



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

67. Annahmen und Grundlagen für die Berechnung

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

A. Die Platten.

67. Annahmen und Grundlagen für die Berechnung.

Die Platten sind ebene Baukörper, die durch zwei zu einer Mittelebene parallele Ebenen und eine dazu senkrechte Zylinderfläche von beliebiger Leitkurve begrenzt sind. Die Belastung wirkt stets im Sinne der Flächennormalen z . Der Plattenrand ist frei drehbar gelagert, eingespannt oder auch in einzelnen Punkten gestützt. Die untere Laibungsebene ist kräftefrei oder durch Träger und Pfosten in einzelnen geraden Linien, Punkten oder Flächen gestützt. Auf diese Weise entstehen die durchlaufenden Platten, die Rippen- und Pilzdecken. Die Untersuchung kann für die Bedürfnisse des Bauwesens auf Platten beschränkt werden, deren Baustoff durch die Art der Herstellung und konstruktiven Ausbildung als homogen, isotrop und innerhalb der Gebrauchsbelastung als vollkommen elastisch gilt und deren Dicke gegenüber den anderen Abmessungen zurücktritt. Die Änderung der Plattendicke ist von höherer Ordnung klein im Vergleich zu der senkrechten Verschiebung $w(x, y, z)$ eines beliebigen Punktes, so daß

$$w(x, y, z) = w(x, y) + \int_0^z \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial z} dz \rightarrow w(x, y) = w \quad (914)$$

und damit der senkrechte Formänderungszustand der Platte durch die senkrechten Verschiebungen w der Mittelfläche beschrieben ist. Da sich die Platte unter der Belastung p im Vergleich zur Dicke h nur um kleine Wege ausbiegen soll, sind die waagerechten Verschiebungen der Punkte der Mittelfläche Null und die waagerechten Verschiebungen der Punkte im Abstand z von der Mittelebene, abgesehen von kleinen Beträgen höherer Ordnung, lineare Funktionen von z , so daß die Punkte einer Flächennormalen auch nach der Formänderung auf einer Normalen zur elastisch verbogenen Mittelfläche liegen. Daher ist bei Verwendung von kartesischen Koordinaten x, y nach Abb. 621

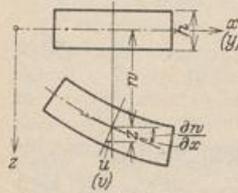


Abb. 621.

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (915)$$

Die Spannung σ_z ist an der unteren kräftefreien Plattenlaibung Null, an der oberen gleich der Belastungsintensität p , also abgesehen von Punktlasten, deren Untersuchung hier ausgeschlossen sein soll, stets sehr klein im Vergleich zu σ_x, σ_y . Sie kann daher in den allgemeinen Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen mit $\sigma_z = 0$ vernachlässigt werden. Diese Annahmen begründen die folgenden Beziehungen der Plattenstatik.

1. Verträglichkeitsbedingungen nach (26)

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (916)$$

2. Elastizitätsgesetz nach (27) für

$$\left. \begin{aligned} (1 + \mu) \frac{\sigma_z}{E} = 0 = \varepsilon_z + \frac{\mu}{1 - 2\mu} e, \quad \varepsilon_z = -\frac{\mu}{1 - \mu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y), \quad \frac{\mu}{1 - 2\mu} e = \frac{\mu}{1 - \mu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y); \\ \sigma_x = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1 - \mu^2} (\mu \varepsilon_x + \varepsilon_y), \quad \tau_{xy} = G \gamma_{xy} = -\frac{E}{1 - \mu^2} z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (1 - \mu). \end{aligned} \right\} \quad (917)$$

und in Verbindung mit den Verträglichkeitsbedingungen (916)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x = -\frac{Ez}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad \sigma_y = -\frac{Ez}{1 - \mu^2} \left(\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ \tau_{xy} = -\frac{Ez}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (1 - \mu) \end{aligned} \right\} \quad (918)$$

Diese mit z linear veränderlichen Spannungen in der Flächennormalen lassen sich zu Schnittkräften in Querschnitten von der Breite 1 zusammenfassen. Sie betragen

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x dF = 0, & N_y &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y dF = 0, & Q_{xy} &= \int_{-h/2}^{-h/2} \tau_{xy} dF = 0, \\ M_x &= \int \sigma_x z dF, & M_y &= \int \sigma_y z dF, & M_{xy} &= \int \tau_{xy} z dF, \\ M_x &= -\frac{E h^3}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), & M_y &= -\frac{E h^3}{12(1-\mu^2)} \left(\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_{xy} &= -\frac{E h^3}{12(1-\mu^2)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (1-\mu). \end{aligned} \right\} \quad (919)$$

M_x, M_y sind Biegemomente, M_{xy}, M_{yx} Drillungsmomente. $\frac{E h^3}{12(1-\mu^2)} = N$ ist eine für Plattenquerschnitt und Plattenwerkstoff charakteristische Größe und heißt Plattenkonstante.

