



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

68. Die Kreisplatte und die Kreisringplatte unter zentralsymmetrischer
Belastung

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

Fällen gelingt. Mit der Funktion $w(x, y)$ sind auch ihre Ableitungen und damit die Schnittkräfte in jedem Punkte der Platte bekannt.

Lévy, M.: C. R. Acad. Sci., Paris Bd. 129 (1899) S. 535. — Estanave, E.: Contribution à l'étude de l'équilibre élastique d'une plaque etc. Paris 1900. — Nadai, A.: Die elastischen Platten. Berlin 1925. — Geckeler, J. W.: Elastostatik. Handb. d. Physik Bd. VI: Mechanik der elastischen Körper, Kap. 3. Berlin 1928. — Bergsträßer, M.: Forsch.-Arbeiten Ing.-Wes. Heft 302. Berlin 1928.

68. Die Kreisplatte und die Kreisringplatte unter zentralsymmetrischer Belastung.

Platten mit gleichbleibender Dicke. Die Punkte der Mittelebene werden mit Rücksicht auf die Begrenzung der Platte auf Polarkoordinaten r, α mit dem Mittelpunkt O als Ursprung bezogen. Die Schnittkräfte der Platte und die Ausbiegung w ihrer Mittelfläche sind daher nach (935) aus der Belastung p bestimmt. Die Beziehungen sind jedoch bei Zentralsymmetrie der Plattenform, der Stützung und Belastung unabhängig vom Winkel α , so daß die Ableitungen der Funktion $w(r, \alpha) \rightarrow w(r)$ nach α Null sind und die partielle Differentialgleichung in eine totale Differentialgleichung übergeht. Die Drillungsmomente $M_{r\alpha} = M_{\alpha r}$ sind daher nach (933) ebenfalls Null. Im übrigen wird nach S. 647

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -N \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \mu \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right), & M_\alpha &= -N \left(\mu \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right), \\ \text{Momentensumme } M &= \frac{M_r + M_\alpha}{1 + \mu} = -N \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = -N \Delta w. \end{aligned} \right\} \quad (945)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen für die äußeren Kräfte an dem Plattenabschnitt Abb. 627 liefern die Beziehungen

$$Q_{rz} = \frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r - M_\alpha}{r} = -N \frac{d}{dr} (\Delta w); \quad \frac{d(r Q_{rz})}{dr} = -p r \quad (946)$$

und mit (945) die Differentialgleichung

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) w = \Delta \Delta w = \frac{p}{N}. \quad (947)$$

Das Ergebnis kann daher in der Form

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + 2 \frac{1}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} = \frac{p}{N} \quad (948)$$

angeschrieben und nach (946) aus dem Ansatz

$$\frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \right] = \frac{p r}{N} \quad (949)$$

abgeleitet werden. Es läßt sich daher mit $\varphi = dw/dr$ auch folgendermaßen ausdrücken:

$$r \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{d\varphi}{dr} - \frac{1}{r} \varphi = r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \varphi) \right] = \frac{1}{N} \left(\int_0^r p r dr + C \right). \quad (950)$$

Die vollständige Lösung der Differentialgleichung 4. Ordnung besteht aus einem partikulären Integral w_0 der inhomogenen Gleichung (947) und aus vier mit den Integrationskonstanten C_1 bis C_4 erweiterten Lösungen w_1 bis w_4 der homogenen Gleichung. Das partikuläre Integral w_0 kann in diesem Falle aus (936), (937) durch eine zweimalige Wiederholung einer doppelten Quadratur bestimmt werden, denn

$$\left. \begin{aligned} r \frac{d^2 M}{dr^2} + \frac{dM}{dr} &= \frac{d}{dr} \left(r \frac{dM}{dr} \right) = -p r, & M &= - \int \frac{dr}{r} \int p r dr, \\ r \frac{d^2 w_0}{dr^2} + \frac{dw_0}{dr} &= \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw_0}{dr} \right) = -\frac{M r}{N}, & w_0 &= - \int \frac{dr}{r} \int \frac{M}{N} r dr. \end{aligned} \right\} \quad (951)$$

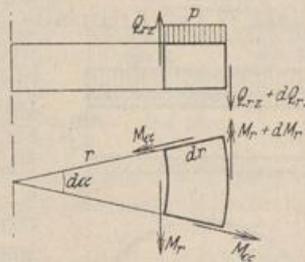


Abb. 627.

Als Lösungen der homogenen Gleichung eignen sich, wie sich leicht durch Einsetzen in (947) prüfen läßt, die folgenden Ansätze:

$$w_1 = 1, \quad w_2 = \left(\frac{r}{a}\right)^2, \quad w_3 = \frac{r^2}{a^2} \ln \frac{r}{a}, \quad w_4 = \ln \frac{r}{a}. \quad (952)$$

a ist der Radius des Plattenrandes (Abb. 628c). Daher lautet die vollständige Lösung von (947) mit $r/a = \varrho$

