Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Die statischen und geometrischen Bedingungen der Stützung

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

einem differentialen Abschnitt (Abb. 624) abgeleitet werden. Das Biegungsmoment in einem Schnitt $r = \text{const}$ ist M_r, das Biegungsmoment in einem Schnitt $\alpha = \text{const}$ heißt M_α. Die Drillungsmomente führen die Bezeichnung $M_{r\alpha}$, $M_{\alpha r}$.

$$\left.\begin{aligned} M_r &= -N\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}\right)\right], \\ M_\alpha &= -N\left[\mu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}\right], \\ M_{r\alpha} = M_{\alpha r} &= -N(1-\mu)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial\alpha} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right) = -N(1-\mu)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right). \end{aligned}\right| \tag{933}$$

Die Summe der Biegungsmomente $(M_r + M_\alpha)$ ist wiederum von der Lage der Bezugsachse unabhängig. Dasselbe gilt daher auch von der Momentensumme M.

$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{M_r + M_\alpha}{1+\mu} = -N\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}\right) = -N\Delta w, \\ Q_{rz} &= -N\frac{\partial}{\partial r}\Delta w, \qquad Q_{\alpha z} = -N\frac{\partial}{r\,\partial\alpha}\Delta w. \end{aligned}\right\} \tag{934}$$

Die Differentialbeziehung zwischen Belastung p und Ausbiegung w lautet jetzt

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{r^2\,\partial\alpha^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \alpha^2}\right) w = \Delta\Delta w = \frac{p}{N}. \tag{935}$$

Sie kann auch hier wieder mit (934) in zwei Gleichungen 2. Ordnung zerlegt werden.

$$\Delta M = \frac{\partial^2 M}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial M}{\partial r} + \frac{\partial^2 M}{r^2\,\partial\alpha^2} = -p, \tag{936}$$

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} = -\frac{M}{N}. \tag{937}$$

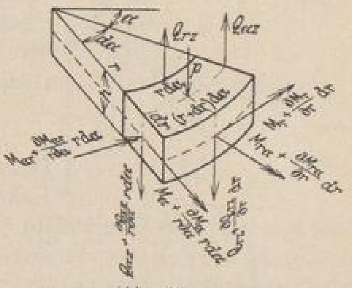

Abb. 624.

Die Berechnung des Spannungs- und Formänderungszustandes einer Platte für eine vorgeschriebene Belastung $p(x, y)$ oder $p(r, \alpha)$ besteht also darin, diejenige Funktion w in x, y oder r, α zu finden, welche die Differentialgleichung (930) oder (935), außerdem aber noch am Rande die von der Stützung der Platte vorgeschriebenen statischen und geometrischen Bedingungen erfüllt. Diese Lösung ist nach Abschn. 8 eindeutig. Dagegen sind unendlich viele Lösungen w vorhanden, welche die Differentialgleichung (930) oder (935) allein befriedigen. Der Plattenrand gilt entweder als frei drehbar aufgelagert, starr eingespannt oder als kräftefrei.

Die statischen und geometrischen Bedingungen der Stützung. a) Frei drehbare, starre Auflagerung der Platte in einer Geraden $x = \text{const}$. Geometrische Bedingungen:

$$w = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,$$

statische Bedingungen:

$$-\frac{M_x}{N} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,$$

daher auch

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \qquad M_y = 0, \qquad \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{und} \quad M = 0. \tag{938}$$

Da also am Rande der frei drehbar aufgelagerten Platte $w = 0$ und $M = 0$ sein muß, kann die Lösung M aus (931) unabhängig von w angegeben und darauf zur Berechnung von w in (932) verwendet werden. Die Stützung wird daher in Übereinstimmung mit der Untersuchung für den biegungssteifen Stab als statisch bestimmt bezeichnet, obwohl die Schnittkräfte selbst erst durch die Funktion w bekannt sind.