3. Transformation der Schnittkräfte eines differentialen Prismas $dx \cdot dy$ auf einen Schrägschnitt ds im Winkel $\hat{x}\hat{n} = \psi$ mit $ds = dx/\sin \psi = dy/\cos \psi$ (Abb. 622). Die Gleichgewichtsbedingungen liefern

$$\left. \begin{aligned} Q_n ds &= Q_{yx} dy + Q_{xz} dx, \\ M_n ds - (M_x dy + M_{yx} dx) \cos \psi - (M_y dx + M_{xy} dy) \sin \psi &= 0, \\ M_s ds - (M_x dy + M_{yx} dx) \sin \psi + (M_y dx + M_{xy} dy) \cos \psi &= 0; \\ M_n &= M_x \cos^2 \psi + M_y \sin^2 \psi + M_{xy} \sin 2\psi, \\ M_s &= M_x \sin^2 \psi + M_y \cos^2 \psi - M_{xy} \sin 2\psi, \\ M_{ns} &= -(M_y - M_x) \frac{\sin 2\psi}{2} - M_{xy} \cos 2\psi. \end{aligned} \right\} \quad (920)$$

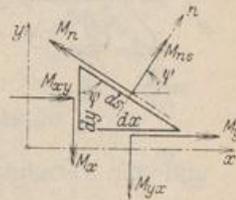


Abb. 622.

Daher bilden die Schrägschnitte I, II mit $M_{I,II} = M_{II,I} = 0$ und den Hauptbiegemomenten M_I, M_{II} den Winkel $\psi = \psi_0$.

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 2\psi_0 &= \frac{2 M_{xy}}{M_x - M_y}, \\ M_{I,II} &= \frac{1}{2} (M_x + M_y) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(M_x - M_y)^2 + 4 M_{xy}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (921)$$

In derselben Weise lassen sich in jedem Punkte der Platte auch die Richtungen I', II' mit $\psi'_0 = \psi_0 \pm 45^\circ$ der beiden Hauptdrillungsmomente $M_{I',II'}$ angeben, in denen die Biegemomente Null sind.

$$M_{I',II'} = \pm \sqrt{(M_x - M_y)^2 + 4 M_{xy}^2}. \quad (922)$$

Richtung und Größe der Hauptbiegungs- und Hauptdrillungsmomente können für jeden Punkt der Mittelebene auch nach den bekannten graphischen Methoden Mohrs festgestellt werden. Die Richtungen I, II bestimmen die Lage der Stahlbewehrung. Bei orthogonaler Bewehrung f_x, f_y sind die vergrößerten Beträge $(M_x \pm M_{yx})$ und $(M_y \pm M_{xy})$ maßgebend.

Die Summe der Biegemomente $(M_n + M_s)$ ist von der Richtung ψ unabhängig. Sie ist wie bei jeder Tensortransformation invariant.

$$M_x + M_y = M_n + M_s = M_I + M_{II}.$$

Dasselbe gilt daher auch für

$$M = \frac{M_x + M_y}{1 + \mu} = -N \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -N \Delta w. \quad (923)$$

M wird als Momentensumme bezeichnet und ist eine skalare Funktion in x und y . Die Bezeichnung Δ ist eine in der Mathematik gebräuchliche Abkürzung der Differentialoperation

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (924)$$

4. Die Gleichgewichtsbedingungen. a) Gleichgewicht der äußeren Kräfte des differentialen Prismas (Abb. 623) bei einer Drehung um die beiden Kanten dx , dy :

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_{yz} = 0; \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_{xz} = 0, \quad (925)$$

und mit (919) daher

$$Q_{yz} = -N \frac{\partial}{\partial y} \Delta w, \quad Q_{xz} = -N \frac{\partial}{\partial x} \Delta w. \quad (926)$$

Da außerdem nach (910) $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ist, wird nach (919) auch $M_{xy} = M_{yx}$.

b) Gleichgewicht der äußeren Kräfte des differentialen Prismas bei einer Verschiebung in der z -Richtung.

$$\frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} + p = 0. \quad (927)$$

