platten mit
 $b/a = \lambda = 1,0, 1,5, 2,0$.
 $\mu = 1/4$.
Frei aufliegende Platten ———
Eingespannte Platten - - - - -



c) Die Längsseiten des Halbstreifens liegen frei auf, die kurze Seite ist eingespannt (Abb. 651c)

$$w = \frac{4 p a^4}{N \pi^5} \sum \left[1 - (1 + \eta_n) e^{-\eta_n} \right] \frac{1}{n^5} \sin \xi_n, \quad (n = 1, 3, 5, \dots). \quad (997)$$

Berechnung einer rechteckigen Platte nach A. Nadai.

Untersucht wird eine rechteckige Platte mit $b/a = 4/3$ unter gleichmäßig verteilter Belastung p . Mit der Abkürzung

$$\Phi_n = 2 \cos \alpha_n \cos \eta_n + \alpha_n \sin \alpha_n \cos \eta_n - \eta_n \sin \eta_n \cos \alpha_n$$

wird nach (993) die Durchbiegung

$$w = 0,01307 \frac{p a^4}{N} \sum \frac{1}{n^5} \left[1 - \frac{\Phi_n}{1 + \cos 2 \alpha_n} \right] \sin \xi_n, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

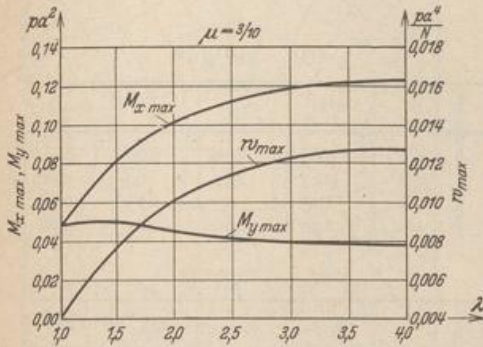


Abb. 650. Biegemomente $M_{x \max}$, $M_{y \max}$ und Durchbiegung w_{\max} der frei aufliegenden, rechteckigen Platte mit gleichmäßig verteilter Last p als Funktionen des Seitenverhältnisses $b/a = \lambda$.

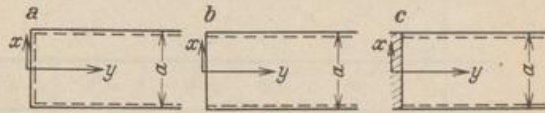


Abb. 651.

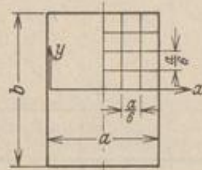


Abb. 652.

Die $10^{-5} p a^4 / N$ fachen Ordinaten w in den Punkten eines Gitters (Abb. 652) mit $\frac{a}{12} = \frac{b}{16}$ sind

$x \backslash y$	0	$a/12$	$a/6$	$a/4$	$a/3$	$5a/12$	$a/2$	$7a/12$
$a/2$	663	651	618	563	487	389	273	141
$7a/12$	641	631	599	545	471	377	264	138
$2a/3$	578	569	540	492	426	341	239	125
$3a/4$	476	468	445	406	351	281	198	103
$5a/6$	339	334	317	289	250	201	142	73
$11a/12$	176	174	165	151	131	105	74	38

Die Schnittkräfte werden nach (919) mit

$$M'_x = p x(a-x)/2, \quad M'_y = \mu p x(a-x)/2;$$

$$M_x = M'_x + (1-\mu) p a^2 \pi^2 \sum n^2 \sin \xi_n \left[a_n \cos \eta_n + b_n \left(\eta_n \sin \eta_n - \frac{2\mu}{1-\mu} \cos \eta_n \right) \right],$$

$$M_y = M'_y - (1-\mu) p a^2 \pi^2 \sum n^2 \sin \xi_n \left[a_n \cos \eta_n + b_n \left(\eta_n \sin \eta_n + \frac{2}{1-\mu} \cos \eta_n \right) \right],$$

$$M_{xy} = - (1-\mu) p a^2 \pi^2 \sum n^2 \cos \xi_n \left[a_n \sin \eta_n + b_n \left(\eta_n \cos \eta_n + \sin \eta_n \right) \right],$$

worin

$$a_n = - \frac{2(2 + \alpha_n \mathfrak{E} \alpha_n)}{n^5 \pi^3 \cos \alpha_n}, \quad b_n = \frac{2}{n^5 \pi^3 \cos \alpha_n}, \quad \mu = 1/6.$$

$$a_1 = -0,0063928; \quad a_3 = -8,3204 \cdot 10^{-7}; \quad b_1 = 0,0015856; \quad b_3 = 1,0045 \cdot 10^{-7}.$$

$x \backslash y$	0	$a/6$	$a/3$	$a/2$	0	$a/6$	$a/3$	$a/2$
$a/2$	0,0672	0,0630	0,0501	0,0288	0,0421	0,0413	0,0376	0,0266
$2a/3$	0,0611	0,0573	0,0458	0,0264	0,0370	0,0363	0,0332	0,0239
$5a/6$	0,0405	0,0382	0,0313	0,0189	0,0223	0,0219	0,0203	0,0152

$$M_{xy} / p a^2$$

$x \backslash y$	$a/6$	$a/3$	$a/2$	$2a/3$
$2a/3$	0,0068	0,0141	0,0187	0,0210
$5a/6$	0,0120	0,0250	0,0343	0,0390
a	0,0140	0,0293	0,0407	0,0479

Damit ergeben sich nach (921) die Richtung und Größe der Hauptbiegungsmomente M_I u. M_{II} und die Hauptdrillungsmomente $M_{I,II}$.

$$M_I \cdot 10^4 / p a^2$$

$x \backslash y$	0	$a/6$	$a/3$	$a/2$	$2a/3$	0	$a/6$	$a/3$	$a/2$	$2a/3$
$a/2$	672	630	501	288	0	421	413	376	266	0
$2a/3$	611	593	544	439	210	370	343	247	64	-210
$5a/6$	495	445	503	514	390	223	155	13	-173	-390
a	0	140	279	407	479	0	-140	-279	-407	-479

$$\alpha^0$$

$x \backslash y$	0	$a/6$	$a/3$	$a/2$	$2a/3$	0	$a/6$	$a/3$	$a/2$	$2a/3$
$a/2$	0	0	0	0	0	126	109	63	11	0
$2a/3$	0	16,5	32,5	43	45	121	125	148	188	210
$5a/6$	0	28	38,5	43	45	91	145	245	343	390
a	0	45	45	45	45	0	140	279	407	479

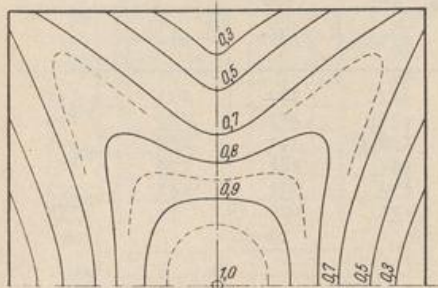


Abb. 653. Linien gleicher M_I .

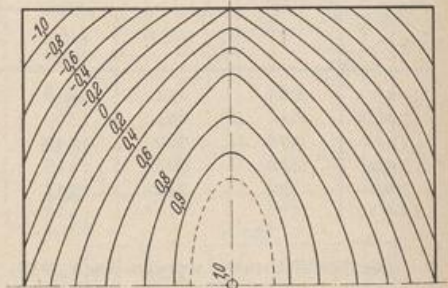


Abb. 654. Linien gleicher M_{II} .

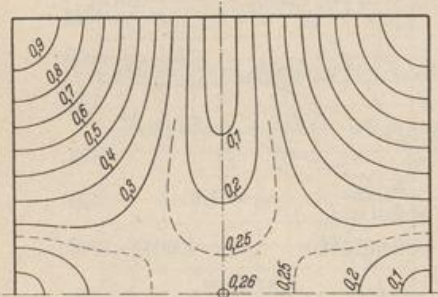


Abb. 655. Linien gleicher $M_{I,II}$.

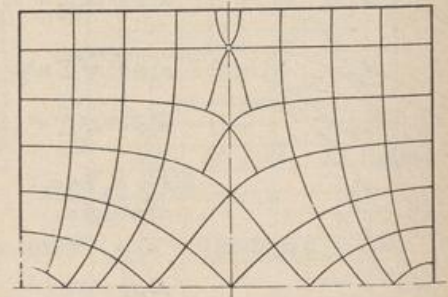


Abb. 656. Trajektorien der Hauptdrillungsmomente.

Die Linien gleicher Hauptmomente sind in Abb. 653 bis 655 dargestellt, ihre Bezifferung bedeutet den Bruchteil des größten Momentes. Abb. 656 zeigt die Trajektorien der Hauptdrillungsmomente, Abb. 657 die Trajektorien der Hauptbiegungsmomente, die in Abb. 658 mit denjenigen der quadratischen Platte verglichen werden. Der Mittelpunkt der quadratischen

Platte ist mit $M_x = M_y$ ein singulärer Punkt, in dem sich 4 Trajektorien schneiden. Die rechteckige Platte hat zwei singuläre Punkte auf der langen Symmetrieachse, in denen sich je 3 Trajektorien schneiden.

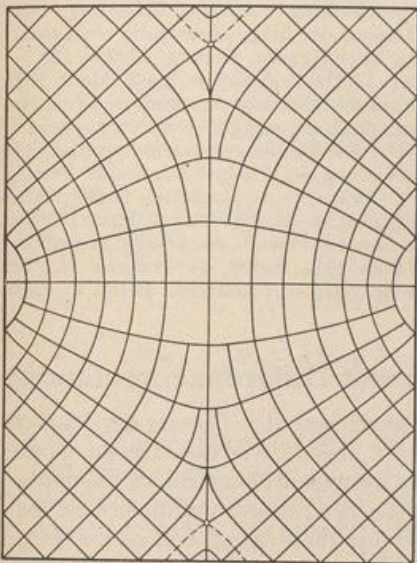


Abb. 657. Trajektorien der Hauptbiegemomente.

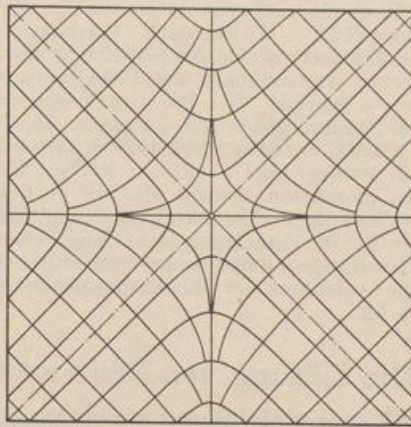


Abb. 658. Trajektorien der Hauptbiegemomente für die quadratische Platte.

Die eingespannte Platte bei gleichmäßiger Belastung.

Nachdem die Tangentialebene an die Biegefläche der frei aufliegenden Platte in den Eckpunkten bereits mit der ursprünglichen Mittelebene zusammenfällt, sind hier die Biegemomente der eingespannten Platte Null und die Tangenten an die Kurven der Randmomente waagrecht. Längs des Randes sind auch die Drillungsmomente nach S. 648 Null und daher $A_{xz} = Q_{xz}$.

Um die Differentialgleichung (929) bei starrer Einspannung oder anderen Randbedingungen zu integrieren, wird die Lösung Naviers w_1 für die frei aufliegende Platte (988) nach M. Levy durch eine allgemeine Lösung w_2 der homogenen Gleichung $\Delta\Delta w_2 = 0$ ergänzt. Sie enthält so viele Freiwerte, besteht also aus so vielen Partikularlösungen, daß die vorgeschriebenen Randbedingungen durch die Reihenentwicklung für $w = w_1 + w_2$ gliedweise erfüllt werden können. Die Fläche w_2 entsteht darnach durch Randkräfte an der frei aufliegenden Platte. Der mechanische Sinn dieser mathematischen Operation läßt sich mit der Berechnung der statisch unbestimmten Schnittkräfte in Abschn. 24 vergleichen.

Die Aufgabe kann auch nach H. Hencky und A. Nadai durch Überlagerung einer Grundlösung w^* für die vorgeschriebene Belastung mit einem allgemeinen Integral w^{**} der homogenen Gleichung $\Delta\Delta w^{**} = 0$ untersucht werden. Dieses läßt sich in einfach unendlichen Reihen anschreiben und enthält ebenso viele Freiwerte, also ebenso viele Partikularlösungen w_h^{**} , als andere Randbedingungen im Vergleich zur frei aufliegenden Platte vorhanden sind. Die Freiwerte werden auch hier gliedweise so bestimmt, daß die Funktion $w = w^* + w^{**}$ die Differentialgleichung und die vorgeschriebenen Randbedingungen erfüllt. Der mathematische Teil der Lösung bereitet hier jedoch wesentlich größere Schwierigkeiten als bei der frei aufliegenden Platte, so daß man sich bei diesen Aufgaben in der Regel mit Näherungslösungen begnügt.

Hencky, H.: Über den Spannungszustand in rechteckigen ebenen Platten. München 1913. — Leitz, H.: Berechnung der frei aufliegenden Platte. Berlin 1914. — Nadai, A.: Die Formänderungen und die Spannungen von rechteckigen Platten. Forsch.-Arb. Ing.-Wes. Berlin 1915. — Leitz, H.: Berechnung der eingespannten rechteckigen Platte. Z. Math. Physik 1917

S. 262. — Huber, M. T.: Über die Biegung einer rechteckigen Platte von ungleicher Biegefestigkeit in der Längs- und Querrichtung bei einspannungsfreier Stützung des Randes usw. Bauing. 1924 S. 259. — Derselbe: Über die genaue Biegungsgleichung einer orthotropen Platte und ihre Anwendung auf kreuzweise bewehrte Betonplatten. Bauing. 1925 S. 878 — Si Luan Wei: Über die eingespannte rechteckige Platte mit gleichmäßig verteilter Belastung. Diss. Göttingen 1925. — Huber, M. T.: Vereinfachte strenge Lösung der Biegungsaufgabe einer rechteckigen Eisenbetonplatte bei geradliniger freier Stützung aller Ränder. Bauing. 1926 S. 121. — Derselbe: Anwendungen der Biegetheorie orthotroper Platten. Z. angew. Math. Mech. 1926 S. 228. — Marcus, H.: Die Grundlagen der Querschnittsbemessung kreuzweise bewehrter Platten. Bauing. 1926 S. 577. — Crämer, H.: Die Biegungsgleichung von Platten stetig veränderlicher Stärke. Beton u. Eisen 1929 S. 12. — Marcus, H.: Die Drillungsmomente rechteckiger Platten. Bauing. 1929 S. 497. — Ritter, M.: Die Anwendung der Theorie elastischer Platten auf den Eisenbeton. Bericht über die II. Int. Tagung f. Brücken- u. Hochbau, S. 694. Wien 1929. — Inada, T.: Die Berechnung auf 4 Seiten gestützter rechteckiger Platten. Berlin 1930. — Müller, E.: Die Berechnung rechteckiger, gleichförmig belasteter Platten, die an zwei gegenüberliegenden Rändern durch Träger unterstützt sind. Ing.-Arch. 1931 S. 606. — Crämer, H.: Die bauliche Aufnahme der Randrillungsmomente vierseitig gelagerter Platten. Beton u. Eisen 1932 S. 95.

71. Die Lösung von Plattenaufgaben mit Differenzenrechnung.

Differenzgleichung eines Gitters. Die Anwendung der Theorie der Plattenbiegung bei beliebiger Belastung und Stützung ist ebenso wie die strenge Untersuchung ebener Spannungsprobleme im Bauwesen im wesentlichen durch die mathematischen Schwierigkeiten der Lösung verhindert worden.

Man begnügt sich daher für diese Aufgaben in der Regel mit qualitativ brauchbaren Näherungslösungen, zumal auch die Annahmen über die physikalischen Eigenschaften des Baustoffs und die Beschaffenheit der Stützung keineswegs streng erfüllt sind. Es liegt daher nahe, den stetigen Charakter des Ansatzes wie bei anderen Problemen der Mechanik aufzugeben und die Abhängigkeit zwischen Spannungs-, Verschiebungs- und Belastungszustand an endlichen Abschnitten der Platte zu beschreiben. Die stetiggekrümmte Biegefläche erscheint dabei als Vielkant, dessen Kanten sich im Grundriß je nach der Art der Koordinaten in Abständen Δx , Δy rechtwinklig schneiden oder als Strahlenbündel mit einer Schar konzentrischer Polygone erscheinen. Die Eckpunkte k des Vielkantes sind Punkte der Biegefläche, die Kanten beschreiben ein elastisches Gitter. Die geometrische Abwandlung der Fläche zum Vielkant bedeutet mathematisch den Übergang vom Längendifferential zur Differenz zweier Strecken und vom Differentialquotienten zum Differenzenquotienten. Er ist zur numerischen Lösung von Aufgaben der Plattenbiegung zuerst von H. Marcus vollzogen worden.

Die Mittelebene der rechteckigen Platte wird zur Vorbereitung der Untersuchung durch zwei Systeme äquidistanter, sich winkelrecht kreuzender Geraden geteilt. Die Abstände Δx , Δy sind in der Regel gleichgroß ($\Delta x = \Delta y = s$).

Die Differentialquotienten werden nach ihrer geometrischen Bedeutung durch Funktionen der Ordinaten w_k der Gitterknoten ersetzt (Abschn. 20). Danach ist in Verbindung mit Abb. 659

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_k &\rightarrow \frac{w_{k+1} - w_{k-1}}{2 \Delta x}, & \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_k &\rightarrow \frac{w_i - w_t}{2 \Delta y}, \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_k &\rightarrow \frac{w_{i+1} - w_{i-1} - w_{t+1} + w_{t-1}}{4 \Delta x \Delta y}, \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_k &\rightarrow \frac{w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}}{\Delta x^2}, & \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_k &\rightarrow \frac{w_i - 2w_k + w_t}{\Delta y^2}, \end{aligned}$$

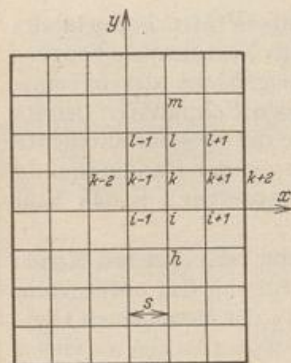


Abb. 659.