$$\begin{aligned} w &= w_0 + C_1 + C_2 \varrho^2 + C_3 \varrho^2 \ln \varrho + C_4 \ln \varrho, \\ \frac{dw}{dr} &= \frac{1}{a} \left[\frac{dw_0}{d\varrho} + 2C_2 \varrho + C_3 \varrho (1 + 2 \ln \varrho) + C_4 \frac{1}{\varrho} \right], \\ M_r &= -\frac{N}{a^2} \left\{ \frac{d^2 w_0}{d\varrho^2} + \frac{\mu}{\varrho} \frac{dw_0}{d\varrho} + (1+\mu) \left[2C_2 + C_3 \left(\frac{3+\mu}{1+\mu} + 2 \ln \varrho \right) - C_4 \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{1}{\varrho^2} \right] \right\}, \\ M_\alpha &= -\frac{N}{a^2} \left\{ \mu \frac{d^2 w_0}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dw_0}{d\varrho} + (1+\mu) \left[2C_2 + C_3 \left(\frac{1+3\mu}{1+\mu} + 2 \ln \varrho \right) + C_4 \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{1}{\varrho^2} \right] \right\}, \\ M &= -\frac{N}{a^2} \left[\frac{d^2 w_0}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dw_0}{d\varrho} + 4C_2 + 4C_3 (1 + \ln \varrho) \right], \\ Q_{rz} &= -\frac{N}{a^3} \left(\frac{d^3 w_0}{d\varrho^3} + \frac{d^2 w_0}{\varrho d\varrho^2} - \frac{dw_0}{\varrho^2 d\varrho} + 4C_3 \frac{1}{\varrho} \right). \end{aligned} \quad (953)$$

Der Stützendruck A bei einer zentralsymmetrischen Belastung \mathfrak{P} wird

$$A = \mathfrak{P}/2\pi a. \quad (954)$$

Da jedoch die Durchbiegung w und die Biegemomente M_r, M_α im Mittelpunkt O der Kreisplatte ($\varrho = 0, \ln \varrho = \infty$) für $C_3 \neq 0, C_4 \neq 0$ unendlich groß werden, sind diese Integrationskonstanten des logarithmischen Anteils der Lösung für die Kreisplatte Null. Die Integrationskonstanten C_1, C_2 werden aus den Bedingungen für die Stützung am Plattenrande $r = a, \varrho = 1$ bestimmt. Bei freier Auflagerung des Plattenrandes ist für $\varrho = 1$: $w = 0$ und $M_r = 0$, bei starrer Einspannung des Plattenrandes für $\varrho = 1$: $w = 0, dw/dr = 0$. Bei elastischer Einspannung der Kreisplatte in einem Zylinder besteht die Formänderung aus der Ausbiegung w^* der frei aufgelagerten Platte mit der vorgeschriebenen Belastung p und aus der Ausbiegung Mw^{**} derselben Platte mit einem am Rande angreifenden Einspannungsmoment M (Abb. 628a, b).

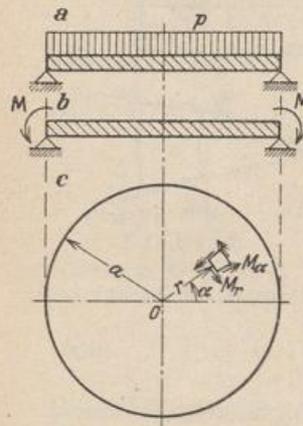


Abb. 628.

$$w = w^* + Mw^{**}. \quad (955)$$

Bei starrer Einspannung mit $M = M_0$ ist für $r = a$ mit $\varrho = 1$

$$\frac{dw}{dr} = \frac{dw^*}{dr} + M_0 \frac{dw^{**}}{dr} = 0 \quad (956)$$

und damit das Einspannungsmoment noch auf andere Weise bestimmt

Die Kreisringplatten werden entweder an beiden Rändern gestützt (Abb. 629a) oder als Kragplatten verwendet. Der freie Rand wird dann mit $r = b, b/a = \beta$, der gestützte Rand mit $r = a, \varrho = 1$ bezeichnet (Abb. 629b, c). Die Platte kann hier wieder frei aufgelagert oder eingespannt sein. Die Formänderung der Kreis-

ringplatte wird durch die vollständige Differentialgleichung mit vier Integrationskonstanten beschrieben. Zu ihrer Berechnung stehen an jedem Rande zwei Bedingungen zur Verfügung. Am freien Rand $\varrho = \beta$ ist $M_r = 0, Q_r = 0$.

Die Kreisplatte vom Durchmesser $2b$ kann außerdem in einem konzentrischen Kreis mit dem Durchmesser $2a$ gestützt sein und daher mit einer Ringplatte von der Breite $b-a$ auskragen. Die äußeren an der Platte angreifenden Kräfte sind dann in $r = a$ unstetig. Die Berechnung zerfällt in die Lösung I für die Formänderung w der Kreisplatte mit den beiden Integrationskonstanten C_1, C_2 und in die Lösung II nach (953) für die Formänderung der Ringplatte von der Breite $(b-a)$ mit vier Integrationskonstanten. Die sechs Integrationskonstanten werden aus den Randbedingungen an der äußeren Begrenzung ($r = b$) mit $M_{b,II} = 0, Q_{bz,II} = 0$ und aus den Bedingungen an dem abgestützten Kreis $r = a$ berechnet. An dieser Stelle ist $w_{a,I} = 0, w_{a,II} = 0, dw_{a,I}/dr = dw_{a,II}/dr$ und $M_{a,I} = M_{a,II}$. Als Kontrolle gilt $Q_{a,I} - Q_{a,II} + \mathfrak{P}/2\pi a = 0$ (Abb. 630) mit \mathfrak{P} als Plattenbelastung. Dasselbe gilt von der Berechnung einer Ringplatte von der Breite $(b-c)$, nur daß in diesem Falle in die Rechnung acht Integrationskonstanten eingehen, die sich aus acht linearen Gleichungen ergeben (Abb. 631). Die Lösung läßt sich bei zentraler Symmetrie naturgemäß leicht auch für die statisch unbestimmte Stützung der Kreis- und Kreisringplatte erweitern.