Die Bedingung liefert in Verbindung mit (925) die folgende Differentialbeziehung zwischen der Belastung und den Spannungsmomenten

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + p = 0 \quad (928)$$

und bei Verwendung von (926) und (924) die Differentialbeziehung zwischen der Belastung p und der Verschiebung w , der Ordinate der elastischen Fläche der Platte

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{N}. \quad (929)$$

Sie läßt sich in Verbindung mit (924) auch folgendermaßen anschreiben:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w = \Delta \Delta w = \frac{p}{N}. \quad (930)$$

Diese Differentialgleichung 4. Ordnung kann nach H. Marcus mit (923) auch in zwei Differentialgleichungen 2. Ordnung zerlegt werden, die sich in der Reihenfolge

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = -p, \quad (931) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{M}{N} = -w \quad (932)$$

lösen lassen, wenn die Bedingungen für die Momentensumme M am Rande der Platte bekannt sind. Beide Gleichungen bilden den analytischen Ausdruck für eine mit der Kraft 1 gespannte Membran, deren Ordinaten bei der Belastung p durch M und bei der Belastung w mit w bezeichnet werden. Die Zerlegung der Differentialgleichung führt daher, wie H. Marcus zuerst bemerkt hat, zu einer Erweiterung der bekannten Ansätze für die Momentenlinie (90) und die Biegelinie (195) des biegesteifen Stabes. Da nun später nachgewiesen wird, daß w und M am Rande der frei drehbar aufgelagerten Platte mit polygonaler Begrenzung Null sind, besitzen hier die beiden Flächen als Membran über der Randkurve mit der vorgeschriebenen Spannung 1 und dem Druck p oder w konkrete Bedeutung.

Dieselben Betrachtungen gelten auch für Polarkoordinaten. Das Ergebnis kann entweder durch Koordinatentransformation gewonnen oder unmittelbar an

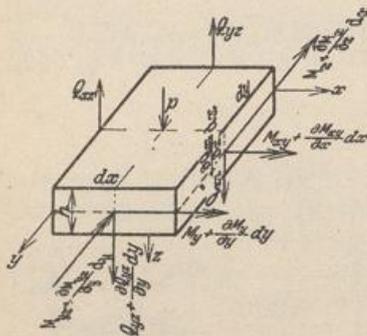


Abb. 623.

einem differentialen Abschnitt (Abb. 624) abgeleitet werden. Das Biegemoment in einem Schnitt $r = \text{const}$ ist M_r , das Biegemoment in einem Schnitt $\alpha = \text{const}$ heißt M_α . Die Drillungsmomente führen die Bezeichnung $M_{r\alpha}, M_{\alpha r}$.

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -N \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right) \right], \\ M_\alpha &= -N \left[\mu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right], \\ M_{r\alpha} = M_{\alpha r} &= -N(1-\mu) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \alpha} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) = -N(1-\mu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right). \end{aligned} \right\} \quad (933)$$

Die Summe der Biegemomente ($M_r + M_\alpha$) ist wiederum von der Lage der Bezugsachse unabhängig. Dasselbe gilt daher auch von der Momentensumme M .

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{M_r + M_\alpha}{1 + \mu} = -N \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right) = -N \Delta w, \\ Q_{rz} &= -N \frac{\partial}{\partial r} \Delta w, \quad Q_{\alpha z} = -N \frac{\partial}{\partial \alpha} \Delta w. \end{aligned} \right\} \quad (934)$$

Die Differentialbeziehung zwischen Belastung p und Ausbiegung w lautet jetzt

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \alpha^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \alpha^2} \right) w = \Delta \Delta w = \frac{p}{N}. \quad (935)$$

Sie kann auch hier wieder mit (934) in zwei Gleichungen 2. Ordnung zerlegt werden.

$$\Delta M = \frac{\partial^2 M}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial M}{\partial r} + \frac{\partial^2 M}{r^2 \partial \alpha^2} = -p, \quad (936)$$

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} = -\frac{M}{N}. \quad (937)$$

Die Berechnung des Spannungs- und Formänderungszustandes einer Platte für eine vorgeschriebene Belastung $p(x, y)$ oder $p(r, \alpha)$ besteht also darin, diejenige Funktion w in x, y oder r, α zu finden, welche die Differentialgleichung (930) oder (935), außerdem aber noch am Rande die von der Stützung der Platte vorgeschriebenen statischen und geometrischen Bedingungen erfüllt. Diese Lösung ist nach Abschn. 8 eindeutig. Dagegen sind unendlich viele Lösungen w vorhanden, welche die Differentialgleichung (930) oder (935) allein befriedigen. Der Plattenrand gilt entweder als frei drehbar aufgelagert, starr-eingespannt oder als kräftefrei.