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right)_k &\rightarrow \frac{\Delta^2 w_{k+1} - \Delta^2 w_{k-1}}{2 \Delta x^3} = \frac{w_{k+2} - 2 w_{k+1} + 2 w_{k-1} - w_{k-2}}{2 \Delta x^3}, \\
 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right)_k &\rightarrow \frac{w_m - 2 w_l + 2 w_i - w_n}{2 \Delta y^3}, \\
 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_k &= \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right]_k \rightarrow \frac{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_l - 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_k + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_i}{\Delta y^2} \\
 &\rightarrow \frac{4 w_k - 2 (w_{k+1} + w_{k-1} + w_l + w_i) + (w_{l-1} + w_{l+1} + w_{i+1} + w_{i-1})}{\Delta x^2 \Delta y^2}, \\
 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right)_k &\rightarrow \frac{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{k+1} - 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_k + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{k-1}}{\Delta x^2} \\
 &\rightarrow \frac{w_{k+2} - 4 w_{k+1} + 6 w_k - 4 w_{k-1} + w_{k-2}}{\Delta x^4}, \\
 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)_k &\rightarrow \frac{w_m - 4 w_l + 6 w_i - 4 w_n}{\Delta y^4}.
 \end{aligned} \tag{998}$$

Die Differentialgleichungen der Plattenbiegung (929) und (931), (932) werden Differenzgleichungen, so daß der Zusammenhang zwischen der Belastungsintensität p_k , den Ordinaten w_k der Biegefläche und den Momentensummen M_k in folgender Weise beschrieben wird:

$$\begin{aligned}
 \text{I.} \quad &\frac{\Delta^4 w_k}{\Delta x^4} + 2 \frac{\Delta^4 w_k}{\Delta x^2 \Delta y^2} + \frac{\Delta^4 w_k}{\Delta y^4} = \frac{p_k}{N}, \\
 \text{II.} \quad &\frac{\Delta^2 M_k}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2 M_k}{\Delta y^2} = -p_k, \quad \frac{\Delta^2 w_k}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2 w_k}{\Delta y^2} = -\frac{M_k}{N}.
 \end{aligned}$$

Daraus entsteht an jedem freien Maschenknoten mit den Differenzenquotienten (998) und mit $\Delta y^2 / \Delta x^2 = \alpha$ die Gleichung

$$\begin{aligned}
 \text{I.} \quad &w_k \left[6 \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) + 8 \right] - 4 \left[(1 + \alpha) (w_{k+1} + w_{k-1}) + \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) (w_l + w_i) \right] \\
 &+ 2 (w_{l-1} + w_{l+1} + w_{i-1} + w_{i+1}) + \alpha (w_{k+2} + w_{k-2}) \\
 &+ \frac{1}{\alpha} (w_m + w_n) = \frac{p_k \Delta x^4}{N}, \\
 \text{II.} \quad &2 (1 + \alpha) M_k - \alpha (M_{k+1} + M_{k-1}) - (M_l + M_i) = p_k \alpha \Delta x^2, \\
 &2 (1 + \alpha) w_k - \alpha (w_{k+1} + w_{k-1}) - (w_l + w_i) = \frac{M_k}{N} \alpha \Delta x^2.
 \end{aligned} \tag{999}$$

Bei gleich großen Abständen $\Delta x = \Delta y = s$ des Gitters ist

$$\begin{aligned}
 \text{I.} \quad &20 w_k - 8 (w_{k-1} + w_l + w_{k+1} + w_i) + 2 (w_{l-1} + w_{l+1} + w_{i-1} + w_{i+1}) \\
 &+ (w_{k-2} + w_m + w_{k+2} + w_n) = \frac{p_k s^4}{N}.
 \end{aligned} \tag{1000}$$

$$\text{II.} \quad 4 M_k - M_{k-1} - M_l - M_{k+1} - M_i = + p_k s^2, \tag{1001}$$

$$4 w_k - w_{k-1} - w_l - w_{k+1} - w_i = + \frac{M_k}{N} s^2. \tag{1002}$$

Schnittkräfte. Die Schnittkräfte der Platte sind nach (919) Funktionen von Differentialquotienten der Plattenbiegung und daher jetzt Funktionen von Differenzenquotienten, so daß die Schnittkräfte am Maschenknoten k in folgender Weise von den Verschiebungen des Gitters abhängen:

$$\begin{aligned}
 M_{x,k} &= -N \left(\frac{\Delta^2 w_k}{\Delta x^2} + \mu \frac{\Delta^2 w_k}{\Delta y^2} \right) = \frac{N}{s^2} [-w_{k-1} + 2w_k - w_{k+1} + \mu(-w_i + 2w_k - w_l)], \\
 M_{y,k} &= -N \left(\mu \frac{\Delta^2 w_k}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2 w_k}{\Delta y^2} \right) = \frac{N}{s^2} [\mu(-w_{k-1} + 2w_k - w_{k+1}) - w_i + 2w_k - w_l], \\
 M_k &= -N \left(\frac{\Delta^2 w_k}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2 w_k}{\Delta y^2} \right) = \frac{N}{s^2} [-w_i - w_{k-1} + 4w_k - w_{k+1} - w_l], \\
 M_{xy,k} &= -N(1-\mu) \frac{\Delta^2 w_k}{\Delta x \Delta y} = \frac{N(1-\mu)}{4s^2} [w_{l-1} - w_{l+1} - w_{i-1} + w_{i+1}].
 \end{aligned} \tag{1003}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{xz,k} &= \frac{\Delta M_k}{\Delta x} = \frac{1}{2s} (M_{k+1} - M_{k-1}) \\
 &= \frac{N}{2s^3} [w_{k-2} + (w_{l-1} + w_{l+1}) - (w_{l+1} + w_{l-1}) - w_{k+2} + 4(w_{k+1} - w_{k-1})], \\
 Q_{yz,k} &= \frac{\Delta M_k}{\Delta y} = \frac{1}{2s} (M_l - M_i) \\
 &= \frac{N}{2s^3} [w_k + (w_{i+1} + w_{i-1}) - (w_{i+1} + w_{i-1}) - w_m + 4(w_l - w_i)].
 \end{aligned} \tag{1004}$$

$$\begin{aligned}
 A_{xz,k} &= -\frac{1}{2s} [M_{k+1} - M_{k-1} + M_{xy,l} - M_{xy,i}] \\
 &= -\frac{N}{2s^3} [w_{k-2} + (6-2\mu)(w_{k+1} - w_{k-1}) \\
 &\quad + (2-\mu)(w_{i-1} + w_{l-1} - w_{l+1} - w_{i+1}) - w_{k+2}], \\
 A_{yz,k} &= -\frac{1}{2s} [M_l - M_i + M_{xy,k+1} - M_{xy,k-1}] \\
 &= -\frac{N}{2s^3} [w_k + (6-2\mu)(w_l - w_i) \\
 &\quad + (2-\mu)(w_{i+1} + w_{i-1} - w_{l-1} - w_{l+1}) - w_m].
 \end{aligned} \tag{1005}$$

Die Teilung $\Delta x, \Delta y$ des Gitters ist in beiden Richtungen konstant. Je kleiner die Abschnitte gewählt werden, um so besser ist die Angleichung des Verschiebungszustandes des Gitters an die elastische Fläche der Platte, um so größer aber auch die Anzahl der linearen Gleichungen (1000) und der Umfang der Zahlenrechnung. Die Zerlegung des Integrationsbereiches in quadratische Maschen ($\Delta x = \Delta y = s$) vereinfacht die Differenzgleichungen der Wurzeln M_k, w_k und die Ansätze für die Schnittkräfte. Die Poisson'sche Zahl beträgt bei Eisenbetonplatten $\mu = 1/6$, sie kann aber auch zur einfachen Berechnung der Schnittkräfte, vor allem bei $\Delta x \neq \Delta y$ im Sinne dieser Näherungslösung Null gesetzt werden.

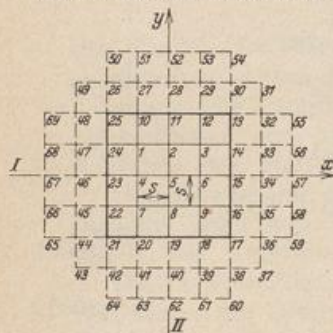


Abb. 660.

Die Bedingungen am Rande des Gitters und an den singulären Stellen der Belastungsfunktion. Um den Zusammenhang zwischen der Biegefläche $w(x, y)$ der Platte und der vorgeschriebenen Belastung auch am

Plattenrande in endlichen Abschnitten $\Delta x, \Delta y$ zu beschreiben, und die Schnitt- und Stützkkräfte nach (1003)ff. abzuleiten, wird die elastische Fläche unabhängig von der Stützung erweitert, indem das Gitter und die Belastung $p(x, y)$ stetig über den Plattenrand hinaus fortgesetzt werden. Damit ist die Bedingung $\Delta \Delta w = p/N$ auch außerhalb des Randes erfüllt (Abb. 660). Unter dieser Voraus-

setzung gelten die Ansätze (1004) für die Schnittkräfte Q_{xz} , Q_{yz} , M_{xy} und die Ansätze (1005) für die Auflagerkräfte A_{xz} , A_{yz} . In diesen lassen sich dann die Verschiebungen w der Nebenknoten außerhalb des Randes eliminieren, so daß sich die Auflagerkräfte folgendermaßen berechnen lassen:

a) Frei aufliegende Platte. Für den Randknoten k folgt nach (1003) aus $M_k = 0$ und $w_i = w_k = w_l = 0$

$$w_{k+1} = -w_{k-1}. \quad (1006)$$

Die Differenzgleichung (1001) liefert mit $M_l = M_k = M_l = 0$

$$M_{k+1} = -M_{k-1} - p_k s^2$$

und die Differenzgleichung (1002) für den Nebenknoten $(k+1)$ ergibt

$$4w_{k+1} - w_{l-1} - w_{k+2} - w_{i+1} = \frac{M_{k+1}}{N} s^2 = -\frac{M_{k-1}}{N} s^2 - \frac{p_k s^4}{N}$$

oder mit (1006)

$$w_{k+2} = 4w_{k+1} + w_{l-1} + w_{i+1} + \frac{M_{k-1}}{N} s^2 + \frac{p_k s^4}{N}.$$

Nach (1002) ist für den Punkt $(k-1)$

$$\frac{M_{k-1}}{N} s^2 = 4w_{k-1} - w_{k-2} - w_{l-1} - w_{l-1},$$

also

$$w_{k+2} = -w_{k-2} + \frac{p_k s^4}{N}. \quad (1007)$$

Damit geht Gl. (1005) über in

$$A_{xz,k} = \frac{N}{2s^3} \left[4(3-\mu)w_{k-1} - 2w_{k-2} - 2(2-\mu)(w_{i-1} + w_{l-1}) + \frac{p_k s^4}{N} \right]. \quad (1008)$$

Ebenso wird erhalten

$$A_{yz,k} = \frac{N}{2s^3} \left[4(3-\mu)w_i - 2w_k - 2(2-\mu)(w_{i-1} + w_{i+1}) + \frac{p_k s^4}{N} \right]. \quad (1009)$$

b) Starr eingespannte Platte. Für den Randknoten k folgt nach (998) aus $dw/dx = 0$

$$w_{k+1} = w_{k-1}. \quad (1010)$$

Die Differenzgleichung (1000) liefert mit $w_i = w_k = w_l = 0$ und (1010)

$$w_{k+2} = \frac{p_k s^4}{N} + 16w_{k-1} - 4(w_{i-1} + w_{l-1}) - w_{l-2}, \quad (1011)$$

so daß nach (1005)

$$A_{xz,k} = \frac{N}{2s^3} \left[16w_{k-1} - 2w_{k-2} - 4(w_{i-1} + w_{l-1}) + \frac{p_k s^4}{N} \right] \quad (1012)$$

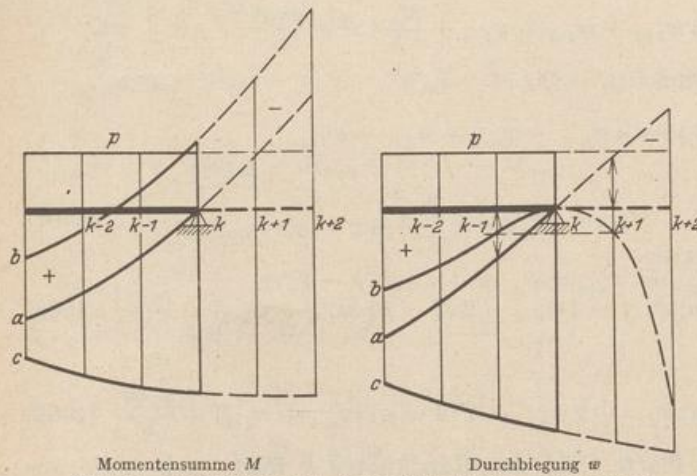
und ebenso

$$A_{yz,k} = \frac{N}{2s^3} \left[16w_i - 2w_k - 4(w_{i-1} + w_{i+1}) + \frac{p_k s^4}{N} \right]. \quad (1013)$$

Die Erweiterung der Fläche M_k und der elastischen Fläche w_k über den Rand hinaus zeigt Abb. 661 für einen Schnitt $y = \text{const.}$ a) Frei aufliegende Platte, b) starr eingespannte Platte, c) freier Rand. Die Belastungsfunktion p ist dabei konstant angenommen worden.

Man kann aber auch zur Formulierung der Randbedingungen auf die Erweiterung der elastischen Fläche verzichten und die Differenzgleichungen und Schnittkräfte allein mit den Verschiebungen der Hauptknoten des Gitters anschreiben, wenn an Stelle des einzelnen Plattenelementes eine nach allen Seiten durchlaufende Platte mit den gleichen Stützenbedingungen untersucht wird. Die durchlaufende Platte

wird auf Schneiden gestützt und antimetrisch oder symmetrisch belastet. Die Formänderung der benachbarten Felder ist dann antimetrisch oder symmetrisch zur Formänderung des Hauptfeldes, so daß die Verschiebungen der Nebenknöten antimetrisch oder symmetrisch mit den Verschiebungen der Hauptknöten übereinstimmen. Die Differenzgleichungen der Randknöten enthalten jedoch dann neben der Belastungsintensität p die singulären Stützkräfte. Sie können also nur angeschrieben werden, wenn diese bekannt sind. Das gilt auch von den singulären Stützkräften bei Pilzdecken. Daher ist die Lösung mit Differenzen nur dann möglich, wenn an diesen Punkten die Randwerte der Unbekannten Null oder vorgeschrieben sind. Beim frei aufliegenden Rand ist $M_k = 0$ und $w_k = 0$, die Lösung also nach (1001), (1002) in zwei Stufen durchführbar. Beim eingespannten Rand ist $M_k \neq 0$, $w_k = 0$, so daß nur der allgemeine Ansatz (1000) verwendet werden kann. Bei Pilzdecken ist über den Stützen $w_k = 0$, also ebenfalls nur der allgemeine Ansatz anwendbar, doch ist es zweckmäßig, den Stützendruck als statisch überzählige Größe zu berechnen.



Momentensumme M
Abb. 661. a frei aufliegender, b starr eingespannter, c freier Rand.

Werden die Randbedingungen durch Bedingungen über die Antimetrie oder Symmetrie der Formänderung ersetzt, so lassen sich die Stützkräfte A_{xz} , A_{yz} nicht mehr nach (1005) ermitteln. Sind aber die Verschiebungen w_k bekannt, so können die Differenzgleichungen für die singulären Punkte nunmehr zur Bestimmung der singulären Stützkräfte dienen. Z. B. ist für die starr eingespannte Platte am Randknoten k nach (1000) mit

$$w_i = w_k = w_l = 0, \quad w_{k+1} = w_{k-1}, \quad w_{k+2} = w_{k-2},$$

$$2w_{k-2} + 4(w_{i-1} + w_{l-1}) - 16w_{k-1} = \bar{p}_k \frac{s^4}{N},$$

wobei \bar{p}_k die Belastungsintensität unter Berücksichtigung der Stützkraft bedeutet. Nach Abb. 662 ist

$$\bar{p}_k s^2 = -2A_{xz,k} s + p_k s^2,$$

womit wiederum wie in (1012)

$$A_{xz,k} = \frac{N}{2s^3} \left[16w_{k-1} - 2w_{k-2} - 4(w_{i-1} + w_{l-1}) + \frac{p_k s^4}{N} \right].$$

Den Verlauf von M_k und w_k für einen Schnitt $y = \text{const}$ am Rande bei Ersatz der Randbedingungen durch Bedingungen über die Antimetrie oder Symmetrie der Formänderung zeigt Abb. 662. Die Belastungsfunktion p ist dabei konstant angenommen worden. Sie hat im Randknoten beim eingespannten Rand eine Singularität, beim frei aufliegenden Rand einen Sprung.

1. Freie Auflagerung der Ränder. Die Verschiebungen w_{10} bis w_{25} und die Momentensummen M_{10} bis M_{25} in den Randpunkten sind nach S. 647 Null (Abb. 660). Daher werden zunächst die Momentensummen M_1 bis M_9 der Hauptknöten nach (1001) und daraus die Verschiebungen w_1 bis w_9 des Gitters nach

(1002) berechnet. Damit sind nach (1003) auch die Biegemomente $M_{x,1}$ bis $M_{x,9}$, $M_{y,1}$ bis $M_{y,9}$ bekannt. Um die Drillungsmomente für alle Maschenknoten nach (1003) zu berechnen, sind auch die Verschiebungen der dem Rande benachbarten Nebenknoten notwendig. Diese ergeben sich aus der Bedingung (938) für die Momentensummen am Rande.

$$w_{27} = -w_1 \text{ usw.}, \quad w_{33} = -w_3 \text{ usw.}, \quad \text{an der Ecke } w_{31} = w_3 \text{ usw.} \quad (1014)$$

Die Berechnung der Querkräfte Q_{10} bis Q_{25} und der Stützkkräfte A_{10} bis A_{25} nach (1004), (1005) setzt außerdem noch die Kenntnis über die Größe der Momentensummen M_{26} bis M_{48} in denselben Nebenknoten voraus. Sie ergeben sich aus den Differenzgleichungen (1001) für die Randpunkte.

$$M_1 + M_{27} = -p_{10} s^2 \text{ usw.}, \quad M_3 + M_{33} = -p_{14} s^2 \text{ usw.}$$

Eine andere Lösung mit Hilfe der Verschiebungen ist bereits auf S. 683 angegeben worden.