Die Belastung $\hat{p} = \hat{p}_0$ oder $\hat{p} = \hat{p}(r)$ erstreckt sich über die ganze Breite, über einen Ringstreifen oder als Linienbelastung P über einen ausgezeichneten Breitenkreis der Platte. Die Einzellast P_0 im Ursprung O ist ein Sonderfall. Formänderung und Schnittkräfte der Platte lassen sich in diesem Falle nach den Ansätzen auf S. 650 in dem Bereich um den Plattenmittelpunkt nicht angeben. Unstetigkeiten im Verlauf der zentralsymmetrischen Belastung \hat{p} führen zu einer Unterteilung des Integrationsbereiches. Dasselbe gilt bei einem Wechsel der Plattenstärke. Die

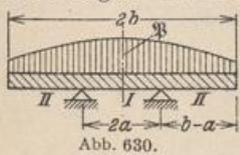


Abb. 630.

Untersuchung beginnt in jedem Falle mit der Berechnung der Integrationskonstanten aus ebenso vielen linearen Gleichungen. Damit ist die Ausbiegung w eindeutig bestimmt. Dasselbe gilt dann auch von den Schnittkräften,

die sich nach (953) aus Ableitungen der Funktion w zusammensetzen. Die Lösung ist richtig, wenn sie die Differentialgleichung und die vorgeschriebenen Randbedingungen befriedigt.

Da Kreis- und Kreisringplatten für die konstruktive Ausgestaltung zahlreicher Bauaufgaben verwendet werden, ist das Ergebnis der notwendigen Untersuchungen in den Tabellen 63 u. 64 zusammengefaßt worden. Ihre Anwendung wird wesentlich vereinfacht, wenn die reziproke Poissonsche Zahl μ , die bei Stahl mit 0,25, bei Eisenbeton zwischen 0,16 und 0,10 gemessen ist, vernachlässigt wird. Dies ist in der Regel zulässig.

Die Differentialgleichung vierter Ordnung läßt sich mit (945) ebenso wie in Abschn. 67 in zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung zerlegen

$$\frac{d^2 M}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dM}{dr} = -\hat{p}, \quad \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = -\frac{M}{N} = -w. \quad (957)$$

Da nach (945) und (946)

$$\frac{dM}{dr} = Q_{rz,p} = -\frac{1}{r} \int_0^r \hat{p} r dr, \quad \text{also auch} \quad \frac{dw}{dr} = Q_{rz,w} = -\frac{1}{r} \int_0^r \frac{M}{N} r dr$$

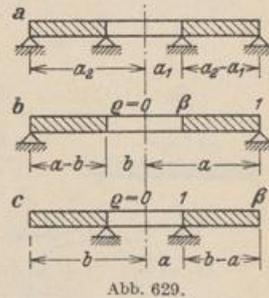


Abb. 629.

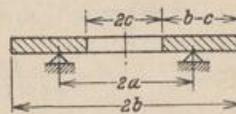


Abb. 631.

ist, entstehen nach H. Marcus die beiden simultanen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\frac{d^2 M}{dr^2} = - \left[p - \frac{1}{r^2} \int_0^r p r dr \right], \quad \frac{d^2 w}{dr^2} = - \left[\frac{M}{N} - \frac{1}{r^2} \int_0^r \frac{M}{N} r dr \right], \quad (958)$$

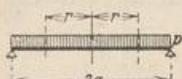
die wiederum eine Analogie zu den Differentialgleichungen der Seilkurve und der Biegelinie des biegeungssteifen Stabes bilden und sich zur Berechnung des Spannungs- und Formänderungszustandes der Kreisplatte ebenfalls eignen.

Tabelle 63. Formänderungen und Schnittkräfte symmetrisch belasteter Kreis- und Kreisringplatten.

$$q = \frac{r}{a}, \quad \beta = \frac{b}{a}, \quad N = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)}, \quad w' = \frac{dw}{dr}.$$

$$\Phi_0 = 1 - q^4, \quad \Phi_1 = 1 - q^2, \quad \Phi_2 = q^2 \ln q, \quad \Phi_3 = \ln q, \quad \Phi_4 = \frac{1}{q^2} - 1.$$

Die Funktionen Φ_0 bis Φ_4 sind in Tabelle 64 enthalten.

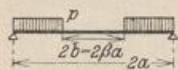


$$w = \frac{p a^4}{64 N (1 + \mu)} [2(3 + \mu) \Phi_1 - (1 + \mu) \Phi_0],$$

$$M_r = \frac{p a^2}{16} (3 + \mu) \Phi_1; \quad M_t = \frac{p a^2}{16} [2(1 - \mu) + (1 + 3\mu) \Phi_1], \quad Q_r = -\frac{p a}{2} q.$$

$$q = 0: \quad w = \frac{p a^4}{64 N} \frac{5 + \mu}{1 + \mu}; \quad M_r = M_t = \frac{p a^2}{16} (3 + \mu),$$

$$q = 1: \quad w' = -\frac{p a^3}{8 N (1 + \mu)}; \quad M_t = \frac{p a^2}{8} (1 - \mu); \quad Q_r = -\frac{p a}{2}.$$



$$\kappa_1 = [(5 + \mu) - (7 + 3\mu) \beta^2] (1 - \beta^2) - 4(1 + \mu) \beta^4 \ln \beta,$$

$$\kappa_2 = [(3 + \mu) - (1 - \mu) \beta^2] (1 - \beta^2) + 4(1 + \mu) \beta^2 \ln \beta.$$

$$q \leq \beta: \quad w = \frac{p a^4}{64 N (1 + \mu)} [\kappa_1 - 2\kappa_2 + 2\kappa_2 \Phi_1], \quad M_r = M_t = \frac{p a^2}{16} \kappa_2, \quad Q_r = 0.$$