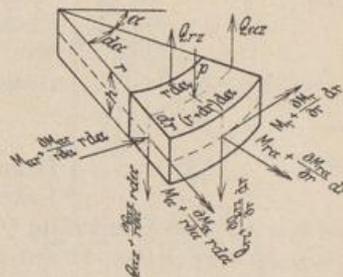


Abb. 624.

Die statischen und geometrischen Bedingungen der Stützung. a) Frei drehbare, starre Auflagerung der Platte in einer Geraden $x = \text{const}$. Geometrische Bedingungen:

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,$$

statische Bedingungen:

$$-\frac{M_r}{N} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad (938)$$

daher auch

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad M_y = 0, \quad \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{und} \quad M = 0.$$

Da also am Rande der frei drehbar aufgelagerten Platte $w = 0$ und $M = 0$ sein muß, kann die Lösung M aus (931) unabhängig von w angegeben und darauf zur Berechnung von w in (932) verwendet werden. Die Stützung wird daher in Überein-

stimmung mit der Untersuchung für den biegeungssteifen Stab als statisch bestimmt bezeichnet, obwohl die Schnittkräfte selbst erst durch die Funktion w bekannt sind.

Die an dem freien Rande vorhandenen Drillungsmomente M_{xy} werden nach dem Vorschlag von Thompson und Tait im Sinne der Abb. 625 durch eine stetige Verteilung von Kräftepaaren ersetzt. Der Spannungszustand wird auf diese Weise nach dem St. Venantschen Prinzip nur in einem eng begrenzten Bereich geändert. Die Kräftepaare ergänzen die Querkräfte am Rande und stehen gemeinsam mit diesen und dem Stützendruck A_x oder A_y im Gleichgewicht. Die Bedingung läßt sich am einfachsten ableiten, wenn die Platte an einem Randträger abgestützt angenommen wird (Abb. 626).

$$Q_{xz} dy + \int_y^{y+dy} \left[\left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy \right) \frac{1}{dy} - \frac{M_{xy}}{dy} \right] dy + A_x dy = 0, \quad (939)$$

$$\left. \begin{aligned} A_x &= - \left(Q_{xz} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) = N \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right), \\ A_y &= - \left(Q_{yz} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} \right) = N \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (940)$$

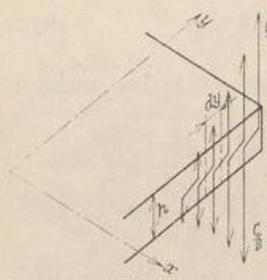


Abb. 625.

Die Substitution der Randdrillungsmomente liefert an den Ecken einer frei aufliegenden rechteckigen Platte aufwärtsgerichtete Einzelkräfte, deren Betrag gleich dem doppelten Drillungsmoment an der Ecke ist.

$$-C = 2 M_{xy} = 2 M_{yx}. \quad (941)$$

Daher ist die Verankerung der Ecken frei aufliegender Platten

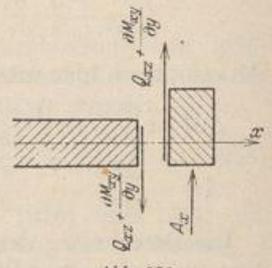


Abb. 626.

notwendig. Die Querkräfte Q_{xz} und Q_{yz} sind an den Ecken Null.

b) Starre Einspannung der Platte in einer Geraden $x = \text{const.}$ Geometrische Bedingungen:

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0.$$

Außerdem sind

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (942)$$

so daß am Rande starr eingespannter Platten keine Drillungsmomente auftreten.

c) Kräftefreie Begrenzung der Platte in einer Geraden $x = \text{const.}$ Statische Bedingungen:

$$-\frac{M_x}{N} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad -\frac{A_x}{N} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0. \quad (943)$$

d) Kräftefreie Ecke der Platte: Außer den statischen Bedingungen für den Rand $x = \text{const}$ mit $M_x = 0$ und $A_x = 0$ und für den Rand $y = \text{const}$ mit $M_y = 0$ und $A_y = 0$ muß die Kraft $C = 0$, also

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad (944)$$

sein.