2. Starre Einspannung der Ränder. Die Verschiebungen w_{10} bis w_{25} sind Null, dagegen die Momentensummen M_{10} bis M_{25} von Null verschieden (Abb. 660).

Daher werden die Verschiebungen w_1 bis w_9 der Hauptknoten mit dem allgemeinen Ansatz (1000) in einer Stufe berechnet. Hierbei gehen die Verschiebungen der am Rande benachbarten Nebenknoten in die Gleichungen ein. Diese sind durch die Randbedingungen (942) bestimmt, da mit

$$\partial w / \partial y = 0: \quad w_{27} = w_1 \text{ usw.}, \quad \partial w / \partial x = 0: \quad w_{33} = w_3 \text{ usw.} \quad (1015)$$

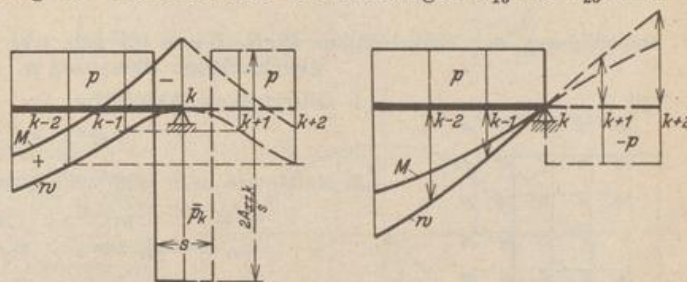
Mit den Wurzelwerten w_k sind nach (1003) alle Biege- und Drillungsmomente in den Knoten 1 bis 25 bestimmt. Die Drillungsmomente in den Randpunkten ergeben sich nach Vorschrift zu Null. Die Berechnung der Auflagerkraft ist bereits auf S. 683 abgeleitet worden.

3. Zwei anschließende Ränder (10 bis 17) der Platte sind kräftefrei, die beiden anderen (18 bis 25) frei aufgelagert (Abb. 660). Die Verschiebungen und Momentensummen in den Randknoten 17 bis 25 sind Null, so daß damit auch die Verschiebungen der Nebenknoten 38 bis 48 als antimetrisch zu den Verschiebungen der symmetrisch liegenden Hauptknoten bekannt sind. Damit können die Differenzgleichungen für die Punkte 1 bis 16 angeschrieben werden. Als Wurzeln erscheinen nur noch die unbekanntenen Verschiebungen der Nebenknoten 26 bis 36 und 51 bis 58. Diese müssen durch die Bedingungen $M_{y,25}$ bis $M_{y,13} = 0$, $M_{x,13}$ bis $M_{x,17} = 0$, $A_{y,10}$ bis $A_{y,13} = 0$, $A_{x,13}$ bis $A_{x,16} = 0$ und $C_{13} = 0$ eliminiert werden.

Die beliebige Belastung von achsensymmetrischen Platten (freie Auflagerung oder starre Einspannung aller vier Ränder) wird durch die Umordnung der Belastung nach den beiden Achsen im Sinne von Abschn. 27 in vier unabhängige Teile zerlegt, so daß in (1001), (1002) nur die Momentensummen $^{(1)}M_k \dots ^{(4)}M_k$ und die Verschiebungen $^{(1)}w_k \dots ^{(4)}w_k$ eines Quadranten als Wurzeln auftreten.

$$M_k = ^{(1)}M_k + \dots + ^{(4)}M_k, \quad w_k = ^{(1)}w_k + \dots + ^{(4)}w_k. \quad (1016)$$

Die Momentensummen und Verschiebungen in Punkten der Symmetrieachsen I, II



Symmetrie von M_k, w_k am Rande der eingespannten Platte (Belastungsfunktion mit Singularität). Antimetrie von M_k, w_k am Rande der frei aufliegenden Platte (Belastungsfunktion mit Sprung). Abb. 662.

sind bei Antimetrie der Belastung nach I und II Null. Die Rechnung wird dadurch vereinfacht. Sind mehrere Belastungsfälle, also auch die Einflußflächen von Verschiebungen oder Schnittkräften zu untersuchen, so wird nach Abschn. 29 die konjugierte Matrix zu den Differenzgleichungen (1000) oder (1001), (4002) gebildet.

Flächenlasten, die nicht mit der Teilung des Gitters in Beziehung stehen, werden maschenweise zu Einzellasten zusammengefaßt und nach dem Hebelgesetz auf die Maschenknoten verteilt.

Der Umfang der Zahlenrechnung nimmt wesentlich zu, wenn die Symmetrieeigenschaften der Stützung ganz oder teilweise wegfallen. Die Art der Untersuchung nach S. 684 wird jedoch nicht geändert. Der Spannungszustand an kräftefreien Ecken k liefert stets 5 Bedingungen. Neben denjenigen des kräftefreien Randes mit

$$M_{x,k} = 0, \quad M_{y,k} = 0, \quad A_{xz,k} = 0, \quad A_{yz,k} = 0$$

ist nach den Bemerkungen auf S. 648 auch $M_{xy,k} = M_{yx,k} = 0$, also

$$(\partial^2 w / \partial x \partial y)_k = 0.$$

Berechnung der rechteckigen Platte $b/a = 4/3$ mit frei aufliegenden Rändern für gleichmäßige Belastung p .

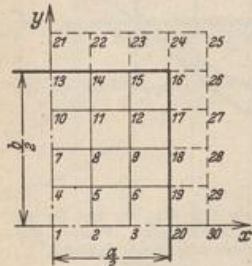


Abb. 663.

1. Gitterteilung (Abb. 663)

$$s = \frac{a}{6} = \frac{b}{8}.$$

2. Randwerte nach (938) und (1014).

$$M_{13} \text{ bis } M_{20} = 0, \quad w_{13} \text{ bis } w_{20} = 0.$$

$$w_{21} = -w_{10} \text{ usw.}, \quad w_{30} = -w_3 \text{ usw.}$$

$$w_{24} = w_{26} = 0, \quad w_{25} = w_{12}.$$

3. Differenzgleichungen (1001), (1002) für die 12 Gitterpunkte.

$$p_k s^2 = \frac{10^4}{36} \cdot \frac{p a^2}{10^4}, \quad \frac{M_k s^2}{N} = \frac{M_k}{10^{-4} p a^2} \cdot \frac{10}{36} \cdot \frac{p a^4}{10^5 N}.$$

I	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\frac{p a^2}{10^4}$	$\frac{p a^4}{10^5 N}$
4	-2		-2									277,8	256,3
-1	4	-1		-2								277,8	229,7
	-1	4			-2							277,8	147,2
-1			4	-2		-1						277,8	244,1
	-1		-1	4	-1		-1					277,8	219,1
		-1		-1	4			-1				277,8	140,8
			-1			4	-2		-1			277,8	204,7
				-1		-1	4	-1		-1		277,8	184,4
					-1		-1	4			-1	277,8	120,0
						-1			4	-2		277,8	128,8
							-1		-1	4	-1	277,8	117,2
								-1		-1	4	277,8	78,3

4. Die Iteration einer Näherungslösung liefert

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
M_k	923	827	530	879	789	507	737	664	432	464	422	282	$10^{-4} p a^2$
w_k	661	577	339	617	539	317	486	425	251	273	239	142	$10^{-5} p a^4 / N$

5. Schnittkräfte nach (1003) ff. und (1008), z. B.

$$M_{x,1} = \frac{36 N}{a^2} \cdot \frac{10^{-5} p a^4}{N} \left[-577 + 2 \cdot 661 - 577 + \frac{1}{6} (-617 + 2 \cdot 661 - 617) \right] = 0,066 p a^2,$$

$$M_{y,1} = \frac{36 N}{a^2} \cdot \frac{10^{-5} p a^4}{N} \left[\frac{1}{6} (-577 + 2 \cdot 661 - 577) - 617 + 2 \cdot 661 - 617 \right] = 0,042 p a^2,$$

$$M_{xv,16} = \frac{36 N}{4 a^2} \left(1 - \frac{1}{6} \right) \frac{10^{-5} p a^4}{N} [-142 - 142 - 142 - 142] = -0,043 p a^2,$$

$$A_{z,20} = \frac{216 N}{2 a^3} \cdot \frac{10^{-5} p a^4}{N} \left[4 \cdot \left(3 - \frac{1}{6} \right) 339 - 2 \cdot 577 - 2 \left(2 - \frac{1}{6} \right) (317 + 317) \right] + \frac{p a}{12} = 0,475 p a.$$

Die Schnittkräfte sind in Abb. 664 dargestellt. Sie stimmen gut mit den genauen Werten S. 677 überein. Der Auflagerdruck ergibt sich nach der gestrichelten Linie und ist an den Ecken nicht Null wie bei der strengen Lösung. Der Fehler nimmt mit der Gitterteilung ab. Der Auflagerdruck ist daher nach den Ecken zu kleiner als die Zahlenrechnung angibt und verläuft etwa nach der ausgezogenen Linie.

Um die Abhängigkeit des Ergebnisses der Differenzenmethode von der Gitterteilung zu zeigen, ist eine quadratische, frei aufliegende, gleichmäßig belastete Platte für $s = a/4$ und $a/8$ berechnet worden. Die Ergebnisse weichen nur wenig voneinander ab (Abb. 665).

In Abb. 666 sind die Ergebnisse für eine Einzellast in Plattenmitte mit $s = a/4, a/8, a/12$ dargestellt. Sie weichen nur in geringer Umgebung der Last von einander ab. Daher genügt es, die Berechnung für ein grobes Gitter durchzuführen und nur im Lastbereich ein feineres Gitter einzuschalten. Für das grobe Gitter $s = a/4$ (Abb. 665a) lauten die Differenzgleichungen (1001)

M_1	M_2	M_3	P	
4	-4			I
-1	4	-2		o
	-2	4		o

mit dem Ergebnis

$$M_1 = 0,374 P,$$

$$M_2 = 0,125 P,$$

$$M_3 = 0,0624 P.$$



a) Gitterteilung.

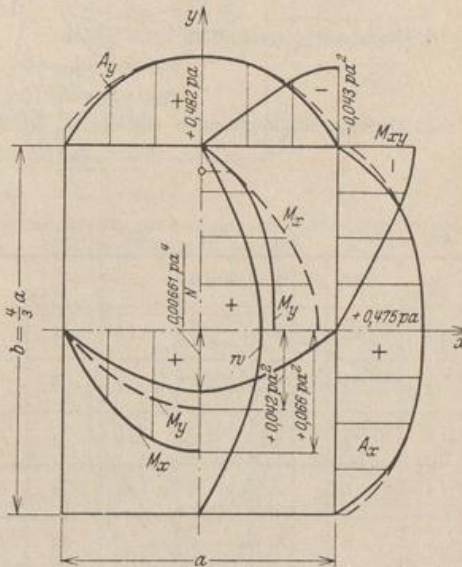
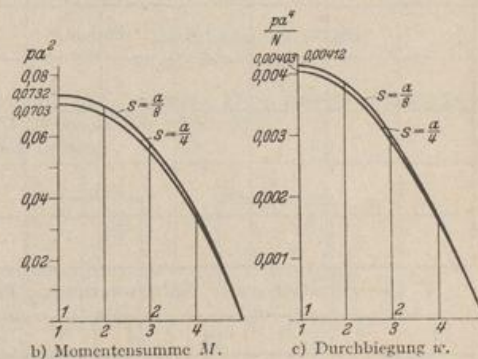


Abb. 664. Schnittkräfte der frei aufliegenden rechteckigen Platte mit gleichmäßiger Belastung p .



b) Momentensumme M .
Abb. 665.

c) Durchbiegung w .

Für das eingeschaltete feinere Gitter mit $s = a/8$ (Abb. 667) lauten die Gleichungen (1001)

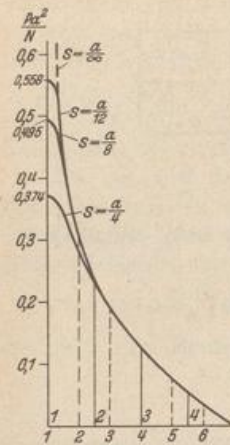


Abb. 666. Momentensumme M .

M_1	M_4	M_5	
4	-4		1
-1	4	-2	$0 + M_2$
	-2	4	$0 + 2 M_6$

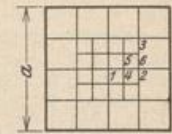


Abb. 667. Gitterteilung mit eingeschaltetem feinerem Gitter.

Mit $M_2 = 0,125 P$ und $M_6 = M_2 - \frac{1}{4}(M_2 - M_3) = 0,112 P$ aus einer quadratischen Interpolation ergibt sich $M_4 = 0,243 P$, $M_1 = 0,493 P$. Die Werte stimmen nach Abb. 666 mit dem Ergebnis für das 8teilige Gitter gut überein.

Berechnung der rechteckigen Platte $b/a=4/3$ mit eingespannten Rändern und gleichmäßiger Belastung p .

1. Gitterteilung (Abb. 668).

$$s = \frac{a}{6} = \frac{b}{8}$$

2. Randwerte nach (942) und (1015).

$$w_{13} \text{ bis } w_{20} = 0, \quad w_{21} = w_{10} \text{ usw.},$$

$$w_{30} = w_3 \text{ usw.}, \quad w_{25} = w_{12}.$$

3. Differenzgleichungen (1000) für die 12 Gitterpunkte.

$$\frac{p_k s^4}{N} = \frac{10^5}{6^4} \cdot \frac{p a^4}{10^5 N}$$

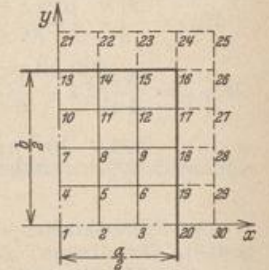


Abb. 668.

w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	$\frac{p a^4}{10^5 N}$
20	-16	2	-16	8		2						77,17
-8	21	-8	4	-16	4		2					77,17
1	4	21	-16	2	-8	4		2				77,17
-8	4		21	-16	2	-8	4		1			77,17
2	-8	2	-8	22	-8	2	-8	2		1		77,17
	2	-8	1	-8	22		2	-8			1	77,17
1			-8	4		20	-16	2	-8	4		77,17
	1		2	-8	2	-8	21	-8	2	-8	2	77,17
		1		2	-8	1	-8	21		2	-8	77,17
			1			-8	4		21	-16	2	77,17
				1		2	-8	2	-8	22	-8	77,17
					1		2	-8	1	-8	22	77,17

4. Die Iteration einer Näherungslösung liefert

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$10^{-5} p a^4/N$
w_k	227	187	86	207	171	79	149	124	59	67	56	27	

5. Schnittkräfte nach (1003ff.) und (1012), z. B.

$$M_{x,1} = \frac{36 N}{a^2} \cdot \frac{10^{-5} p a^4}{N} \left[-187 + 2 \cdot 227 - 187 + \frac{1}{6} (-207 + 2 \cdot 227 - 207) \right] = 0,032 p a^2,$$

$$M_{x,20} = \frac{36 N}{a^2} \cdot \frac{10^{-5} p a^4}{N} \left[-86 + 2 \cdot 0 - 86 + \frac{1}{6} \cdot 0 \right] = -0,062 p a^2,$$

$$A_{x,20} = \frac{216 N}{2 a^3} \cdot \frac{10^{-5} p a^4}{N} [16 \cdot 86$$

$$- 2 \cdot 187 - 4(79 + 79)] + \frac{p a}{12} = 0,49 p a.$$

Die Schnittkräfte sind in Abb. 669 dargestellt. Da der Auflagerdruck nach der strengen Lösung an der Ecke Null ist, wird das Ergebnis der Rechnung berichtigt (ausgezogene Linie). Der Fehler nimmt mit der Gitterteilung ab.

Berechnung der rechteckigen Platte $b/a = 4/3$ mit frei aufliegenden Rändern und einer Einzellast.

1. Gitterteilung (Abb. 670).

$$s = \frac{a}{6} = \frac{b}{8}.$$

2. Randwerte nach (938) und (1014).

Am ganzen Rand ist

$$M = 0 \text{ und } w = 0, \quad w_{21} = -w_{10} \text{ usw.}$$

3. Belastungsumordnung. Zur Berechnung der Durchbiegung nach (1002) sind 35 Differenzengleichungen auf-

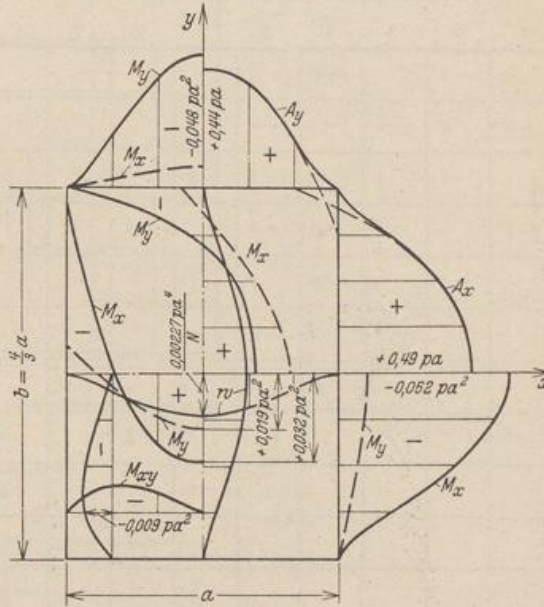


Abb. 669. Schnittkräfte der eingespannten rechteckigen Platte mit gleichmäßiger Belastung p .