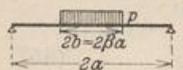
$$q \geq \beta: \quad w = \frac{p a^4}{64 N (1 + \mu)} \{ 2[(3 + \mu)(1 - 2\beta^2) + (1 - \mu)\beta^4] \Phi_1 - (1 + \mu) \Phi_0 - 4(1 + \mu) \beta^4 \Phi_3 - 8(1 + \mu) \beta^2 \Phi_2 \},$$

$$M_r = \frac{p a^2}{16} [(3 + \mu) \Phi_1 - (1 - \mu) \beta^4 \Phi_4 + 4(1 + \mu) \beta^2 \Phi_3], \quad Q_r = -\frac{p a}{2} \left(q - \frac{\beta^2}{q} \right),$$

$$M_t = \frac{p a^2}{16} [(1 + 3\mu) \Phi_1 + (1 - \mu) \beta^4 \Phi_4 + 4(1 + \mu) \beta^2 \Phi_3 + 2(1 - \mu)(1 - \beta^2)^2].$$

$$q = 0: \quad w = \frac{p a^4}{64 N (1 + \mu)} \kappa_1.$$

$$q = 1: \quad w' = -\frac{p a^3}{8 N (1 + \mu)} (1 - \beta^2)^2, \quad M_t = \frac{p a^2}{8} (1 - \mu)(1 - \beta^2)^2, \quad Q_r = -\frac{p a}{2} (1 - \beta^2).$$



$$\kappa_1 = 4 - (1 - \mu) \beta^2, \quad \kappa_2 = [\kappa_1 - 4(1 + \mu) \ln \beta] \beta^2,$$

$$\kappa_3 = 4(3 + \mu) - (7 + 3\mu) \beta^2 + 4(1 + \mu) \beta^2 \ln \beta.$$

$$q \leq \beta: \quad w = \frac{p a^4}{64 N} \left\{ 1 + [4 - 5\beta^2 + 4(2 + \beta^2) \ln \beta] \beta^2 + 2 \frac{\kappa_2}{1 + \mu} \Phi_1 - \Phi_0 \right\}, \quad Q_r = -\frac{p a}{2} q.$$

$$M_r = \frac{p a^2}{16} [\kappa_2 - (3 + \mu) + (3 + \mu) \Phi_1], \quad M_t = \frac{p a^2}{16} [\kappa_2 - (1 + 3\mu) + (1 + 3\mu) \Phi_1].$$

$$q \geq \beta: w = \frac{p a^4}{64 N} \cdot 2 \beta^2 \left[\frac{2(3 + \mu) - (1 - \mu) \beta^2}{1 + \mu} \Phi_1 + 4 \Phi_2 + 2 \beta^2 \Phi_3 \right].$$

$$M_r = \frac{p a^2}{16} [(1 - \mu) \beta^4 \Phi_4 - 4(1 + \mu) \beta^2 \Phi_3], \quad Q_r = -\frac{p b}{2} \frac{\beta}{q}.$$

$$M_t = \frac{p a^2}{16} [-(1 - \mu) \beta^4 \Phi_4 - 4(1 + \mu) \beta^2 \Phi_3 + 2(1 - \mu) \beta^2 (2 - \beta^2)].$$

$$q = 0: w = \frac{p a^2 b^2}{64 N (1 + \mu)} \kappa_3, \quad M_r = M_t = \frac{p a^2}{16} \kappa_2.$$

$$q = \beta: M_r = \frac{p a^2}{16} [\kappa_2 - (3 + \mu) \beta^2], \quad M_t = \frac{p a^2}{16} [\kappa_2 - (1 + 3\mu) \beta^2], \quad Q_r = -\frac{p b}{2}.$$

$$q = 1: w' = -\frac{p a b^2}{8 N (1 + \mu)} (2 - \beta^2), \quad M_t = \frac{p b^2}{8} (1 - \mu) (2 - \beta^2), \quad Q_r = -\frac{p b}{2} \beta.$$



$$\kappa_1 = (3 + \mu) (1 - \beta^2) + 2(1 + \mu) \beta^2 \ln \beta.$$

$$\kappa_2 = (1 - \mu) (1 - \beta^2) - 2(1 + \mu) \ln \beta.$$

$$q \leq \beta: w = \frac{P a^2 b}{8 N (1 + \mu)} [(\kappa_1 - \kappa_2) + \kappa_2 \Phi_1], \quad M_r = M_t = \frac{P b}{4} \kappa_2, \quad Q_r = 0.$$

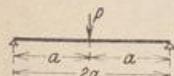
$$q \geq \beta: w = \frac{P a^2 b}{8 N (1 + \mu)} [(3 + \mu) - (1 - \mu) \beta^2] \Phi_1 + 2(1 + \mu) \beta^2 \Phi_3 + 2(1 + \mu) \Phi_2,$$

$$M_r = \frac{P b}{4} [(1 - \mu) \beta^2 \Phi_4 - 2(1 + \mu) \Phi_3], \quad Q_r = -P \frac{\beta}{q}.$$

$$M_t = \frac{P b}{4} [-(1 - \mu) \beta^2 \Phi_4 - 2(1 + \mu) \Phi_3 + 2(1 - \mu) (1 - \beta^2)].$$

$$q = 0: w = \frac{P a^2 b}{8 N (1 + \mu)} \kappa_1.$$

$$q = 1: w' = -\frac{P a b}{2 N (1 + \mu)} (1 - \beta^2), \quad M_t = \frac{P b}{2} (1 - \mu) (1 - \beta^2), \quad Q_r = -P \beta.$$

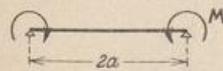


$$w = \frac{P a^2}{16 \pi N} \left[\frac{3 + \mu}{1 + \mu} \Phi_1 + 2 \Phi_2 \right].$$

$$M_r = -\frac{P}{4 \pi} (1 + \mu) \Phi_3, \quad M_t = \frac{P}{4 \pi} [(1 - \mu) - (1 + \mu) \Phi_3], \quad Q_r = -\frac{P}{2 \pi a q}.$$