Die an dem freien Rande vorhandenen Drillungsmomente M_{xy} werden nach dem Vorschlag von Thompson und Tait im Sinne der Abb. 625 durch eine stetige Verteilung von Kräftepaaren ersetzt. Der Spannungszustand wird auf diese Weise nach dem St. Venantschen Prinzip nur in einem eng begrenzten Bereich geändert. Die Kräftepaare ergänzen die Querkräfte am Rande und stehen gemeinsam mit diesen und dem Stützendruck A_x oder A_y im Gleichgewicht. Die Bedingung läßt sich am einfachsten ableiten, wenn die Platte an einem Randträger abgestützt angenommen wird (Abb. 626).

$$Q_{xz}\,dy + \int_{y}^{y+dy} \left[\left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\,dy\right)\frac{1}{dy} - \frac{M_{xy}}{dy}\right]dy + A_x\,dy = 0, \tag{939}$$

$$\left.\begin{aligned} A_x &= -\left(Q_{xz} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\right) = N\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2}\right), \\ A_y &= -\left(Q_{yz} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x}\right) = N\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^2} + (2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial y}\right). \end{aligned}\right\} \tag{940}$$

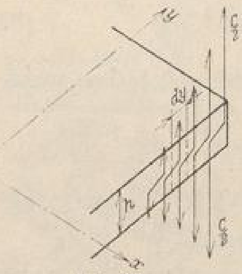

Abb. 625.

Die Substitution der Randdrillungsmomente liefert an den Ecken einer frei aufliegenden rechteckigen Platte aufwärtsgerichtete Einzelkräfte, deren Betrag gleich dem doppelten Drillungsmoment an der Ecke ist.

$$-C = 2\,M_{xy} = 2\,M_{yx}. \tag{941}$$

Daher ist die Verankerung der Ecken frei aufliegender Platten notwendig. Die Querkräfte Q_{xz} und Q_{yz} sind an den Ecken Null.

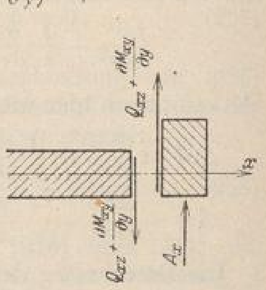

Abb. 626.

b) Starre Einspannung der Platte in einer Geraden $x = \text{const}$. Geometrische Bedingungen:

$$w = 0, \qquad \partial w/\partial x = 0.$$

Außerdem sind

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} = 0, \tag{942}$$

so daß am Rande starr eingespannter Platten keine Drillungsmomente auftreten.

c) Kräftefreie Begrenzung der Platte in einer Geraden $x = \text{const}$. Statische Bedingungen:

$$-\frac{M_x}{N} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \qquad -\frac{A_x}{N} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2} = 0. \tag{943}$$

d) Kräftefreie Ecke der Platte: Außer den statischen Bedingungen für den Rand $x = \text{const}$ mit $M_x = 0$ und $A_x = 0$ und für den Rand $y = \text{const}$ mit $M_y = 0$ und $A_y = 0$ muß die Kraft $C = 0$, also

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} = 0 \tag{944}$$

sein.

Die Beschreibung des Verschiebungszustandes einer Platte für eine vorgeschriebene Belastung und vorgeschriebene Randbedingungen ist nach Ableitung der Differentialbeziehungen zwischen der Ausbiegung w und der Belastung p nur noch eine mathematische Aufgabe, deren unmittelbare Lösung allerdings nur in einzelnen

Fällen gelingt. Mit der Funktion $w(x, y)$ sind auch ihre Ableitungen und damit die Schnittkräfte in jedem Punkte der Platte bekannt.

Lévy, M.: C. R. Acad. Sci., Paris Bd. 129 (1899) S. 535. — Estanave, E.: Contribution à l'étude de l'équilibre elastique d'une plaque etc. Paris 1900. — Nadai, A.: Die elastischen Platten. Berlin 1925. — Geckeler, J. W.: Elastostatik. Handb. d. Physik Bd. VI: Mechanik der elastischen Körper, Kap. 3. Berlin 1928. — Bergsträßer, M.: Forsch.-Arbeiten Ing.-Wes. Heft 302. Berlin 1928.