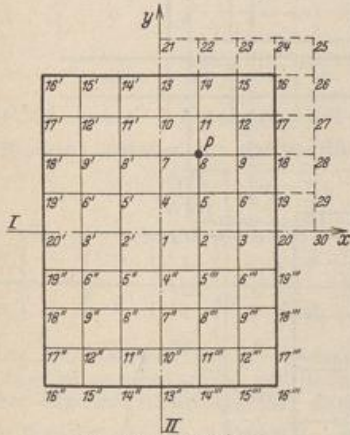


Abb. 670. Gitterteilung.

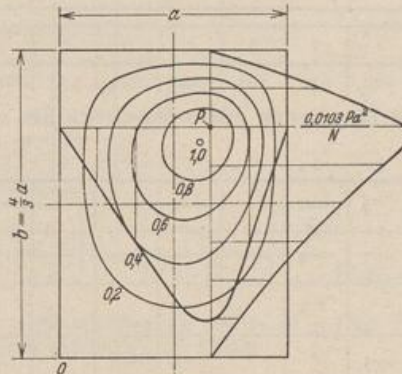


Abb. 671. Linien gleicher Durchbiegung.

$$w_{\max} = 0,0107 Pa^2/N.$$

zulösen. Es ist daher zweckmäßiger, die Belastung nach Abschn. 27 in die symmetrischen und antisymmetrischen Anteile zu den Achsen I, II umzuordnen (Abb. 672).

In den Antimetrieachsen ist $w = 0$ und daher bekannt.

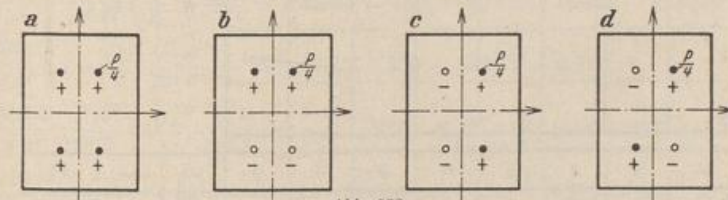


Abb. 672.

4. Differenzgleichungen (1001), (1002) für die 12 Gitterpunkte im 1. Quadranten.
 Im Punkt 8 ist

$$p_k s^2 = \frac{P}{4}, \quad \frac{M_k}{N} s^2 = \frac{4 M_k}{P} \cdot \frac{10^5}{144} \cdot \frac{P a^2}{10^5 N}$$

In allen anderen Punkten sind die Belastungsglieder Null.

a) 4 symmetrische Einzellasten $P/4$ (Abb. 672a).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$P/4$	$\frac{Pa^2}{10^5 N}$
4	-2		-2									0	228
-1	4	-1		-2								0	205
	-1	4			-2							0	113
-1			4	-2		-1						0	249
	-1		-1	4	-1		-1					0	230
		-1		-1	4			-1				0	124
			-1			4	-2		-1			0	287
				-1		-1	4	-1		-1		1	380
					-1		-1	4			-1	0	144
						-1			4	-2		0	147
							-1		-1	4	-1	0	150
								-1		-1	4	0	73

$k =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
$w^I =$	729	637	365	709	624	355	613	557	307	343	305	172	$Pa^2/10^5 N$

b) 4 Einzellasten $P/4$, symmetrisch zur y -Achse, antimetrisch zur x -Achse (Abb. 672b).

4	5	6	7	8	9	10	11	12	$P/4$	$\frac{Pa^2}{10^5 N}$
4	-2		-1						0	114
-1	4	-1		-1					0	121
	-1	4			-1				0	57
-1			4	-2		-1			0	214
	-1		-1	4	-1		-1		1	315
		-1		-1	4			-1	0	107
			-1			4	-2		0	114
				-1		-1	4	-1	0	121
					-1		-1	4	0	57

$k =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
$w^{II} =$	0	0	0	180	164	90	277	265	138	180	164	90	$Pa^2/10^5 N$

c) 4 Einzellasten $P/4$, symmetrisch zur x -Achse, antimetrisch zur y -Achse (Abb. 672c).

	2	3	5	6	8	9	11	12	$P/4$	$\frac{Pa^2}{10^5 N}$
4	-1	-2							0	50,7
-1	4		-2						0	37,6
-1		4	-1	-1					0	82,8
	-1	-1	4		-1				0	49,8
		-1		4	-1	-1			1	230,8
			-1	-1	4		-1		0	79,3
				-1		4	-1		0	66,8
					-1	-1	4		0	36,5

$k =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$w^{III} =$	0	69	60	0	82	67	0	111	75	0	55	41

$Pa^2/10^5 N$

d) 4 antimetrische Einzellasten (Abb. 672d).

	5	6	8	9	11	12	$\frac{P}{4}$	$\frac{Pa^2}{10^5 N}$
4	-1	-1					0	64,6
-1	4		-1				0	34,4
-1		4	-1	-1			1	224,2
	-1	-1	4		-1		0	73,2
			-1		4	-1	0	64,6
				-1	-1	4	0	34,4

$k =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$w^{IV} =$	0	0	0	0	49	36	0	96	60	0	49	36

$Pa^2/10^5 N$

Die Superposition der Einzelergebnisse liefert die Ausbiegung infolge $P = 1$ im Punkt 8 mit $w_k = w_k^I + w_k^{II} + w_k^{III} + w_k^{IV}$ nach der Zusammenstellung auf S. 692. Das Ergebnis ist in Abb. 671 dargestellt.

5. Schnittkräfte nach (1003)ff. und (1008), z. B.

$$M_{z,8} = \frac{36 N}{a^2} \cdot \frac{Pa^2}{10^5 N} \left[-890 + 2 \cdot 1029 - 580 + \frac{1}{6} (-919 + 2 \cdot 1029 - 573) \right] = 0,246 P.$$

$$M_{y,8} = \frac{36 N}{a^2} \cdot \frac{Pa^2}{10^5 N} \left[\frac{1}{6} (-890 + 2 \cdot 1029 - 580) - 919 + 2 \cdot 1029 - 573 \right] = 0,239 P.$$

$$M_{z,16} = \frac{36 N}{4 a^2} \left(1 - \frac{1}{6} \right) \frac{Pa^2}{10^5 N} [-339 - 339 - 339 - 339] = -0,102 P.$$

$$A_{z,18} = \frac{216 N}{2 a^3} \cdot \frac{Pa^2}{10^5 N} \left[4 \left(3 - \frac{1}{6} \right) 580 - 2 \cdot 1029 - 2 \left(2 - \frac{1}{6} \right) (548 + 339) \right] = 1,36 P/a.$$

$$A_{y,13} = \frac{216 N}{2 a^3} \cdot \frac{Pa^2}{10^5 N} \left[4 \left(3 - \frac{1}{6} \right) 523 - 2 \cdot 890 - 2 \left(2 - \frac{1}{6} \right) (573 + 365) \right] = 1,38 P/a.$$

Die Schnittkräfte sind in Abb. 673 dargestellt. Der Auflagerdruck ergibt sich etwas zu groß, da das Integral längs des ganzen Randes etwa $1,4 P$ wird. Der Fehler nimmt mit der Gitterteilung ab.

			$P a^2/N$	$P a^2/N$	$P a^2/N$	$P a^2/N$
12			0,00339			
11			0,00573			
10			0,00523			
9			0,00580			
8			0,01029			
7			0,00890			
6			0,00548			
5			0,00919			
4			0,00889			
3			0,00425			
2			0,00706			
1			0,00729			
	w_k					
	$w_{k'}$					
	$w_{k''}$					
	$w_{k'''}$					

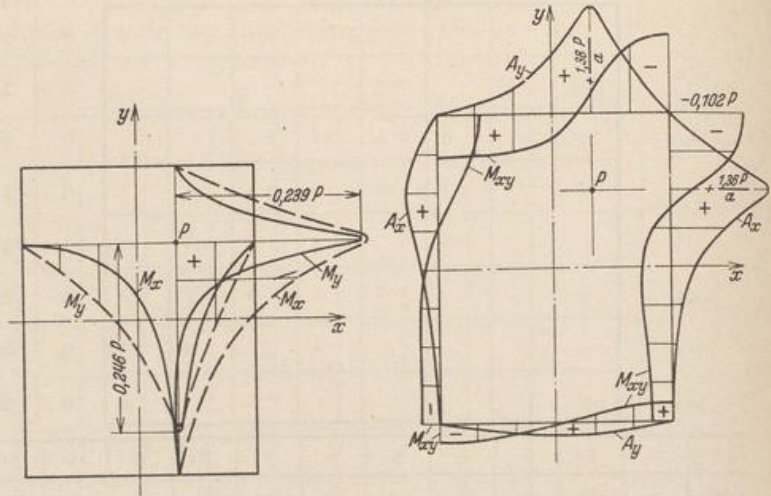


Abb. 673.

a) Biegemomente der frei aufliegenden rechteckigen Platte mit einer Einzellast P. b) Randkräfte der frei aufliegenden rechteckigen Platte mit einer Einzellast P.

Die Aufgabe kann auch mit einem Ansatz gelöst werden, wenn ein gröberes Gitter gewählt wird. Für das Gitter nach Abb. 674 lauten z. B. die Differenzgleichungen mit $s = a/3$

						P	$P a^2$
						4	$10^5 N$
8''	8'''	2'	2	8'	8	0	218
4	-1	-1				0	313
-1	4		-1			0	552
-1		4	-1	-1		0	1035
	-1	-1	4		-1	0	958
		-1		4	-1	0	958
			-1	-1	4	4	3275

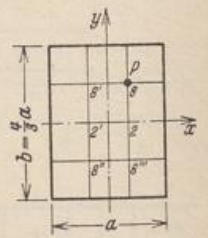


Abb. 674.

$k =$	8''	8'''	2'	2	8'	8	
$w_k =$	285	345	575	786	680	1186	$P a^2/10^5 N$

Diese Werte sind als Näherung durchaus noch brauchbar, wie der Vergleich mit der Zahlentafel am Rande der Seite zeigt. Für die Schnittkräfte sind dagegen größere Abweichungen zu erwarten.

So ist z. B. $M_{x,8} = 0,176 P$ gegenüber $0,246 P$. Genauere Werte ergeben sich, wenn die Biegefläche mit den Näherungswerten aufgezeichnet wird und die Ordinaten zur Bestimmung der Momente für eine engere Teilung der Zeichnung entnommen werden. Auf diese Weise wird z. B. $M_{x,8} = 0,255 P$.

Berechnung einer Behälterwand mit hydrostatischer Belastung.

Die rechteckige Seitenwand eines Behälters mit quadratischem Grundriß ist am oberen Rande frei, am unteren elastisch eingespannt und an den Seiten starr eingespannt. Sie kann

daher in erster Annäherung als Platte berechnet werden, die an drei Seiten starr eingespannt und an einer Seite kräftefrei ist.

Um die Rechnung abzukürzen, ist $\mu = 0$ angenommen worden.

1. Gitterteilung (Abb. 675).

$$s = \frac{a}{3} = \frac{b}{4}.$$

2. Randwerte nach (938) und (943). An den eingespannten Rändern ist

$$w_k = 0, \quad w_{18} = w_6 \text{ usw.}, \quad w_{25} = w_1 \text{ usw.}$$

Am freien Rand ist $M_y = 0, A_y = 0$. Mit (1003) folgt daraus

$$w_7 = 2w_5 - w_3, \quad w_8 = 2w_6 - w_4, \quad w_9 = 0.$$

Diese Beziehungen liefern mit (1005)

$$w_{10} = w_1 - 12w_3 + 8w_4 + 12w_5 - 8w_6,$$

$$w_{11} = w_2 + 4w_3 - 12w_4 - 4w_5 + 12w_6.$$

3. Die Belastungszahlen. Die hydrostatische Belastung wird nach S. 682 über den Plattenrand hinaus stetig fortgesetzt und nach dem Hebelgesetz auf die Gitterpunkte verteilt (Abb. 675).

$$p_5 = p_6 = 0, \quad p_3 = p_4 = \frac{1}{3} p_0, \quad p_1 = p_2 = \frac{2}{3} p_0, \quad p_{17} = p_{16} = p_0.$$

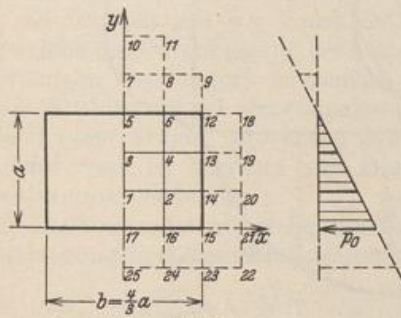


Abb. 675.

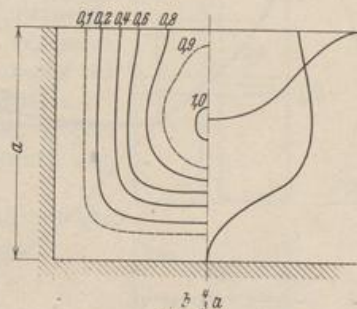


Abb. 676.

4. Differenzengleichungen (1000) für die Gitterpunkte 1 bis 6. Beim Aufstellen der Differenzengleichungen werden die Randbedingungen unter 2 berücksichtigt.

w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	$\frac{p_0 a^4}{1000 N}$
21	-16	-8	4	1		8,23
-8	23	2	-8		1	8,23
-8	4	19	-16	-6	4	4,12
2	-8	-8	21	2	-6	4,12
2		-12	8	16	-16	0
	2	4	-12	-8	18	0

5. Die Iteration einer Näherungslösung liefert

$k =$	1	2	3	4	5	6	
$w_k =$	2,003	1,362	2,265	1,728	2,321	1,442	$p_0 a^4 / 1000 N$

Die Biegefläche ist in Abb. 676 dargestellt.

6. Schnittkräfte nach (1003) ff. und (1012), z. B.

$$M_{y,17} = \frac{9N}{a^2} \frac{p_0 a^4}{1000N} [-2,003 - 2,003] = 0,036 p_0 a^2,$$

$$M_{x,12} = \frac{9N}{a^2} \frac{p_0 a^4}{1000N} [-1,442 - 1,442] = 0,026 p_0 a^2,$$

$$A_{y,17} = \frac{27N}{2a^3} \frac{p_0 a^4}{1000N} [16 \cdot 2,003 - 2 \cdot 2,658 - 4 \cdot 2,724] + \frac{p_0 a}{6} = 0,38 p_0 a.$$

Die Schnittkräfte sind in Abb. 677 eingetragen.

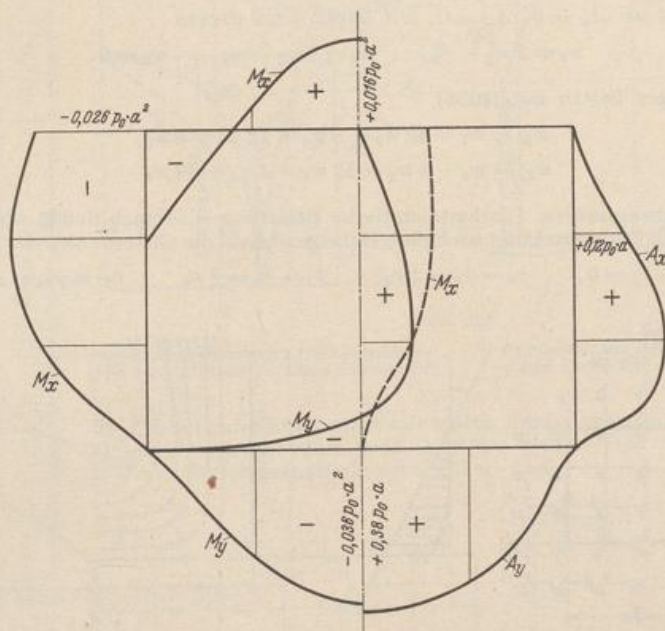


Abb. 677.

Marcus, H.: Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten. Berlin 1924, u. Arm. Beton 1919 S. 107. — Nielsen, N. S.: Bestemmelse af Spøendinger in Plader ved anvendelse af Differensligninger. Kopenhagen 1920. — Kirsten, O.: Beitrag zur Berechnung der rechteckigen Platte mit beliebigen Randbedingungen. Diss. Dresden 1924.

72. Die Abschätzung des Spannungszustandes in rechteckigen Platten nach H. Marcus.

Die Anwendung der Plattenstatik im Bauwesen ist durch die Beschreibung der statischen und geometrischen Zusammenhänge mit Differenzen und Differenzgleichungen aus den Ordinaten w_k der elastischen Fläche wesentlich gefördert worden, da die Aufgaben mit einfachen mathematischen Hilfsmitteln für die Bedürfnisse der Technik hinreichend genau gelöst werden. Da es jedoch in vielen Fällen genügt, das Spannungsbild zur Beurteilung der Sicherheit des Tragwerks in elementarer Weise summarisch zu erfassen, wird die Plattenbiegung in erster Annäherung mit der Formänderung zweier sich rechtwinklig kreuzender Trägerschaaren l_x, l_y verglichen, die sich unabhängig voneinander durchbiegen und die an den Enden unter denselben Bedingungen gelagert sind, wie der Plattenrand. Die Formänderung der Träger l_x entsteht durch eine Belastung $p(x)$, diejenige der Träger l_y aus einer Belastung $p(y)$. Ihre Summe ist an jedem Kreuzungspunkt (x, y) gleich der vorgeschriebenen Belastung $p = p(x) + p(y)$ (Abb. 678). Bilden die Trägerschaaren

einen Rost (Abschn. 65), dessen Elemente sich an den Kreuzungspunkten nicht mehr relativ zueinander verschieben, so entstehen für $\phi(x)$ und $\phi(y)$ Bedingungengleichungen, die sich jedoch nur dann einfach anschreiben lassen, wenn allein zwei ausgezeichnete Träger l_x, l_y betrachtet werden. Hierfür werden die Träger mit der größten Durchbiegung ausgewählt.