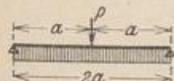
$$q = 0: w = \frac{P a^2}{16 \pi N} \frac{3 + \mu}{1 + \mu}.$$

$$q = 1: w' = -\frac{P a}{4 \pi N (1 + \mu)}, \quad M_t = \frac{P}{4 \pi} (1 - \mu), \quad Q_r = -\frac{P}{2 \pi a}.$$



$$w = \frac{M a^2}{2 N (1 + \mu)} \Phi_1, \quad M_r = M_t = M, \quad Q_r = 0.$$

$$q = 1: w' = -\frac{M a}{N (1 + \mu)}.$$



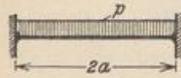
$$w = \frac{P a^2}{64 \pi N} \left(2 \frac{3 + \mu}{1 + \mu} \Phi_1 + \Phi_0 + 8 \Phi_2 \right).$$

$$M_r = -\frac{P}{16 \pi} [(3 + \mu) \Phi_1 + 4(1 + \mu) \Phi_3],$$

$$M_t = -\frac{P}{16 \pi} [(1 + 3\mu) \Phi_1 + 4(1 + \mu) \Phi_3 - 2(1 - \mu)], \quad Q_r = -\frac{P}{2 \pi a} \left(\frac{1}{q} - \nu \right)$$

$$e = 0: \quad w = \frac{P a^2}{64 \pi N} \frac{7 + 3 \mu}{1 + \mu}.$$

$$e = 1: \quad w' = -\frac{P a}{8 \pi N (1 + \mu)}, \quad M_t = \frac{P}{8 \pi} (1 - \mu).$$

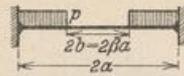


$$w = \frac{p a^4}{64 N} (2 \Phi_1 - \Phi_0), \quad M_r = \frac{p a^2}{16} [(3 + \mu) \Phi_1 - 2],$$

$$M_t = \frac{p a^2}{16} [(1 + 3 \mu) \Phi_1 - 2 \mu], \quad Q_r = -\frac{p a}{2} e.$$

$$e = 0: \quad w = \frac{p a^4}{64 N}, \quad M_r = M_t = \frac{p a^2}{16} (1 + \mu),$$

$$e = 1: \quad M_t = \mu M_r = -\frac{p a^2}{8} \mu, \quad Q_r = -\frac{p a}{2}.$$



$$\kappa_1 = 1 - 4 \beta^2 + \beta^4 (3 - 4 \ln \beta),$$

$$\kappa_2 = 1 - \beta^2 (\beta^2 - 4 \ln \beta).$$

$$e \leq \beta: \quad w = \frac{p a^4}{64 N} [(\kappa_1 - 2 \kappa_2) + 2 \kappa_2 \Phi_1], \quad M_r = M_t = \frac{p a^2}{16} (1 + \mu) \kappa_2, \quad Q_r = 0.$$

$$e \geq \beta: \quad w = \frac{p a^4}{64 N} [2 (1 - 2 \beta^2 - \beta^4) \Phi_1 - \Phi_0 - 4 \beta^4 \Phi_3 - 8 \beta^2 \Phi_2],$$

$$M_r = \frac{p a^2}{16} [-2 (1 - \beta^2)^2 + (3 + \mu) \Phi_1 - (1 - \mu) \beta^4 \Phi_4 + 4 (1 + \mu) \beta^2 \Phi_3],$$

$$M_t = \frac{p a^2}{16} [-2 \mu (1 - \beta^2)^2 + (1 + 3 \mu) \Phi_1 + (1 - \mu) \beta^4 \Phi_4 + 4 (1 + \mu) \beta^2 \Phi_3],$$

$$Q_r = -\frac{p a}{2} \left(e - \frac{\beta^2}{e} \right).$$

$$e = 0: \quad w = \frac{p a^4}{64 N} \kappa_1.$$

$$e = 1: \quad M_t = \mu M_r = -\frac{p a^2}{8} \mu (1 - \beta^2)^2, \quad Q_r = -\frac{p a}{2} (1 - \beta^2).$$



$$\kappa_1 = \beta^2 [4 - \beta^2 (3 - 4 \ln \beta)],$$

$$\kappa_2 = \beta^2 (\beta^2 - 4 \ln \beta).$$

$$e \leq \beta: \quad w = \frac{p a^4}{64 N} [(\kappa_1 - 2 \kappa_2 + 1) + 2 \kappa_2 \Phi_1 - \Phi_0],$$

$$M_r = \frac{p a^2}{16} \{[(1 + \mu) \kappa_2 - (3 + \mu)] + (3 + \mu) \Phi_1\},$$

$$M_t = \frac{p a^2}{16} \{[(1 + \mu) \kappa_2 - (1 + 3 \mu)] + (1 + 3 \mu) \Phi_1\}.$$

$$e \geq \beta: \quad w = \frac{p a^2 b^2}{32 N} [(2 + \beta^2) \Phi_1 + 2 \beta^2 \Phi_3 + 4 \Phi_2],$$

$$M_r = \frac{p b^2}{16} [-2 (2 - \beta^2) + (1 - \mu) \beta^2 \Phi_4 - 4 (1 + \mu) \Phi_3], \quad Q_r = -\frac{p b}{2} \frac{\beta}{e},$$