Die Beschreibung des Verschiebungszustandes einer Platte für eine vorgeschriebene Belastung und vorgeschriebene Randbedingungen ist nach Ableitung der Differentialbeziehungen zwischen der Ausbiegung w und der Belastung p nur noch eine mathematische Aufgabe, deren unmittelbare Lösung allerdings nur in einzelnen

Fällen gelingt. Mit der Funktion $w(x, y)$ sind auch ihre Ableitungen und damit die Schnittkräfte in jedem Punkte der Platte bekannt.

Lévy, M.: C. R. Acad. Sci., Paris Bd. 129 (1899) S. 535. — Estanave, E.: Contribution à l'étude de l'équilibre élastique d'une plaque etc. Paris 1900. — Nadai, A.: Die elastischen Platten. Berlin 1925. — Geckeler, J. W.: Elastostatik. Handb. d. Physik Bd. VI: Mechanik der elastischen Körper, Kap. 3. Berlin 1928. — Bergsträßer, M.: Forsch.-Arbeiten Ing.-Wes. Heft 302. Berlin 1928.

68. Die Kreisplatte und die Kreisringplatte unter zentralsymmetrischer Belastung.

Platten mit gleichbleibender Dicke. Die Punkte der Mittelebene werden mit Rücksicht auf die Begrenzung der Platte auf Polarkoordinaten r, α mit dem Mittelpunkt O als Ursprung bezogen. Die Schnittkräfte der Platte und die Ausbiegung w ihrer Mittelfläche sind daher nach (935) aus der Belastung p bestimmt. Die Beziehungen sind jedoch bei Zentralsymmetrie der Plattenform, der Stützung und Belastung unabhängig vom Winkel α , so daß die Ableitungen der Funktion $w(r, \alpha) \rightarrow w(r)$ nach α Null sind und die partielle Differentialgleichung in eine totale Differentialgleichung übergeht. Die Drillungsmomente $M_{r\alpha} = M_{\alpha r}$ sind daher nach (933) ebenfalls Null. Im übrigen wird nach S. 647

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -N \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \mu \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right), & M_\alpha &= -N \left(\mu \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right), \\ \text{Momentensumme } M &= \frac{M_r + M_\alpha}{1 + \mu} = -N \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = -N \Delta w. \end{aligned} \right\} \quad (945)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen für die äußeren Kräfte an dem Plattenabschnitt Abb. 627 liefern die Beziehungen

$$Q_{rz} = \frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r - M_\alpha}{r} = -N \frac{d}{dr} (\Delta w); \quad \frac{d(r Q_{rz})}{dr} = -p r \quad (946)$$

und mit (945) die Differentialgleichung

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) w = \Delta \Delta w = \frac{p}{N}. \quad (947)$$

Das Ergebnis kann daher in der Form

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + 2 \frac{1}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} = \frac{p}{N} \quad (948)$$

angeschrieben und nach (946) aus dem Ansatz

$$\frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \right] = \frac{p r}{N} \quad (949)$$

abgeleitet werden. Es läßt sich daher mit $\varphi = dw/dr$ auch folgendermaßen ausdrücken:

$$r \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{d\varphi}{dr} - \frac{1}{r} \varphi = r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \varphi) \right] = \frac{1}{N} \left(\int_0^r p r dr + C \right). \quad (950)$$

Die vollständige Lösung der Differentialgleichung 4. Ordnung besteht aus einem partikulären Integral w_0 der inhomogenen Gleichung (947) und aus vier mit den Integrationskonstanten C_1 bis C_4 erweiterten Lösungen w_1 bis w_4 der homogenen Gleichung. Das partikuläre Integral w_0 kann in diesem Falle aus (936), (937) durch eine zweimalige Wiederholung einer doppelten Quadratur bestimmt werden, denn

$$\left. \begin{aligned} r \frac{d^2 M}{dr^2} + \frac{dM}{dr} &= \frac{d}{dr} \left(r \frac{dM}{dr} \right) = -p r, & M &= - \int \frac{dr}{r} \int p r dr, \\ r \frac{d^2 w_0}{dr^2} + \frac{dw_0}{dr} &= \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw_0}{dr} \right) = -\frac{M r}{N}, & w_0 &= - \int \frac{dr}{r} \int \frac{M}{N} r dr. \end{aligned} \right\} \quad (951)$$

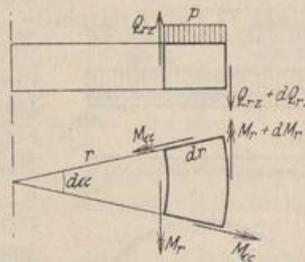


Abb. 627.