Bei freier Auflagerung der Platte (Abb. 678) sind die größten Durchbiegungen der Träger in Trägermitte

$$\delta_x = \frac{5}{384} \frac{p_x l_x^4}{E J_x}, \quad \delta_y = \frac{5}{384} \frac{p_y l_y^4}{E J_y},$$

wenn $\phi(x), \phi(y)$ in erster Annäherung konstant angenommen werden. Da $\phi = \phi_x + \phi_y$ und $\delta_x = \delta_y$, so ist für $J_x = J_y$

$$\phi_x = \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} \phi, \quad \phi_y = \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4} \phi. \quad (1017)$$

Die Anteile ϕ_x, ϕ_y von ϕ ändern sich mit der Art der Stützung des Plattenrandes. Ihre Größe ist für jeden Fall in der Übersicht S. 698 enthalten.

Die Formänderung der Platte unterscheidet sich von derjenigen eines Trägers l_x, l_y durch die Verdrillung der Plattenstreifen infolge von Schubspannungen an den Streifenrändern. Sie bilden an Streifen mit $x = \text{const}$ Drillungsmomente M_{xy} , an Streifen mit $y = \text{const}$ Drillungsmomente M_{yx} , welche die Durchbiegung der Platte im Vergleich zu derjenigen des Trägers verkleinern und daher bei gleicher Ausbiegung die Tragfähigkeit der Platte im Vergleich zum Träger vergrößern (Abb. 678). Dieses Bild wird von H. Marcus zur Beschreibung der Plattenbiegung verwendet.

Die Drillungsmomente stehen nach S. 645 mit der Plattenbiegung in folgendem Zusammenhang:

$$M_{xy} = M_{yx} = -N(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Sie ändern sich beim Fortschreiten in der x - oder y -Richtung um $\partial M_{xy}/\partial x$ oder $\partial M_{yx}/\partial y$, so daß an einem Plattenstreifen l_x oder l_y von der Breite b ein Unterschied M_x, M_y der Drillungsmomente entsteht,

$$M_x = b \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = -N(1 - \mu) b \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}, \quad M_y = b \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -N(1 - \mu) b \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}, \quad (1018)$$

der sich als Belastung der Streifen l_x, l_y durch ein stetig verteiltes Kräftepaar M_x, M_y deuten läßt. Dieses erzeugt die Biegemomente M'_x, M'_y , die mit den Biegemomenten M_x, M_y aus der Belastung ϕ_x, ϕ_y überlagert werden. Das Ergebnis M_x^*, M_y^* zeigt folgende Form:

$$\left. \begin{aligned} M_x^* &= M_x + M'_x = M_x \left(1 + \frac{M'_x}{M_x} \right) = M_x (1 - \varphi_x), \\ M_y^* &= M_y + M'_y = M_y \left(1 + \frac{M'_y}{M_y} \right) = M_y (1 - \varphi_y). \end{aligned} \right\} \quad (1019)$$

$$M'_x = -b \int \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dx + C_1 = -N(1 - \mu) b \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + C_1 = -N(1 - \mu) b \frac{1}{\rho_y^2} + C_1,$$

$$M'_y = -b \int \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dy + C_2 = -N(1 - \mu) b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_2 = -N(1 - \mu) b \frac{1}{\rho_x^2} + C_2.$$

Die Integrationskonstanten C_1, C_2 sind bei achsensymmetrischer Belastung und frei drehbarer Auflagerung der Streifenenden Null. Die Biegemomente M'_x, M'_y

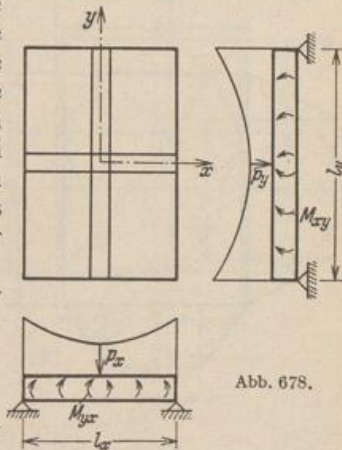


Abb. 678.

werden also von der Verkantung der Streifen l_x, l_y bestimmt. Sie erzeugen allein die Ausbiegung w'_x, w'_y , die mit der Ausbiegung w_x, w_y aus der Belastung p_x, p_y überlagert, die Formänderung w_x^*, w_y^* der Streifen der Plattenbiegung angleicht.

$$w_x^* = w_x + w'_x, \quad w_y^* = w_y + w'_y.$$

Wird der Verlauf der Biegemomente M'_x, M'_y in erster Annäherung als ähnlich zu demjenigen von M_x, M_y angenommen, so ist ebenfalls in erster Annäherung

$$w'_x/w_x = w'_y/w_y = c \quad \text{und} \quad w'_x = c w_x, \quad w'_y = c w_y$$

und mit $w_x^* = w_y^*$ ebenso wie auf S. 695

$$w_x = w_y, \quad \text{also} \quad p_x = \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} p, \quad p_y = \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4} p.$$

Die Biegemomente M'_x, M'_y der Streifen l_x, l_y aus den Drillungsmomenten sind von H. Marcus durch den Vergleich mit den Ergebnissen der strengen Theorie in Plattenmitte abgeleitet worden.

Die Grenzwerte der Biegemomente $M'_x = -\varphi_x M_x, M'_y = -\varphi_y M_y$ zweier ausgezeichneten Plattenstreifen l_x, l_y mit dem Unterschied M_x, M_y der Drillungsmomente an den Intervallgrenzen als Belastung können nach H. Marcus durch

$$\varphi_x = c_y \left(\frac{l_x}{l_y}\right)^2, \quad \varphi_y = c_x \left(\frac{l_y}{l_x}\right)^2 \quad (1020)$$

angegeben werden. Die Beiwerte c_x, c_y beschreiben dabei im wesentlichen die Randbedingungen der Platte. Sie werden von H. Marcus aus einem Vergleich mit denselben Biegemomenten der Plattentheorie abgeschätzt.

$$c_y = \frac{5}{6} \frac{M_{x \max}}{M_{0x}}, \quad c_x = \frac{5}{6} \frac{M_{y \max}}{M_{0y}}. \quad (1021)$$

In diesem Ansatz sind $M_{x \max}, M_{y \max}$ die größten Biegemomente aus der Belastung p_x, p_y der Plattenstreifen l_x, l_y mit den vorgeschriebenen Rand-

bedingungen, M_{0x}, M_{0y} die größten Biegemomente zweier frei aufliegender Plattenstreifen l_x, l_y für die volle Belastung $p = p_x + p_y$. Die größten Biegemomente der drillungssteifen Platte $M_{x \max}^*, M_{y \max}^*$ entstehen daher nach H. Marcus in erster Annäherung aus einer einheitlichen Lösung

$$M_{x \max}^* = M_{x \max} (1 - \varphi_x) = M_{x \max} \nu_x, \quad M_{y \max}^* = M_{y \max} (1 - \varphi_y) = M_{y \max} \nu_y, \quad (1022)$$

deren Ergebnisse sich mit denjenigen der Plattentheorie vergleichen lassen.

An den eingespannten Plattenrändern sind nach (942) keine Drillungsmomente vorhanden. Die Schaulinien der Biegemomente am Rande berühren die Bezugsachsen an den Ecken (S. 679). Als Mittelwerte M_{xr}, M_{yr} genügen die Einspannungsmomente der ausgezeichneten Plattenstreifen l_x, l_y aus der Belastung p_x, p_y (Abb. 679).

$$M_{xr} = -\frac{p_x l_x^2}{12}, \quad M_{yr} = -\frac{p_y l_y^2}{12} < -\frac{p l_x^2}{24} \quad \text{bei} \quad l_x < l_y. \quad (1023)$$

Der Grenzwert kann nach H. Marcus mit

$$M_{x \min} = -\frac{p_x l_x^2}{12 \nu_x}, \quad M_{y \min} = -\frac{p_y l_y^2}{12 \nu_y} \approx -\frac{p l_x^2}{20} \quad (1024)$$

angenommen werden.

Das Bild der Biegemomente in den mittleren Querschnitten ist durch die strengen Lösungen der Aufgabe in Abb. 649 gegeben. Das Ergebnis ist in der

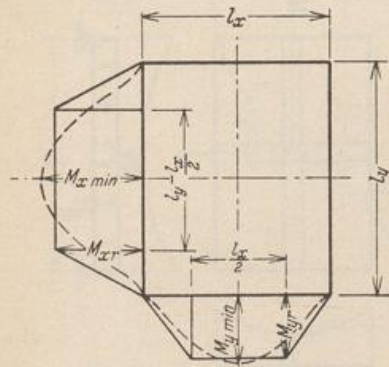


Abb. 679.

Tab. 65 enthalten und wird in den bekannten Bestimmungen des Deutschen Ausschusses (§ 23) verwendet. Die Platten Abb. 685 und 686 sind danach gerechnet worden.

Die Rechenvorschriften für die rechteckige Platte lassen sich auch zur Abschätzung der Biegemomente in durchgehenden Platten anwenden, da die Randbedingungen der einzelnen Felder bei gleichförmiger Belastung angenähert mit denjenigen der einzelnen Platte mit frei aufliegenden oder eingespannten Rändern übereinstimmen. Schachbrettartige Belastung wird umgeordnet und besteht dann aus der gleichförmigen Belastung ${}^{(1)}p = p/2$ und aus abwechselnder Belastung der Felder mit ${}^{(2)}p = \pm p/2$, so daß $p = {}^{(1)}p + {}^{(2)}p$. Die Randbedingungen der Felder sind für ${}^{(2)}p$, unendliche Ausdehnung der Platte angenommen, mit freier Auflagerung identisch.

Drillungsmomente. Die Tragfähigkeit einer Platte beruht, verglichen mit dem Trägerrost, auf der Mitwirkung der Drillungsmomente. Die größten Biegemomente von Platte und Rost stehen nach (1022) im Verhältnis ν_x, ν_y . Im übrigen wird die Festigkeit der Platte durch die Hauptbiegemomente M_I, M_{II} bestimmt, die sich nach (921) aus M_x^*, M_y^* und den Drillungsmomenten zusammensetzen. Diese treten nach (919) in folgende Beziehung zum Verschiebungszustand $w(x, y)$ der Platte:

$$\begin{aligned} M_{xy} = M_{yx} &= -N(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -N(1-\mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ &= -N(1-\mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (1025)$$

Das Drillungsmoment ist daher bei achsensymmetrischer Belastung an allen Punkten der Biegefläche Null, in denen die Tangentialebene an die Biegefläche parallel zur x - oder y -Achse ist, und wechselt auf diesen ausgezeichneten Parallelen das Vorzeichen. Es ist im ersten und dritten Quadranten negativ, im zweiten und vierten Quadranten positiv. Die Funktion M_{xy} erhält einen Extremalwert, wenn

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = 0 = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0 = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (1026)$$

Die Bedingungen sind in einem Punkte S erfüllt, in welchem die Schnitte $x = \text{const}$ und $y = \text{const}$ der elastischen Fläche einen gemeinsamen Wendepunkt besitzen. Die Ordinaten M_{xy} beschreiben daher vier Körper, deren Grundriß mit $M_{xy} = 0$ durch die ausgezeichneten Geraden $x = s_A, y = t_A$ bestimmt ist, die sich in dem Punkte O mit $w = w_{\max}$ schneiden. Der Inhalt V eines Körpers ist durch Integration nach Abb. 680

$$V = \int_0^{s_A} \int_0^{t_A} M_{xy} dx dy = -N(1-\mu) \int_0^{s_A} \int_0^{t_A} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy = -N(1-\mu) w_{\max}, \quad (1027)$$

also proportional zur größten Ausbiegung der Platte. Da nun die Drillungsmomente in erster Annäherung als lineare Funktionen angenommen werden können und bei starrer Einspannung längs des Randes Null sind, approximiert H. Marcus den Körper als Pyramide und setzt

$$\begin{aligned} V &= -N(1-\mu) w_{\max} = \frac{1}{3} s_A t_A M_{xy, \max}^{(A)} = -\frac{1}{3} s_B t_B M_{xy, \max}^{(B)} \\ &= \frac{1}{3} s_C t_C M_{xy, \max}^{(C)} = -\frac{1}{3} s_D t_D M_{xy, \max}^{(D)}. \end{aligned} \quad (1028)$$

Die größte Durchbiegung w_{\max} ist durch die Biegemomente $M_{x \max}^*$ oder $M_{y \max}^*$ und durch die Spannungsmomente M_{xx}, M_{yy} der beiden ausgezeichneten

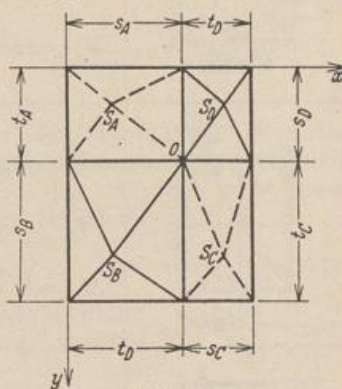


Abb. 680.

Tabelle 65. Abschätzung der größten Biegemomente in rechteckigen Platten mit gleichmäßig verteilter Last nach H. Marcus.

$\lambda = l_y/l_x$, frei aufliegender, // // // // // eingespannter Rand.

	$p_x = p \frac{\lambda^4}{1 + \lambda^4}, \quad v_x = v_y = v, \quad M_{x \max} = \frac{p_x l_x^2}{8} v$ $p_y = p \frac{1}{1 + \lambda^4}, \quad v = 1 - \frac{5}{6} \frac{\lambda^2}{1 + \lambda^4}, \quad M_{y \max} = \frac{p_y l_y^2}{8} v$ $M_{x_r} = M_{y_r} = 0, \quad N w_{\max} = \frac{p_x l_x^4}{72} v$
	$p_x = p \frac{\lambda^4}{1 + \lambda^4}, \quad v_x = v_y = v, \quad M_{x \max} = \frac{p_x l_x^2}{24} v$ $p_y = p \frac{1}{1 + \lambda^4}, \quad v = 1 - \frac{5}{18} \frac{\lambda^2}{1 + \lambda^4}, \quad M_{y \max} = \frac{p_y l_y^2}{24} v$ $M_{x_r} = -\frac{p_x l_x^2}{12}, \quad M_{y_r} = -\frac{p_y l_y^2}{24}, \quad (l_x < l_y), \quad N w_{\max} = \frac{p_x l_x^4}{192} \frac{v}{1 + v^2}$
	$p_x = p \frac{5 \lambda^4}{2 + 5 \lambda^4}, \quad v_x = 1 - \frac{75}{32} \frac{\lambda^2}{2 + 5 \lambda^4}, \quad M_{x \max} = \frac{9}{128} p_x l_x^2 v_x$ $p_y = p \frac{2}{2 + 5 \lambda^4}, \quad v_y = 1 - \frac{5}{3} \frac{\lambda^2}{2 + 5 \lambda^4}, \quad M_{y \max} = \frac{p_y l_y^2}{8} v_y$ $M_{x_r} = -\frac{p_x l_x^2}{8}, \quad N w_{\max} = \frac{p_x l_x^4}{720} (1,064 + 2,815 v_x)$
	$p_x = p \frac{5 \lambda^4}{1 + 5 \lambda^4}, \quad v_x = 1 - \frac{25}{18} \frac{\lambda^2}{1 + 5 \lambda^4}, \quad M_{x \max} = \frac{p_x l_x^2}{24} v_x$ $p_y = p \frac{1}{1 + 5 \lambda^4}, \quad v_y = 1 - \frac{5}{6} \frac{\lambda^2}{1 + 5 \lambda^4}, \quad M_{y \max} = \frac{p_y l_y^2}{8} v_y$ $M_{x_r} = -\frac{p_x l_x^2}{12}, \quad N w_{\max} = \frac{p_x l_x^4}{360} v_y$
	$p_x = p \frac{2 \lambda^4}{1 + 2 \lambda^4}, \quad v_x = 1 - \frac{5}{9} \frac{\lambda^2}{1 + 2 \lambda^4}, \quad M_{x \max} = \frac{p_x l_x^2}{24} v_x$ $p_y = p \frac{1}{1 + 2 \lambda^4}, \quad v_y = 1 - \frac{15}{32} \frac{\lambda^2}{1 + 2 \lambda^4}, \quad M_{y \max} = \frac{9}{128} p_y l_y^2 v_y$ $M_{x_r} = -\frac{p_x l_x^2}{8}, \quad M_{y_r} = -\frac{p_y l_y^2}{8}, \quad N w_{\max} = \frac{p_x l_x^4}{192} \frac{v_x}{1 + v_x}$
	$p_x = p \frac{\lambda^4}{1 + \lambda^4}, \quad v_x = v_y = v, \quad M_{x \max} = \frac{9}{128} p_x l_x^2 v$ $p_y = p \frac{1}{1 + \lambda^4}, \quad v = 1 - \frac{15}{32} \frac{\lambda^2}{1 + \lambda^4}, \quad M_{y \max} = \frac{9}{128} p_y l_y^2 v$ $M_{x_r} = -\frac{p_x l_x^2}{8}, \quad M_{y_r} = -\frac{p_y l_y^2}{8}, \quad N w_{\max} = \frac{p_x l_x^4}{720} (1,064 + 2,815 v)$

Plattenstreifen l_x, l_y nach Abschn. 20 bestimmt. Sie ist in der Tabelle S. 698 angegeben, so daß damit nach Gl. (1028) die Drillungsmomente errechnet werden können. Außerdem werden von H. Marcus mit Abb. 681 und $\mu = 0$ noch die Quadraturen (1029) verwendet. Der Ursprung des Koordinatensystems ist dabei im Punkte O mit $w = w_{\max}$ angenommen.

$$\left. \begin{aligned} \int_0^x M_x dx &= -N \int_0^x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx = - \left[N \frac{\partial w}{\partial x} \right]_0^x = -N \frac{\partial w}{\partial x} = F_x, \\ \int_0^y M_y dy &= -N \int_0^y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy = - \left[N \frac{\partial w}{\partial y} \right]_0^y = -N \frac{\partial w}{\partial y} = F_y, \\ \int_y^b M_{xy} dy &= -N \int_y^b \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dy = + \left[N \frac{\partial w}{\partial x} \right]_y^b = +N \frac{\partial w}{\partial x} = F_{xy}, \\ \int_x^a M_{yx} dx &= -N \int_x^a \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx = + \left[N \frac{\partial w}{\partial y} \right]_x^a = +N \frac{\partial w}{\partial y} = F_{yx}. \end{aligned} \right\} (1029)$$

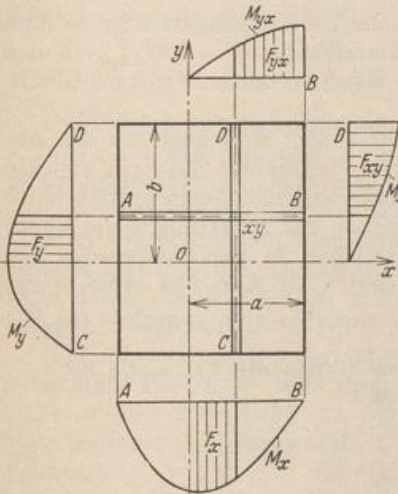


Abb. 681.