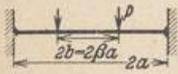
$$M_t = \frac{p b^2}{16} [-2 \mu (2 - \beta^2) - (1 - \mu) \beta^2 \Phi_4 - 4 (1 + \mu) \Phi_3].$$

$$q = 0: \quad w = \frac{p a^4}{64 N} \kappa_1, \quad M_r = M_t = \frac{p a^2}{16} (1 + \mu) \kappa_2.$$

$$q = \beta: \quad M_r = \frac{p a^2}{16} [(1 + \mu) \kappa_2 - (3 + \mu) \beta^2], \quad M_t = \frac{p a^2}{16} [(1 + \mu) \kappa_2 - (1 + 3 \mu) \beta^2];$$

$$Q_r = -\frac{p b}{2}.$$

$$q = 1: \quad M_t = \mu M_r = -\frac{p b^2}{8} \mu (2 - \beta^2), \quad Q_r = -\frac{p b}{2} \beta.$$



$$\kappa_1 = 1 - \beta^2 (1 - 2 \ln \beta),$$

$$\kappa_2 = \beta^2 - 1 - 2 \ln \beta.$$

$$q \leq \beta: \quad w = \frac{P a^2 b}{8 N} [(\kappa_1 - \kappa_2) + \kappa_2 \Phi_1], \quad M_r = M_t = \frac{P b}{4} (1 + \mu) \kappa_2, \quad Q_r = 0.$$

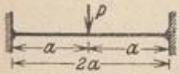
$$q \geq \beta: \quad w = \frac{P a^2 b}{8 N} [(1 + \beta^2) \Phi_1 + 2 \beta^2 \Phi_3 + 2 \Phi_2],$$

$$M_r = -\frac{P b}{4} [2(1 - \beta^2) - (1 - \mu) \beta^2 \Phi_4 + 2(1 + \mu) \Phi_3],$$

$$M_t = -\frac{P b}{4} [2 \mu (1 - \beta^2) + (1 - \mu) \beta^2 \Phi_4 + 2(1 + \mu) \Phi_3], \quad Q_r = -P \frac{\beta}{e}.$$

$$q = 0: \quad w = \frac{P a^2 b}{8 N} \kappa_1.$$

$$q = 1: \quad M_t = \mu M_r = -\frac{P b}{2} \mu (1 - \beta^2), \quad Q_r = -P \beta.$$

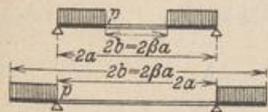


$$w = \frac{P a^2}{16 \pi N} (\Phi_1 + 2 \Phi_2).$$

$$M_r = -\frac{P}{4 \pi} [1 + (1 + \mu) \Phi_3], \quad M_t = -\frac{P}{4 \pi} [\mu + (1 + \mu) \Phi_3], \quad Q_r = -\frac{P}{2 \pi a e}.$$

$$q = 0: \quad w = \frac{P a^2}{16 \pi N}.$$

$$q = 1: \quad M_t = \mu M_r = -\frac{P}{4 \pi} \mu, \quad Q_r = -\frac{P}{2 \pi a}.$$



$$\kappa_1 = (3 + \mu) + 4(1 + \mu) \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \ln \beta,$$

$$\kappa_2 = (3 + \mu) - 4(1 + \mu) \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \ln \beta,$$

$$w = \frac{p a^4}{64 N} \left\{ \frac{2}{1 + \mu} [(3 + \mu) - \beta^2 \kappa_2] \Phi_1 - \Phi_0 - \frac{4}{1 - \mu} \beta^2 \kappa_1 \Phi_3 - 8 \beta^2 \Phi_2 \right\},$$

$$M_r = \frac{p a^2}{16} [(3 + \mu) \Phi_1 - \beta^2 \kappa_1 \Phi_4 + 4(1 + \mu) \beta^2 \Phi_3], \quad Q_r = -\frac{p a}{2} \left(e - \frac{\beta^2}{e} \right),$$

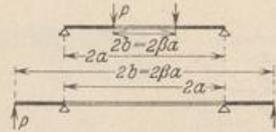
$$M_t = \frac{p a^2}{16} \{ (1 + 3 \mu) \Phi_1 + \beta^2 \kappa_1 \Phi_4 + 4(1 + \mu) \beta^2 \Phi_3 + 2(1 - \mu) - 2 \beta^2 [2(1 - \mu) - \kappa_1] \}.$$

$$q = \beta: \quad w = \frac{p a^4}{64 N} \left\{ [(5 + \mu) - (7 + 3 \mu) \beta^2] \frac{1 - \beta^2}{1 + \mu} - \frac{4}{1 - \mu} \beta^2 \kappa_1 \ln \beta \right\},$$

$$w' = -\frac{p a^2 b}{8 N (1 + \mu)} \left(\frac{\kappa_1}{1 - \mu} - \beta^2 \right), \quad M_t = \frac{p a^2}{8} [\kappa_1 - (1 - \mu) \beta^2].$$

$$\varrho = 1: \quad w' = -\frac{p a^3}{8 N (1 + \mu)} \left[1 - \beta^2 \left(2 - \frac{\varkappa_1}{1 - \mu} \right) \right],$$

$$M_t = \frac{p a^2}{8} \{ (1 - \mu) - \beta^2 [2 (1 - \mu) - \varkappa_1] \}, \quad Q_r = -\frac{p a}{2} (1 - \beta^2).$$



$$\varkappa = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \ln \beta.$$

$$w = \frac{P a^2 b}{8 N} \left[\left(\frac{3 + \mu}{1 + \mu} - 2 \varkappa \right) \Phi_1 + 4 \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \varkappa \Phi_3 + 2 \Phi_2 \right].$$

$$M_r = -\frac{P b}{2} (1 + \mu) (-\varkappa \Phi_4 + \Phi_3); \quad Q_r = -P \frac{\beta}{\varrho},$$

$$M_t = -\frac{P b}{2} (1 + \mu) \left[\varkappa \Phi_4 + \Phi_3 + \left(2 \varkappa - \frac{1 - \mu}{1 + \mu} \right) \right].$$