68. Die Kreisplatte und die Kreisringplatte unter zentralsymmetrischer Belastung.

Platten mit gleichbleibender Dicke. Die Punkte der Mittelebene werden mit Rücksicht auf die Begrenzung der Platte auf Polarkoordinaten r, α mit dem Mittelpunkt O als Ursprung bezogen. Die Schnittkräfte der Platte und die Ausbiegung w ihrer Mittelfläche sind daher nach (935) aus der Belastung p bestimmt. Die Beziehungen sind jedoch bei Zentralsymmetrie der Plattenform, der Stützung und Belastung unabhängig vom Winkel α, so daß die Ableitungen der Funktion $w(r,\alpha) \to w(r)$ nach α Null sind und die partielle Differentialgleichung in eine totale Differentialgleichung übergeht. Die Drillungsmomente $M_{r\alpha} = M_{\alpha r}$ sind daher nach (933) ebenfalls Null. Im übrigen wird nach S. 647

$$\left.\begin{aligned} &M_r = -N\left(\frac{d^2w}{dr^2}+\mu\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right), \qquad M_\alpha = -N\left(\mu\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right),\\ &\text{Momentensumme}\quad M = \frac{M_r+M_\alpha}{1+\mu} = -N\left(\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right) = -N\,\Delta w\,. \end{aligned}\right\} \qquad (945)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen für die äußeren Kräfte an dem Plattenabschnitt Abb. 627 liefern die Beziehungen

$$Q_{rz} = \frac{dM_r}{dr}+\frac{M_r-M_\alpha}{r} = -N\frac{d}{dr}(\Delta w)\,; \qquad \frac{d(r\,Q_{rz})}{dr} = -p\,r \qquad (946)$$

und mit (945) die Differentialgleichung

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)w = \Delta\Delta w = \frac{p}{N}\,. \qquad (947)$$

Das Ergebnis kann daher in der Form

$$\frac{d^4w}{dr^4}+2\frac{1}{r}\frac{d^3w}{dr^3}-\frac{1}{r^2}\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\frac{dw}{dr} = \frac{p}{N} \qquad (948)$$

angeschrieben und nach (946) aus dem Ansatz

$$\frac{d}{dr}\left[r\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right)\right] = \frac{p\,r}{N} \qquad (949)$$

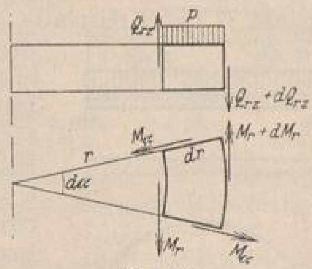

Abb. 627.

abgeleitet werden. Es läßt sich daher mit $\varphi = dw/dr$ auch folgendermaßen ausdrücken:

$$r\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{d\varphi}{dr}-\frac{1}{r}\varphi = r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\varphi)\right] = \frac{1}{N}\left(\int_0^r p\,r\,dr + C\right). \qquad (950)$$

Die vollständige Lösung der Differentialgleichung 4. Ordnung besteht aus einem partikulären Integral w_0 der inhomogenen Gleichung (947) und aus vier mit den Integrationskonstanten C_1 bis C_4 erweiterten Lösungen w_1 bis w_4 der homogenen Gleichung. Das partikuläre Integral w_0 kann in diesem Falle aus (936), (937) durch eine zweimalige Wiederholung einer doppelten Quadratur bestimmt werden, denn

$$\left.\begin{aligned} &r\frac{d^2M}{dr^2}+\frac{dM}{dr} = \frac{d}{dr}\left(r\frac{dM}{dr}\right) = -p\,r, \qquad M = -\int\frac{dr}{r}\int p\,r\,dr,\\ &r\frac{d^2w_0}{dr^2}+\frac{dw_0}{dr} = \frac{d}{dr}\left(r\frac{dw_0}{dr}\right) = -\frac{M\,r}{N}, \qquad w_0 = -\int\frac{dr}{r}\int\frac{M}{N}\,r\,dr\,. \end{aligned}\right\} \qquad (951)$$