Daher gelten für die Flächen aus den Biege- und Drillungsmomenten über zugeordneten Abschnitten der Strecken $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ folgende Beziehungen:

$$F_x = -F_{xy}, \quad F_y = -F_{yx} \quad (1030)$$

Sie dienen zur Nachprüfung der größten Drillungsmomente $M_{xy, \max}$.

Die Auflagerkräfte der Platte. Die Querkräfte und Drillungsmomente an den Rändern der Platte werden entweder von einem Unterbau oder von Randträgern aufgenommen. Der Anteil aus den Querkräften läßt sich bei den gleichen Randbedingungen an

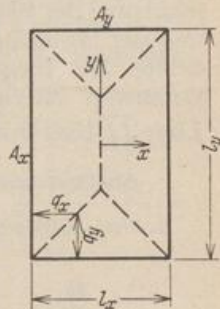


Abb. 682.

allen vier Rändern angenähert aus der Unterteilung der Grundfläche durch die Winkelhalbierenden in den Ecken angeben. Nach Abb. 682 ist mit $l_y/l_x = \lambda > 1$

$$\int_{-l_y/2}^{+l_y/2} q_x dy = Q_x = \frac{1}{4} p l_x^2 (2\lambda - 1), \quad \int_{-l_x/2}^{+l_x/2} q_y dx = Q_y = \frac{1}{4} p l_x^2. \quad (1031)$$

Bei verschiedener Lagerung der Ränder kann nach H. Marcus

$$Q_x = \frac{1}{2} p_x l_x l_y, \quad Q_y = \frac{1}{2} p_y l_x l_y,$$

gesetzt werden, wobei jedoch für die kurzen Ränder dasjenige p_x oder p_y zu wählen ist, das der quadratischen Platte entspricht.

Die Drillungsmomente an eingespannten Rändern sind Null. Der Verlauf der Drillungsmomente am Rande des ersten Quadranten einer freiaufliegenden Platte

ist in Abb. 683 dargestellt. Sie können durch einen Randträger aufgenommen werden, der auf diese Weise eine Momentenbelastung mit entgegengesetztem Dreh-sinn erhält und damit nach Abb. 678 am Rande l_y Biegemomente im Betrage von $-\int_y^{l_y/2} M_{xy} dy$, am Rande l_x Biegemomente im Betrage von $-\int_x^{l_x/2} M_{yx} dx$

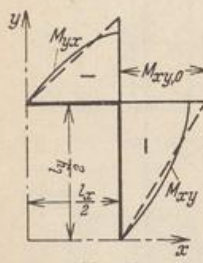


Abb. 683.

erhält. Wird der Verlauf der Drillungsmomente in erster Annäherung linear mit $M_{xy,0}$ am Eckpunkt angenommen, so sind die Biegemomente in der Mitte der Randträger

$$-\int_0^{l_y/2} M_{xy} dy = -\frac{M_{xy,0} l_y}{4},$$

$$-\int_0^{l_x/2} M_{yx} dx = -\frac{M_{yx,0} l_x}{4}.$$

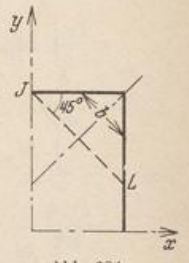


Abb. 684.

Da jedoch die Randträger aufliegen, tritt zu den Stützkraften Q_x, Q_y aus der Querkraft am Rande noch der Anteil

$$Q'_x = Q'_y = -2 M_{xy,0} = \frac{p v_x}{3} l_y^2 \frac{\lambda}{1 + \lambda^4}. \quad (1032)$$

Würde die Platte ohne Versteifungsträger am Rande frei aufgelagert sein, so muß die ihnen zugewiesene Kraftwirkung durch 4 Einzelkräfte $C = 2 M_{xy,0}$ an den Ecken ersetzt werden, die mit der stetig über dem Rand verteilten Kraft im Gleichgewicht stehen.

Die äußeren Kräfte am Rande im Bereich der Ecken sind auch für die Abschätzung der Biegemomente wichtig. H. Marcus betrachtet die Ecke zur Abschätzung der Biegungsspannungen als Stab mit veränderlicher Querschnittsbreite b und der Winkelhalbierenden als Achse. Er trägt neben der Belastung p die Randkräfte. Die Biegemomente M_1 des Stabes erreichen in der Plattenecke den Größt-wert im Betrage von $-M_{xy,0}$ mt/m und sind nach Abb. 654 etwa in der Linie JL Null (Abb. 684). Diese kennzeichnet daher einen Spannungswechsel für M_1 .

Abschätzung der Schnittkräfte in rechteckigen Platten mit $l_y/l_x = 4/3$ für gleichmäßige Belastung p .

1. Frei aufliegende Platte.

$$\lambda = 4/3 = 1,333, \quad \lambda^2 = 1,778, \quad \lambda^4 = 3,160.$$

Nach Tabelle 65 ist

$$p_x = p \frac{3,160}{4,160} = 0,759 p,$$

$$p_y = p \frac{1}{4,160} = 0,241 p,$$

$$v = 1 - \frac{5}{6} \frac{1,778}{4,160} = 0,644,$$

$$M_{x, \max} = \frac{0,759}{8} \cdot 0,644 p l_x^2 = 0,061 p l_x^2,$$

$$M_{y, \max} = \frac{0,241}{8} \cdot 0,644 p l_y^2 = 0,0194 p l_y^2 = 0,035 p l_x^2,$$

$$N w_{\max} = \frac{0,759}{72} \cdot 0,644 p l_x^4 = 0,00678 p l_x^4.$$

Nach (1028) ist

$$\frac{1}{3} M_{xy,0} \frac{l_x}{2} \frac{l_y}{2} = -0,00678 p l_x^4, \quad M_{xy,0} = -0,061 p l_x^2.$$

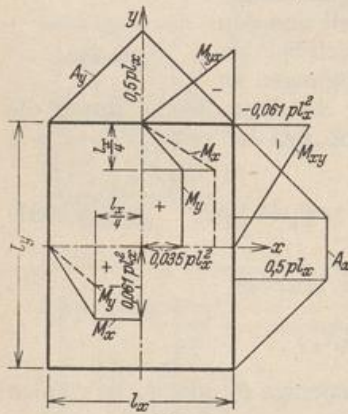


Abb. 685.

2. Eingespannte Platte.

$$\lambda = 4/3 = 1,333,$$

$$p_x = 0,759 p, \quad p_y = 0,241 p,$$

$$\nu = 1 - \frac{5}{18} \cdot \frac{1,778}{4,160} = 0,881,$$

$$M_{x, \max} = \frac{0,759}{24} \cdot 0,881 p l_x^2 = 0,028 p l_x^2,$$

$$M_{y, \max} = \frac{0,241}{24} \cdot 0,881 p l_y^2 = 0,00885 p l_y^2 = 0,016 p l_x^2,$$

$$M_{x, r} = -\frac{0,759}{12} p l_x^2 = -0,063 p l_x^2,$$

$$M_{y, r} = -\frac{p l_y^2}{24} = -0,042 p l_x^2,$$

$$N w_{\max} = \frac{0,759}{192} \cdot \frac{0,881}{1 + 0,881^2} p l_x^4 = 0,00196 p l_x^4.$$

Nach (1028) ist

$$\frac{1}{3} M_{xv,0} \frac{l_x}{2} \frac{l_y}{2} = -0,00196 p l_x^4, \quad M_{xv,0} = -0,018 p l_x^2.$$

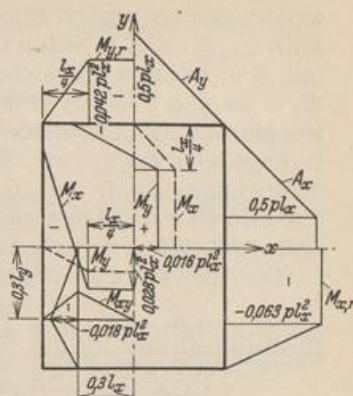


Abb. 686.

Klagas: Auswertung der Marcusschen Formeln für vierseitig gelagerte Platten. Bauing. 1927 S. 251. — Marcus, H.: Die vereinfachte Berechnung biegsamer Platten, 2. Aufl. Berlin 1929.

73. Die Pilzdecke.

Die Platten mit Zwischenstützung in Punkten oder Flächen sind von A. Nadai, V. Lewe, H. Marcus und N. J. Nielsen untersucht worden. Dabei wurden zunächst gleichförmige Belastung und unbegrenzte Ausdehnung nach beiden Seiten angenommen, um die Aufgabe durch Symmetriebetrachtungen zu vereinfachen. Die äußeren Kräfte und die Randbedingungen für den Spannungs- und Verschiebungszustand eines Feldes sind in diesem Falle bekannt. Die Lösung kann daher ebenso wie für eine rechteckige Platte nach S. 674 angegeben werden.

A. Nadai betrachtet den Abschnitt Abb. 687 der gleichförmig belasteten Pilzdecke mit den Randbedingungen $\partial w / \partial x = 0$, $Q_{xz} = 0$ und $P = 4ab\phi$ in den Schnitten $x = \pm a$ und den Randbedingungen $\partial w / \partial y = 0$, $Q_{yz} = 0$ und $P = 4ab\phi$ in den Schnitten $y = \pm b$. Die Randkräfte $P/4$, Q_{xz} , $P/4$ am Rande $x = \pm a$ und die Randkräfte $P/4$, Q_{yz} , $P/4$ am Rande $y = \pm b$ können durch eine Fouriersche Reihe als stetige Funktion angegeben werden. Die Verschiebungen bestehen wiederum aus einer Teillösung w^* für den Plattenstreifen mit $\partial w / \partial y = 0$ in $y = \pm b$ und aus einer zweiten Teillösung w^{**} , welche zusammen mit w^* die vorgeschriebenen Randbedingungen des Abschnitts erfüllt. A. Nadai bemerkt auf Grund des Ergebnisses, daß um jeder Stütze eine geschlossene Linie vorhanden ist, auf der das Biegemoment M_r um die Tangente verschwindet. Sie schneidet die Diagonale des quadratischen Feldes mit der Seitenlänge $2a$ in einer Entfernung von $0,46a$, die Verbindungslinie der Stützen in einer Entfernung $0,42a$ vom Stützpunkt und läßt sich durch einen Kreis mit dem Halbmesser $0,44a$ ersetzen. Der Spannungs- und Verschiebungszustand kann daher in dem Bereiche der Pilzdecke um den Stützpunkt mit guter Annäherung für eine frei drehbar angeschlossene Kreisplatte angeschrieben werden, die neben der gleichförmigen Belastung ϕ in O eine Einzellast $P = -4a^2\phi$ trägt, deren Querkraft an der Begrenzung $r = 0,44a$ bekannt und deren Verschiebung w_0 Null ist.



Abb. 687.

Eine ähnliche Näherungslösung ist von V. Lewe formuliert worden. Sie wird auf eine ringsum beweglich eingespannte Kreisplatte vom Radius R bezogen, deren Querkraft Q_{rz} für $r = R$ Null ist (Abb. 688). Daher ist R aus der Bedingung $\pi R^2 = 4 a^2$ mit $R = 1,1286 a$ vorgeschrieben. Die Platte liegt auf einem kreisförmigen Pilz mit $R_1 = \alpha a$ und $J = \infty$, so daß die Pilzdecke im Bereich der Stütze mit einer Kreisringplatte verglichen werden kann, deren Formänderung in $r = R_1$ durch die Randbedingungen $dw/dr = 0$, $Q_{rz} = -p(R^2 - R_1^2)/2 R_1$, in $r = R$ durch die Randbedingungen $dw/dr = 0$, $Q_{rz} = 0$ bestimmt ist. Beide Lösungen können mit den Tabellen 63 u. 64 angeschrieben und auch für zwischengeschaltete kreisrunde Platten nach Abb. 689 erweitert werden.

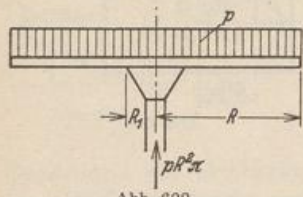


Abb. 688.

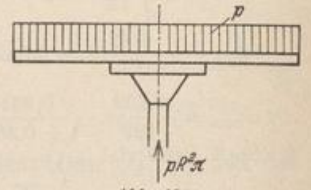


Abb. 689.

Die von V. Lewe angegebene strenge Lösung für die beiderseits unbegrenzte gleichförmig belastete und regelmäßig unterstützte Pilzdecke beruht, wie bereits auf S. 674 bemerkt, in der Entwicklung einer bekannten, aus der Belastung \bar{p} und dem Flächendruck \bar{p} bestehenden periodischen Funktion in eine doppelte trigonometrische Reihe. Damit kann die Lösung für das Feld Abb. 687 ebenso wie bei der rechteckigen Platte (983) nach Navier angeschrieben werden. Leider konvergieren die Reihen vor allem für die Schnittkräfte schlecht, so daß die Zahlenrechnung mühsam und umfangreich ist. Sie wird durch eine Anzahl von Tabellen erleichtert, die Lewe seinem mehrfach erwähnten Buche beigegeben hat. Diese enthalten auch Angaben für zweiseitig und allseitig begrenzte Pilzdecken mit Streifen- und Schachbrettbelastung. Die Anwendung der Differenzenrechnung auf die Untersuchung des Spannungs- und Verschiebungszustandes von Pilzdecken ist von H. Marcus und N. J. Nielsen gezeigt worden.

Die Berechnung einer nach zwei Seiten unendlich langen Pilzdecke mit einer Stützenreihe und frei aufliegenden Rändern.

Ansatz. Die Aufgabe kann mit Differenzen in einer Stufe nach (1000) oder in zwei Stufen nach (1001), (1002) gelöst werden. Da die Iteration einer Anfangslösung in beiden Fällen infolge der schlechten Konvergenz versagt, bleibt nur die algebraische Auflösung der Gleichungen nach C. F. Gauß übrig, um die Ausbiegung w so genau angeben zu können, daß die Schnittkräfte trotz der Fehlerempfindlichkeit der Rechnung nach (1003) ff. brauchbar sind. Die algebraische Auflösung in zwei Stufen ist naturgemäß einfacher, obwohl dann für die Stützpunkte wegen ihrer singulären Eigenschaften keine Differenzengleichungen angeschrieben werden können, solange die Stützkräfte unbekannt sind. Deshalb werden diese als statisch unbestimmte Größen eines Hauptsystems, des frei aufliegenden Plattenstreifens, berechnet.

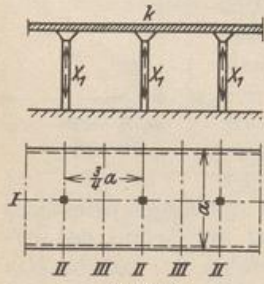


Abb. 690.

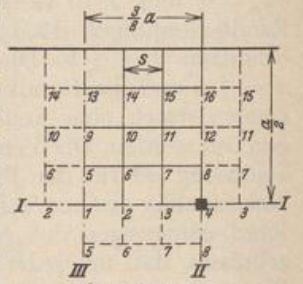


Abb. 691.

Bezeichnet w_1 die senkrechte Verschiebung eines Punktes des Streifens infolge $-X_1 = 1$, w_0 diejenige infolge der Belastung, so ist

$$w = w_0 - X_1 w_1, \tag{1033}$$

an der Stütze k : $w_k = 0 = w_{k0} - X_1 w_{k1}$,

$$X_1 = w_{k0} / w_{k1}. \tag{1034}$$

Belastung. Die Schnittkräfte werden für gleichmäßig verteilte Last, Schachbrettlast und Streifenlast angegeben. Bei gleichmäßig verteilter Last ist der Spannungs- und Form-

änderungszustand durch die Symmetrieachsen *I, II, III* Abb. 690 ausgezeichnet, so daß es genügt, einen von diesen Achsen begrenzten Abschnitt zu untersuchen (Abb. 691). Durch Belastungsumordnung ergeben sich daraus auch die Schnittkräfte für Schachbrettlast und Streifenlast.

I. Berechnung für gleichmäßig verteilte Last $p \text{ t/m}^2$.

A. Belastung des Hauptsystems durch $-X_1 = 1$ in allen Angriffspunkten der Zwischenstützen.

1. Gitterteilung, $s = a/8$.
2. Randwerte. M und w sind zu den Achsen *I, II, III* symmetrisch; am Rande Null.
3. Differenzgleichungen (1001), (1002) für 16 Gitterpunkte (Abb. 691).