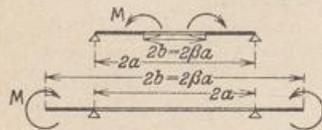
$$\varrho = \beta: \quad w = \frac{P a^2 b}{8 N} \left[\frac{3 + \mu}{1 + \mu} (1 - \beta^2) + 4 \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \varkappa \ln \beta \right],$$

$$w' = -\frac{P a^2}{2 N (1 + \mu)} \left(\beta^2 - 2 \varkappa \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \right),$$

$$M_t = -\frac{P b}{2} (1 + \mu) \left(2 \frac{\varkappa}{\beta^2} - \frac{1 - \mu}{1 + \mu} \right); \quad Q_r = -P.$$

$$\varrho = 1: \quad w' = -\frac{P a b}{2 N (1 + \mu)} \left(1 - 2 \varkappa \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \right); \quad Q_r = -P \beta,$$

$$M_t = -\frac{P b}{2} (1 + \mu) \left(2 \varkappa - \frac{1 - \mu}{1 + \mu} \right).$$



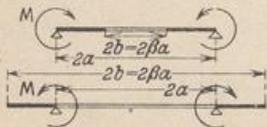
$$w = -\frac{M b^2}{2 N (1 + \mu)} \frac{1}{1 - \beta^2} \left(\Phi_1 - 2 \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \Phi_3 \right),$$

$$M_r = M \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \Phi_4; \quad M_t = -M \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} (\Phi_4 + 2), \quad Q_r = 0.$$

$$\varrho = \beta: \quad w = -\frac{M b^2}{2 N (1 + \mu)} \left(1 - 2 \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \frac{\ln \beta}{1 - \beta^2} \right),$$

$$w' = \frac{M b}{N (1 + \mu)} \frac{1}{1 - \beta^2} \left(\beta^2 + \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \right); \quad M_t = -M \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2}.$$

$$\varrho = 1: \quad w' = 2 \frac{M b}{N (1 - \mu^2)} \frac{\beta}{1 - \beta^2}; \quad M_t = -2 M \frac{\beta^2}{1 - \beta^2}.$$



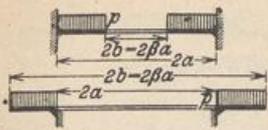
$$w = \frac{M a^2}{2 N (1 + \mu) (1 - \beta^2)} \left(\Phi_1 - 2 \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \beta^2 \Phi_3 \right),$$

$$M_r = M \left(1 - \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \Phi_4 \right); \quad M_t = M \left(\frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2} + \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \Phi_4 \right); \quad Q_r = 0$$

$$\varrho = \beta: \quad w = \frac{M a^2}{2 N (1 + \mu)} \left(1 - 2 \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \ln \beta \right),$$

$$w' = -\frac{M b}{N (1 - \mu^2)} \frac{2}{1 - \beta^2}; \quad M_t = M \frac{2}{1 - \beta^2}.$$

$$\varrho = 1: \quad w' = -\frac{M a}{N (1 + \mu) (1 - \beta^2)} \left(1 + \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \beta^2 \right), \quad M_t = M \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2}.$$



$$\kappa_1 = (1 + \mu) + (1 - \mu) \beta^2, \quad \psi_1 = 4(1 + \mu) \beta^2 \ln \beta,$$

$$\kappa_2 = (1 - \mu) + (1 + \mu) \beta^2, \quad \psi = \frac{\kappa_1 + \psi_1}{\kappa_2} \beta^2.$$

$$w = \frac{p a^4}{64 N} [2(1 - 2\beta^2 - \psi) \Phi_1 - \Phi_0 - 4\psi \Phi_3 - 8\beta^2 \Phi_2].$$

$$M_r = -\frac{p a^2}{16} [2(1 - 2\beta^2 + \psi) - (3 + \mu) \Phi_1 + (1 - \mu) \psi \Phi_4 - 4(1 + \mu) \beta^2 \Phi_3].$$

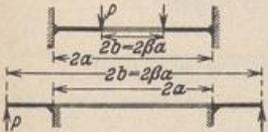
$$M_t = -\frac{p a^2}{16} [2\mu(1 - 2\beta^2 + \psi) - (1 + 3\mu) \Phi_1 - (1 - \mu) \psi \Phi_4 - 4(1 + \mu) \beta^2 \Phi_3].$$

$$Q_r = -\frac{p a}{2} \left(\varrho - \frac{\beta^2}{\varrho} \right).$$

$$\varrho = \beta: \quad w = \frac{p a^4}{64 N} [(1 - \beta^2)^2 - 2(1 - \beta^2)(\psi + 2\beta^2) - 4(\psi + 2\beta^2) \ln \beta],$$

$$w' = -\frac{p a^3}{8 N (1 + \mu)} \frac{\psi - \beta^4}{\beta}; \quad M_t = \frac{p a^2}{8} \frac{1 - \mu^2}{\kappa_2} (1 - \beta^4 + 4\beta^2 \ln \beta).$$

$$\varrho = 1: \quad M_t = \mu M_r = -\frac{p a^2}{8} \mu (1 - 2\beta^2 + \psi); \quad Q_r = -\frac{p a}{2} (1 - \beta^2).$$



$$\kappa = (1 - \mu) + (1 + \mu) \beta^2;$$

$$\psi = [1 + (1 + \mu) \ln \beta] \frac{\beta^2}{\kappa}.$$

$$w = \frac{P a^2 b}{8 N} [(1 + 2\psi) \Phi_1 + 4\psi \Phi_3 + 2\Phi_2].$$

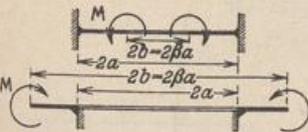
$$M_r = -\frac{P b}{2} [(1 - 2\psi) - (1 - \mu) \psi \Phi_4 + (1 + \mu) \Phi_3]. \quad Q_r = -P \frac{\beta}{\varrho}.$$