Die Belastungszahlen $p_k s^2$ der ersten Stufe sind bis auf diejenige für den Angriffspunkt (4) der Zwischenstütze Null, dagegen ist $p_4 s^2 = 1$. Die Belastungszahlen der zweiten Stufe sind

$$\frac{M_k s^2}{N} = \frac{M_k a^2}{64 N}$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	a^2/N
4	-2				-2												o $M_1/64$
-1	4	-1				-2											o $M_2/64$
	-1	4	-1				-2										o $M_3/64$
		-2	4					-2									1 $M_4/64$
-1				4	-2				-1								o $M_5/64$
	-1			-1	4	-1				-1							o $M_6/64$
		-1			-1	4	-1				-1						o $M_7/64$
			-1			-2	4					-1					o $M_8/64$
				-1				4	-2				-1				o $M_9/64$
					-1			-1	4	-1				-1			o $M_{10}/64$
						-1			-1	4	-1				-1		o $M_{11}/64$
							-1				-2	4				-1	o $M_{12}/64$
								-1					4	-2			o $M_{13}/64$
									-1				-1	4	-1		o $M_{14}/64$
										-1				-1	4	-1	o $M_{15}/64$
															-1	4	o $M_{16}/64$

4. Auflösung. Um den Ansatz für die Anwendung des Gaußschen Algorithmus zu vereinfachen, wird das System partieller Differenzgleichungen zweiter Ordnung in simultane Gruppen totaler Differenzgleichungen verwandelt. Das Verfahren ist von H. Marcus allgemein gezeigt worden. Die partielle Differenzgleichung jeder der beiden Stufen enthält neben drei Wurzeln M oder w mit den Fußziffern $(k-1), k, (k+1)$ einer Zeile k noch zwei Vorzahlen mit den Fußziffern i, l der benachbarten Zeilen. Daher besteht der Sinn der Transformation darin, die Wurzeln einer Zeile k derart durch ebenso viele unabhängige neue Unbekannte zu ersetzen, daß in den transformierten Gleichungen nur die Fußziffern dreier aufeinanderfolgender Zeilen erscheinen. Auf diese Weise entstehen hier vier voneinander unabhängige Gruppen von totalen Differenzgleichungen, von denen jede soviel dreigliedrige Gleichungen und Unbekannte enthält, als Gitterpunkte auf einer Zeile liegen.

Das Gitter Abb. 691 zur Berechnung der Pilzdecke besteht aus vier Zeilen und vier Normalen, die sich in 16 Gitterpunkten schneiden. Daher lassen sich in der Matrix unter 3 vier Gruppen von

je 4 Differenzgleichungen unterscheiden. Von diesen wird eine mittlere mit den Gitterpunkten $5 \equiv k$ bis $8 \equiv k+3$ herausgegriffen, um an einem Beispiel die Transformation zu zeigen. Die dieser Gruppe zugeordneten Gitterzeilen werden mit $i \equiv 1$, $k \equiv 5$, $l \equiv 9$ unterschieden.

M_i	M_{i+1}	M_{i+2}	M_{i+3}	M_k	M_{k+1}	M_{k+2}	M_{k+3}	M_l	M_{l+1}	M_{l+2}	M_{l+3}	
-1				4	-2			-1				g_k
	-1			-1	4	-1			-1			g_{k+1}
		1-			-1	4	-1			-1		g_{k+2}
			-1			-2	4				-1	g_{k+3}

Die Gleichungen werden mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ multipliziert und darauf addiert. Das Ergebnis lautet:

$$\begin{aligned} & -\alpha_1 M_i - \alpha_2 M_{i+1} - \alpha_3 M_{i+2} - \alpha_4 M_{i+3} + (4\alpha_1 - \alpha_2) M_k + (-2\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_3) M_{k+1} \\ & + (-\alpha_2 + 4\alpha_3 - 2\alpha_4) M_{k+2} + (-\alpha_3 + 4\alpha_4) M_{k+3} - \alpha_1 M_l - \alpha_2 M_{l+1} - \alpha_3 M_{l+2} - \alpha_4 M_{l+3} \\ & = \alpha_1 g_k + \alpha_2 g_{k+1} + \alpha_3 g_{k+2} + \alpha_4 g_{k+3}; \end{aligned} \quad (1035)$$

es wiederholt sich nach Eintauschung der zugeordneten Fußziffern bei jeder der vier Gruppen. Um unabhängige Wurzeln totaler Differenzgleichungen zu erhalten, werden die Vorzahlen derart bestimmt, daß

$$\frac{4\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1} = \frac{-2\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_3}{\alpha_2} = \frac{-\alpha_2 + 4\alpha_3 - 2\alpha_4}{\alpha_3} = \frac{-\alpha_3 + 4\alpha_4}{\alpha_4} = c \quad (1036)$$

ist. Damit geht Gl. (1035) über in

$$\begin{aligned} & -(\alpha_1 M_i + \alpha_2 M_{i+1} + \alpha_3 M_{i+2} + \alpha_4 M_{i+3}) + c(\alpha_1 M_k + \alpha_2 M_{k+1} + \alpha_3 M_{k+2} + \alpha_4 M_{k+3}) \\ & -(\alpha_1 M_l + \alpha_2 M_{l+1} + \alpha_3 M_{l+2} + \alpha_4 M_{l+3}) = \alpha_1 g_k + \alpha_2 g_{k+1} + \alpha_3 g_{k+2} + \alpha_4 g_{k+3}, \end{aligned} \quad (1037)$$

und mit der Substitution

$$\alpha_1 M_i + \alpha_2 M_{i+1} + \alpha_3 M_{i+2} + \alpha_4 M_{i+3} = T_i \quad (1038)$$

wird daraus

$$-T_i + c T_k - T_l = \alpha_1 g_k + \alpha_2 g_{k+1} + \alpha_3 g_{k+2} + \alpha_4 g_{k+3}. \quad (1039)$$

Die Gl. (1036) läßt sich folgendermaßen umformen

$$-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = -2\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - \frac{\alpha_3}{\alpha_2} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_3} - 2\frac{\alpha_4}{\alpha_3} = -\frac{\alpha_3}{\alpha_4} = c - 4 = \mu.$$

Daraus entsteht das Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 \mu + \alpha_2 &= 0, \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 \mu + \alpha_3 &= 0, \\ \alpha_2 + \alpha_3 \mu + 2\alpha_4 &= 0, \\ \alpha_3 + \alpha_4 \mu &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1040)$$

Mit $\alpha_1 = 1$ liefern die ersten drei Gleichungen

$$\alpha_2 = -\mu, \quad \alpha_3 = \mu^2 - 2, \quad \alpha_4 = \frac{\mu}{2}(3 - \mu^2) \quad (1041)$$

und aus der letzten folgt die algebraische Gleichung 4ten Grades für μ :

$$\mu^4 - 5\mu^2 + 4 = 0 \quad (1042)$$

mit den vier Wurzeln $\mu_{1,2} = \pm 1$, $\mu_{3,4} = \pm 2$, so daß mit (1040) vier Systeme von α Vorzahlen bestimmt sind.

μ	+1	-1	+2	-2
α_1	1	1	1	1
α_2	-1	1	-2	2
α_3	-1	-1	2	2
α_4	1	-1	-1	1

(1043)

Sie werden nach (1038) zu der folgenden Substitution verwendet.

$$\left. \begin{aligned} \mu = 1: & \quad M_k - M_{k+1} - M_{k+2} + M_{k+3} = T_k, & c = 5, \\ \mu = -1: & \quad M_k + M_{k+1} - M_{k+2} - M_{k+3} = U_k, & c = 3, \\ \mu = 2: & \quad M_k - 2M_{k+1} + 2M_{k+2} - M_{k+3} = V_k, & c = 6, \\ \mu = -2: & \quad M_k + 2M_{k+1} + 2M_{k+2} + M_{k+3} = W_k, & c = 2. \end{aligned} \right\} \quad (1044)$$

Die Gl. (1035) geht damit in vier neue, voneinander unabhängige Gleichungen über.

$$\left. \begin{aligned} -T_i + 5T_k - T_i &= g_k - g_{k+1} - g_{k+2} + g_{k+3} = \lambda_T, \\ -U_i + 3U_k - U_i &= g_k + g_{k+1} - g_{k+2} - g_{k+3} = \lambda_U, \\ -V_i + 6V_k - V_i &= g_k - 2g_{k+1} + 2g_{k+2} - g_{k+3} = \lambda_V, \\ -W_i + 2W_k - W_i &= g_k + 2g_{k+1} + 2g_{k+2} + g_{k+3} = \lambda_W. \end{aligned} \right\} \quad (1045)$$

Sind die neuen Unbekannten T, U, V, W dieser Gleichungen berechnet, so folgt aus (1044)

$$\left. \begin{aligned} M_k &= \frac{1}{6} (2T_k + 2U_k + V_k + W_k), \\ M_{k+1} &= \frac{1}{6} (-T_k + U_k - V_k + W_k), \\ M_{k+2} &= \frac{1}{6} (-T_k - U_k + V_k + W_k), \\ M_{k+3} &= \frac{1}{6} (2T_k - 2U_k - V_k + W_k). \end{aligned} \right\} \quad (1046)$$

Die Anwendung der Substitution (1044) auf die Matrix S. 703 liefert die vier folgenden, voneinander unabhängigen Gleichungssysteme.

Zur bequemeren Superposition werden gleich die Werte $T/6, U/6, V/6, W/6$ ausgerechnet und jeweils die erste der Gleichungen durch 2 dividiert, um symmetrische Matrizen zu erhalten.

$T_1/6$	$T_5/6$	$T_9/6$	$T_{13}/6$	a^2/N	$U_1/6$	$U_5/6$	$U_9/6$	$U_{13}/6$	a^2/N
2,5	-1			1/12 $\lambda_{T,1}/12$	1,5	-1			-1/12 $\lambda_{U,1}/12$
-1	5	-1		o $\lambda_{T,2}/6$	-1	3	-1		o $\lambda_{U,2}/6$
	-1	5	-1	o $\lambda_{T,3}/6$		-1	3	-1	o $\lambda_{U,3}/6$
		-1	5	o $\lambda_{T,4}/6$			-1	3	o $\lambda_{U,4}/6$

$V_1/6$	$V_5/6$	$V_9/6$	$V_{13}/6$	a^2/N	$W_1/6$	$W_5/6$	$W_9/6$	$W_{13}/6$	a^2/N
3	-1			-1/12 $\lambda_{V,1}/12$	1	-1			1/12 $\lambda_{W,1}/12$
-1	6	-1		o $\lambda_{V,2}/6$	-1	2	-1		o $\lambda_{W,2}/6$
	-1	6	-1	o $\lambda_{V,3}/6$		-1	2	-1	o $\lambda_{W,3}/6$
		-1	6	o $\lambda_{V,4}/6$			-1	2	o $\lambda_{W,4}/6$

Die λ -Zahlen beziehen sich auf die zweite Stufe des Ansatzes.

Die Auflösung dieser Gleichungen für die erste Stufe liefert

$T_1/6$	0,036369	$U_1/6$	-0,074468	$V_1/6$	-0,029463	$W_1/6$	0,333332
$T_5/6$	0,007390	$U_5/6$	-0,028369	$V_5/6$	-0,005055	$W_5/6$	0,249999
$T_9/6$	0,001581	$U_9/6$	-0,010638	$V_9/6$	-0,008666	$W_9/6$	0,166666
$T_{13}/6$	0,000316	$U_{10}/6$	-0,003546	$V_{13}/6$	-0,000144	$W_{13}/6$	0,083333

Die Superposition nach (1046) ergibt die Momentensummen

M_1	0,227672	M_5	0,203388	M_9	0,147686	M_{13}	0,076729
M_2	0,251957	M_6	0,219096	M_{10}	0,155314	M_{14}	0,079615
M_3	0,341968	M_7	0,265724	M_{11}	0,174857	M_{15}	0,086419
M_4	0,584470	M_8	0,326973	M_{12}	0,191972	M_{16}	0,091202

die, durch 64 dividiert, nach S. 703 die Absolutglieder der zweiten Stufe sind. Aus diesen werden nach (1045) die Absolutglieder der transformierten Gleichungen gebildet.

$\lambda_{T,1}/12$	0,000284136	$\lambda_{U,1}/12$	-0,000581782	$\lambda_{V,1}/12$	-0,000230178	$\lambda_{W,1}/12$	0,002604156
$\lambda_{T,2}/6$	0,000118596	$\lambda_{U,2}/6$	-0,000443262	$\lambda_{V,2}/6$	-0,000078982	$\lambda_{W,2}/6$	0,003906250
$\lambda_{T,3}/6$	0,000024708	$\lambda_{U,3}/6$	-0,000166223	$\lambda_{V,3}/6$	-0,000013540	$\lambda_{W,3}/6$	0,002604167
$\lambda_{T,4}/6$	0,000004942	$\lambda_{U,4}/6$	-0,000055408	$\lambda_{V,4}/6$	-0,000002257	$\lambda_{W,4}/6$	0,001302083

Die Auflösung für die zweite Stufe liefert

$T_1/6$	0,000135	$U_1/6$	-0,000694	$V_1/6$	-0,000086	$W_1/6$	0,028645
$T_5/6$	0,000054	$U_5/6$	-0,000460	$V_5/6$	-0,000029	$W_5/6$	0,026042
$T_9/6$	0,000017	$U_9/6$	-0,000242	$V_9/6$	-0,000007	$W_9/6$	0,019531
$T_{13}/6$	0,000004	$U_{13}/6$	-0,000099	$V_{13}/6$	-0,000002	$W_{13}/6$	0,010417

Die Superposition nach (1046) ergibt die Durchbiegung w_1 .

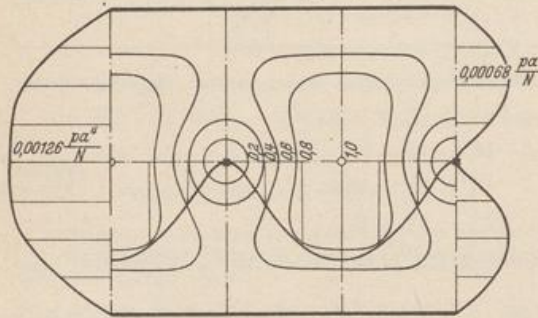


Abb. 692. Durchbiegung.

$w_{1,1}$	0,027441	$w_{5,1}$	0,025202
$w_{2,1}$	0,027903	$w_{6,1}$	0,025557
$w_{3,1}$	0,029119	$w_{7,1}$	0,026419
$w_{4,1}$	0,030392	$w_{8,1}$	0,027098

$w_{9,1}$	0,019074	$w_{13,1}$	0,010226
$w_{10,1}$	0,019280	$w_{14,1}$	0,010315
$w_{11,1}$	0,019749	$w_{15,1}$	0,010510
$w_{12,1}$	0,020055	$w_{16,1}$	0,010625

B. Gleichmäßig verteilte Belastung des Hauptsystems mit $p \text{ t/m}^2$.

Die Lösung (981) für den gleichmäßig belasteten Halbstreifen liefert

$$w_{1,0} = 0,013021 p a^4/N, \quad w_{5,0} = 0,012055 p a^4/N,$$

$$w_{9,0} = 0,009277 p a^4/N, \quad w_{13,0} = 0,005056 p a^4/N.$$

Die Durchbiegungen der Punkte einer waagerechten Zeile des Gitters sind gleich.

C. Der Stützendruck der gleichmäßig belasteten Pilzdecke.

Nach (1034) ist

$$X_1 = P = \frac{w_{4,0}}{w_{4,1}} = \frac{0,013021 p a^4 N}{0,030392 N a^2} = 0,428436 p a^2.$$

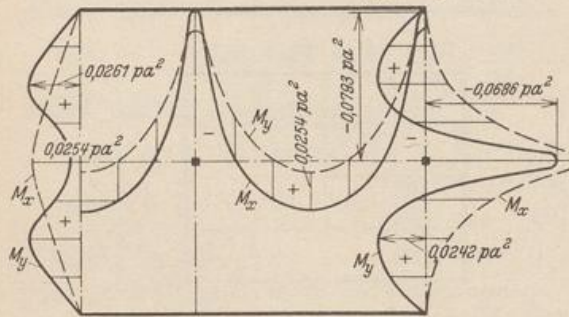


Abb. 693. Biegemomente.

D. Die Formänderung der Pilzdecke.

Die Superposition nach (1033) ergibt

w_1	0,0012639	w_5	0,0012572
w_2	0,0010664	w_6	0,0011051
w_3	0,0005453	w_7	0,0007358
w_4	0	w_8	0,0004447

w_9	0,0011054	w_{13}	0,0006748
w_{10}	0,0010170	w_{14}	0,0006365
w_{11}	0,0008162	w_{15}	0,0005530
w_{12}	0,0006850	w_{16}	0,0005037

Die Durchbiegung ist in Abb. 692 dargestellt.

E. Die Schnittkräfte.

Die Schnittkräfte ergeben sich aus der Durchbiegung nach (1003)ff. Die Biegemomente M_x und M_y sind in Abb. 693 für die drei Symmetrieachsen eingetragen.

II. Berechnung für Schachbrettlast (Abb. 694).

Die Belastung wird umgeordnet in eine gleichmäßig verteilte Last $+ p/2$ und eine abwechselnde Belastung $\pm p/2$. Formänderung und Schnittkräfte der Pilzdecke für die verteilte Last sind aus I bekannt. Die abwechselnde Belastung bewirkt, daß sich jedes gleichartig belastete Feld wie eine ringsum frei aufliegende Platte verhält, die nach Abschn. 70 oder 71 berechnet wird. Formänderungen und Schnittkräfte sind in Abb. 695 dargestellt.

III. Berechnung für die halbseitige Streifenlast (Abb. 696).

Die Belastung wird umgeordnet in eine gleichmäßig verteilte Last $+ p/2$ und zwei abwechselnde Streifenlasten $\pm p/2$ nach Abb. 696. Diese bewirkt, daß sich jeder gleichartig belastete Streifen wie ein beiderseits frei aufliegender Plattenstreifen verhält, der nach (981) berechnet wird. Formänderungen und Schnittkräfte sind in Abb. 697 dargestellt.

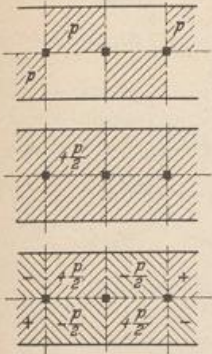
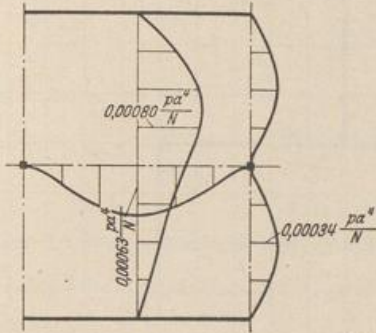


Abb. 694.



a) Durchbiegung.

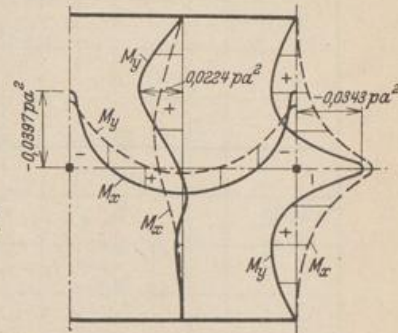


Abb. 695.

b) Biegemomente.

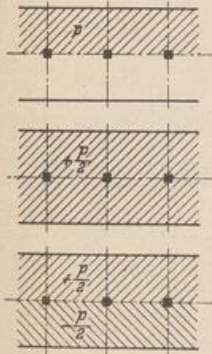
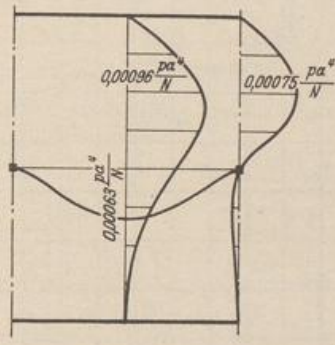


Abb. 696.



Durchbiegung.

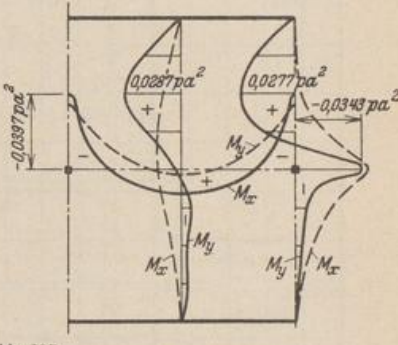


Abb. 697.

Biegemomente.

Die Berechnung einer nach einer Seite unendlich langen Pilzdecke mit einer Stützenreihe und frei aufliegenden Rändern.

Die Berechnung wird auf das Endstück mit der Länge $b = \frac{3}{4} a$ beschränkt (Abb. 698). Da die Randwerte M und w auf der Geraden II unbekannt sind, werden hier in erster Annäherung die Formänderungen und Schnittkräfte der nach zwei Seiten unendlich langen Pilzdecken zugrunde gelegt. Der Fehler ist um so kleiner, je größer b gewählt wird. Die Rechnung wird in zwei Stufen durchgeführt und der Stützdruck als überzählige Größe berechnet. Das Hauptsystem ist ein Plattenhalbstreifen. Die Belastung sei gleichmäßig verteilt.

A. Belastung des Hauptsystems mit $-X_1 = 1$.

1. Gitterteilung (Abb. 699). $s = a/8$.

2. Randwerte. M und w sind an den aufliegenden Rändern Null, zur Achse I symmetrisch und auf der Geraden II vorgeschrieben.

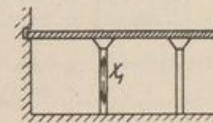


Abb. 698.

45*

$M_{21,1}$	0,091202	$w_{21,1}$	0,010625 a^2/N
$M_{22,1}$	0,191972	$w_{22,1}$	0,020055 "
$M_{23,1}$	0,326973	$w_{23,1}$	0,027098 "
$M_{24,1}$	0,584470	$w_{24,1}$	0,030392 "

3. Differenzgleichungen (1001), (1002) für die 20 Gitterpunkte (Abb. 699).

M_1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	a^2/N	
4	-1																			○	$M_1/64$
-1	4	-1																		○	$M_2/64$
																				○	$M_3/64$
																				○	$M_4/64$
																				$M_{24,1}$	$M_5/64 + w_{24,1}$
-1																				○	$M_6/64$
																				○	$M_7/64$
																				○	$M_8/64$
																				○	$M_9/64$
																				$M_{23,1}$	$M_{10}/64 + w_{23,1}$
																				○	$M_{11}/64$
																				○	$M_{12}/64$
																				○	$M_{13}/64$
																				○	$M_{14}/64$
																				$M_{22,1}$	$M_{15}/64 + w_{22,1}$
																				○	$M_{16}/64$
																				○	$M_{17}/64$
																				○	$M_{18}/64$
																				○	$M_{19}/64$
																				$M_{21,1}$	$M_{20}/64 + w_{21,1}$

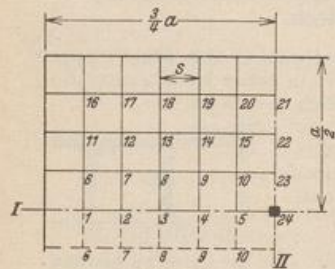


Abb. 699.

4. Auflösung. Die Auflösung wird wieder nach S. 704ff. durchgeführt. Mit $c-4=\mu$ lauten die Gleichungen für die α Vorzahlen.

$$\begin{aligned} \alpha_1 \mu + \alpha_2 &= 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 \mu + \alpha_3 &= 0, \\ \alpha_2 + \alpha_3 \mu + \alpha_4 &= 0, \\ \alpha_3 + \alpha_4 \mu + \alpha_5 &= 0, \\ \alpha_4 + \alpha_5 \mu &= 0. \end{aligned}$$

Ihre Lösung ist

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1, \quad \alpha_2 = -\mu, \quad \alpha_3 = -(1 - \mu^2), \quad \alpha_4 = \mu(2 - \mu^2), \quad \alpha_5 = 1 - 3\mu^2 + \mu^4, \\ \mu^5 - 4\mu^3 + 3\mu &= 0, \\ \mu_{1,2} &= \pm 1, \quad \mu_3 = 0, \quad \mu_{4,5} = \pm \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Die 5 Systeme α -Vorzeichen sind daher

μ	1	-1	0	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
α_1	1	1	1	1	1
α_2	-1	1	0	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
α_3	0	0	-1	2	2
α_4	1	-1	0	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
α_5	-1	-1	1	1	1

Sie führen zu der Substitution

$$\left. \begin{aligned}
 \mu = 1: & \quad M_k - M_{k+1} & + M_{k+3} & - M_{k+4} = S_k, & c = 5, \\
 \mu = -1: & \quad M_k + M_{k+1} & - M_{k+3} & - M_{k+4} = T_k, & c = 3, \\
 \mu = 0: & \quad M_k & - M_{k+2} & + M_{k+4} = U_k, & c = 4, \\
 \mu = \sqrt{3}: & \quad M_k - \sqrt{3} M_{k+1} + 2 M_{k+2} - \sqrt{3} M_{k+3} + M_{k+4} = V_k, & c = 4 + \sqrt{3}, \\
 \mu = -\sqrt{3}: & \quad M_k + \sqrt{3} M_{k+1} + 2 M_{k+2} + \sqrt{3} M_{k+3} + M_{k+4} = W_k, & c = 4 - \sqrt{3}.
 \end{aligned} \right\} (1047)$$

aus der sich rückwärts ergibt

$$\left. \begin{aligned}
 M_k &= \frac{1}{12} (3 S_k + 3 T_k + 4 U_k + V_k + W_k), \\
 M_{k+1} &= \frac{1}{12} (-3 S_k + 3 T_k - \sqrt{3} V_k + \sqrt{3} W_k), \\
 M_{k+2} &= \frac{1}{12} (-4 U_k + 2 V_k + 2 W_k), \\
 M_{k+3} &= \frac{1}{12} (3 S_k - 3 T_k - \sqrt{3} V_k + \sqrt{3} W_k), \\
 M_{k+4} &= \frac{1}{12} (-3 S_k - 3 T_k + 4 U_k + V_k + W_k).
 \end{aligned} \right\} (1048)$$

Die Substitution (1047) führt zu den fünf unabhängigen Gleichungsgruppen:

$S_{1/12}$	$S_{6/12}$	$S_{11/12}$	$S_{16/12}$	$T_{1/12}$	$T_{6/12}$	$T_{11/12}$	$T_{16/12}$
2,5	-1			1,5	-1		
-1	5	-1		-1	3	-1	
	-1	5	-1		-1	3	-1
		-1	5			-1	3

$U_{1/12}$	$U_{6/12}$	$U_{11/12}$	$U_{16/12}$	$V_{1/12}$	$V_{6/12}$	$V_{11/12}$	$V_{16/12}$
2	-1			$2 + \sqrt{3}/2$	-1		
-1	4	-1		-1	$4 + \sqrt{3}$	-1	
	-1	4	-1		-1	$4 + \sqrt{3}$	-1
		-1	4			-1	$4 + \sqrt{3}$

$W_{1/12}$	$W_{6/12}$	$W_{11/12}$	$W_{16/12}$
$2 - \sqrt{3}/2$	-1		
-1	$4 - \sqrt{3}$	-1	
	-1	$4 - \sqrt{3}$	-1
		-1	$4 - \sqrt{3}$

Das Ergebnis der Auflösung lautet:

$w_{1,1}$	0,0043143	$w_{6,1}$	0,0039742	$w_{11,1}$	0,0030156	$w_{16,1}$	0,0015832
$w_{2,1}$	0,0088332	$w_{7,1}$	0,0081319	$w_{12,1}$	0,0061787	$w_{17,1}$	0,0033220
$w_{3,1}$	0,0137215	$w_{8,1}$	0,0126033	$w_{13,1}$	0,0095488	$w_{18,1}$	0,0051605
$w_{4,1}$	0,0190674	$w_{9,1}$	0,0174222	$w_{14,1}$	0,0130990	$w_{19,1}$	0,0069916
$w_{5,1}$	0,0247991	$w_{10,1}$	0,0224350	$w_{15,1}$	0,0167029	$w_{20,1}$	0,0088288

B. Belastung des Hauptsystems mit gleichmäßig verteilter Last p t/m. Die Durchbiegung des Halbstreifens wird nach (995) berechnet.

$w_{1,0}$	0,00249	$w_{6,0}$	0,00231	$w_{11,0}$	0,00180	$w_{16,0}$	0,00099
$w_{2,0}$	0,00473	$w_{7,0}$	0,00439	$w_{12,0}$	0,00340	$w_{17,0}$	0,00187
$w_{3,0}$	0,00663	$w_{8,0}$	0,00615	$w_{13,0}$	0,00475	$w_{18,0}$	0,00260
$w_{4,0}$	0,00817	$w_{9,0}$	0,00757	$w_{14,0}$	0,00585	$w_{19,0}$	0,00320
$w_{5,0}$	0,00938	$w_{10,0}$	0,00869	$w_{15,0}$	0,00671	$w_{20,0}$	0,00366

$w_{24,0} = 0,01032$.

C. Der Stützendruck.

$$X_1 = \frac{w_{24,0}}{w_{24,1}} = \frac{0,01032}{0,30392} = 0,339563 p a^2.$$

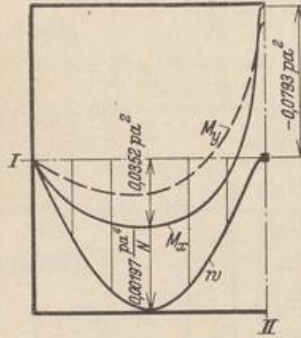


Abb. 700.

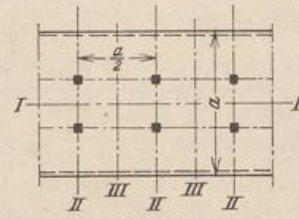


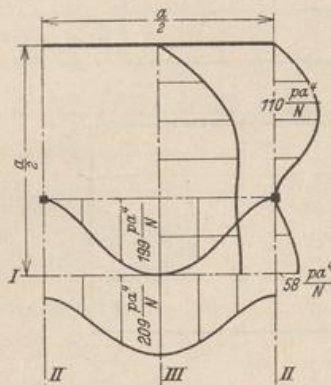
Abb. 701.

D. Formänderung und Schnittkräfte. — Die Durchbiegung beträgt nach (1033)

$$w_k = w_{k,0} - X_1 w_{k,1}.$$

w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	
0,001025	0,001731	0,001971	0,001695	0,000959	$p a^4/N$

Schnittkräfte nach (1003) ff. Abb. 700 zeigt Durchbiegung und Schnittkräfte in der Symmetrieachse I.



a) Durchbiegung $10^6 w$.

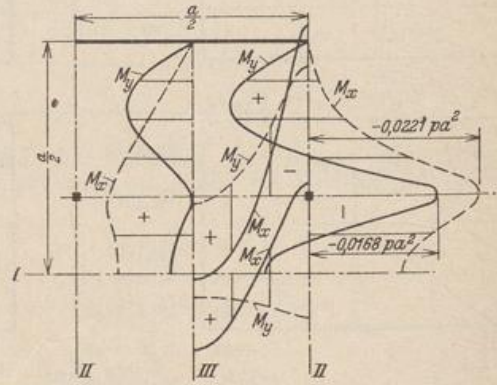


Abb. 702.

b) Biegemomente.

Die nach zwei Seiten unendlich lange Pilzdecke mit zwei Stützenreihen und frei aufliegenden Rändern (Abb. 701) ist für die Teilung 3:2 bereits von H. Marcus berechnet worden¹. Das Ergebnis ist zum Vergleich mit den Verschiebungen und mit den Schnittkräften auf S. 706 in der Abb. 702 eingetragen.

¹ Marcus, H.: Die Theorie elastischer Gewebe 2. Aufl. S. 274. Berlin 1932.

H. Marcus hat in seiner bereits mehrfach erwähnten Arbeit auch das quadratische Mittelfeld einer nach allen Seiten unendlich ausgedehnten Pilzdecke untersucht. Die Ergebnisse sind in der Abb. 703 enthalten, um sie mit den Schnittkräften zu vergleichen, die im Bereiche der Stützen nach den Bemerkungen auf S. 701 weiter unten als Näherung berechnet worden sind.

Biegemomente im Bereich der Stütze für die nach allen Seiten unendlich ausgedehnte Pilzdecke mit quadratischen Feldern.

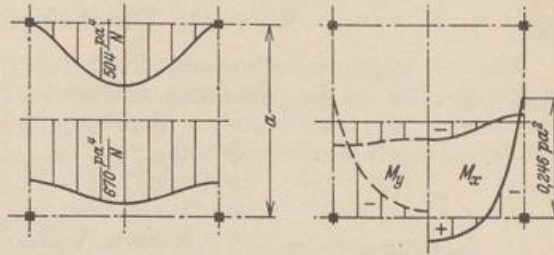


Abb. 703. a) Durchbiegung $10^5 w$. b) Biegemomente.

1. Lösung nach A. Nadai (S. 701).
 Stützenabstand $2l$. Radius der stellvertretenden Kreisplatte $a = 0,44 l$.
 $P = 4 p l^2$, $Q = (P - p a^2 \pi) / 2 a \pi$. Die Lösung wird durch Superposition der Schnittkräfte der frei aufliegenden Kreisplatte bei gleichmäßig verteilter Last p und bei einer Einzellast P gefunden. Nach Tabelle 63 ist mit $\mu = 1/6$ (Abb. 704 u. 706a)

$$M_r = \frac{p a^2}{16} (3 + \mu) \Phi_1 + \frac{P}{4\pi} (1 + \mu) \Phi_3 = (0,0382 \Phi_1 + 0,3761 \Phi_3) p l^2,$$

$$M_t = \frac{p a^2}{16} [2(1 - \mu) + (1 + 3\mu) \Phi_1] - \frac{P}{4\pi} [(1 - \mu) - (1 + \mu) \Phi_3]$$

$$= (-0,2452 + 0,0182 \Phi_1 + 0,3716 \Phi_3) p l^2.$$

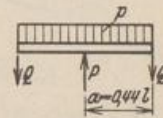


Abb. 704.

2. Lösung nach V. Lewe (S. 702).
 Stützenabstand $2l$. Radius der stellvertretenden Kreisplatte $a = R = 1,1286 l$, $R_1 = 0$. $P = 4 p l^2$, M aus $dw/dr = 0$ am Rand. Die Lösung ergibt sich durch Superposition der Schnittkräfte der eingespannten Kreisplatte bei gleichmäßig verteilter Last p und bei einer Einzellast P . Nach Tabelle 63 ist (Abb. 705 u. 706b)

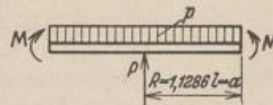


Abb. 705.

$$M_r = \frac{p a^2}{16} [(3 + \mu) \Phi_1 - 2] + \frac{P}{4\pi} [1 + (1 + \mu) \Phi_3] = (0,1593 + 0,2521 \Phi_1 + 0,3716 \Phi_3) p l^2,$$

$$M_t = \frac{p a^2}{16} [(1 + 3\mu) \Phi_1 - 2\mu] + \frac{P}{4\pi} [\mu + (1 + \mu) \Phi_3] = (0,0266 + 0,1194 \Phi_1 + 0,3716 \Phi_3) p l^2.$$

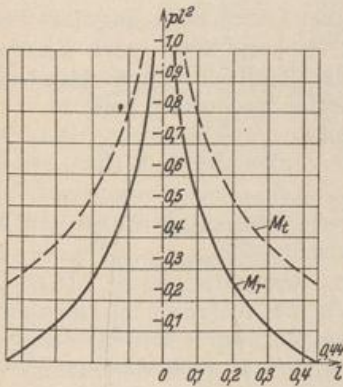


Abb. 706a.

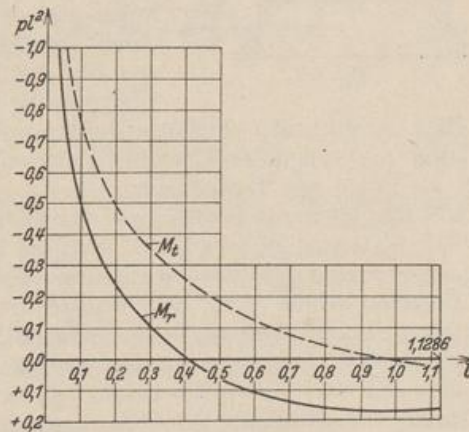


Abb. 706b.

Nadai, A.: Die elastischen Platten 1925. — Frey, K.: Die gleichförmig belastete, in gleichen Abständen unterstützte Gerade der allseitig unendlichen Platte und deren Anwendung in der strengen Theorie der trägerlosen Decken. Bauing. 1926 S. 21. — Marcus, H.: Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten. Berlin 1928. — Lewe, V.: Pilzdecken und andere trägerlose Eisenbetondecken. Berlin 1929.