$$M_t = -\frac{P b}{2} [\mu(1 - 2\psi) + (1 - \mu) \psi \Phi_4 + (1 + \mu) \Phi_3].$$

$$\varrho = \beta: \quad w = \frac{P a^2 b}{8 N} [(1 + 2\psi)(1 - \beta^2) + 2(\beta^2 + 2\psi) \ln \beta],$$

$$w' = \frac{P b^2}{2 N \kappa} (1 - \beta^2 + 2 \ln \beta), \quad M_t = -\frac{P b}{2} \frac{1 - \mu^2}{\kappa} (1 - \beta^2 + 2 \ln \beta).$$

$$\varrho = 1: \quad M_t = \mu M_r = -\frac{P b}{2} \mu (1 - 2\psi),$$



$$\kappa = (1 - \mu) + (1 + \mu) \beta^2,$$

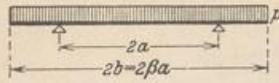
$$w = \frac{M b^2}{2 N \kappa} [\Phi_1 + 2\Phi_3]; \quad Q_r = 0,$$

$$M_r = \frac{M \beta^2}{\kappa} [2 + (1 - \mu) \Phi_4]; \quad M_t = \frac{M \beta^2}{\kappa} [2\mu - (1 - \mu) \Phi_4].$$

$$\varrho = \beta: \quad w = \frac{M b^2}{2 N \kappa} (1 - \beta^2 + 2 \ln \beta); \quad w' = \frac{M b}{N \kappa} (1 - \beta^2).$$

$$M_t = -\frac{M}{\kappa} [(1 - \mu) - (1 + \mu) \beta^2].$$

$$\varrho = 1: \quad M_t = \mu M_r = \frac{2 M \beta^2}{\kappa} \mu.$$



$$\kappa_1 = 2(1 - \mu) + (1 + 3\mu)\beta^2 - 4(1 + \mu)\beta^2 \ln \beta,$$

$$\kappa_2 = 2(1 - \mu) - (3 + \mu)\beta^2 - 4(1 + \mu)\beta^2 \ln \beta.$$

$$\varrho \leq 1: \quad w = \frac{p a^4}{64 N} \left(\frac{2 \kappa_1}{1 + \mu} \Phi_1 - \Phi_0 \right),$$

$$M_r = \frac{p a^2}{16} [\kappa_1 - (3 + \mu) + (3 + \mu) \Phi_1],$$

$$M_t = \frac{p a^2}{16} [\kappa_1 - (1 + 3\mu) + (1 + 3\mu) \Phi_1], \quad Q_r = -\frac{p a}{2} \varrho.$$

$$\varrho \geq 1: \quad w = \frac{p a^4}{64 N} \left(\frac{2 \kappa_2}{1 + \mu} \Phi_1 - \Phi_0 - 8 \beta^2 \Phi_3 - 8 \beta^2 \Phi_2 \right), \quad Q_r = \frac{p a}{2} \left(\frac{\beta^2}{\varrho} - \varrho \right).$$

$$M_r = \frac{p a^2}{16} [\kappa_1 - (3 + \mu) + (3 + \mu) \Phi_1 - 2(1 - \mu)\beta^2 \Phi_4 + 4(1 + \mu)\beta^2 \Phi_3],$$

$$M_t = \frac{p a^2}{16} [\kappa_1 - (1 + 3\mu) + (1 + 3\mu) \Phi_1 + 2(1 - \mu)\beta^2 \Phi_4 + 4(1 + \mu)\beta^2 \Phi_3].$$

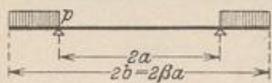
$$\varrho = 0: \quad w = \frac{p a^4}{64 N} \left(\frac{2 \kappa_1}{1 + \mu} - 1 \right), \quad M_r = M_t = \frac{p a^2}{16} \kappa_1.$$

$$\varrho = 1: \quad w' = -\frac{p a^3}{16 N} \left(\frac{\kappa_1}{1 + \mu} - 1 \right), \quad Q_{r1} = -\frac{p a}{2}, \quad Q_{ra} = \frac{p a}{2} (\beta^2 - 1).$$

$$M_r = \frac{p a^2}{16} [\kappa_1 - (3 + \mu)], \quad M_t = \frac{p a^2}{16} [\kappa_1 - (1 + 3\mu)].$$

$$\varrho = \beta: \quad w = -\frac{p a^4}{64 N (1 + \mu)} \{ [(3 - 5\mu) - (7 + 3\mu)\beta^2] (\beta^2 - 1) + 16(1 + \mu)\beta^2 \ln \beta \},$$

$$w' = -\frac{p a^2 b}{8 N (1 + \mu)} (2 - \beta^2), \quad M_t = \frac{p a^2}{8} (1 - \mu) (2 - \beta^2).$$



$$\kappa_1 = \frac{1}{\beta^2} [(1 - \mu) + 4\mu\beta^2 - (1 + 3\mu)\beta^4 + 4(1 + \mu)\beta^4 \ln \beta],$$

$$\kappa_2 = \frac{1}{\beta^2} [(1 - \mu)(1 - 2\beta^2) + (3 + \mu)\beta^4 + 4(1 + \mu)\beta^4 \ln \beta].$$

$$\varrho \leq 1: \quad w = -\frac{p a^4}{32 N (1 + \mu)} \kappa_1 \Phi_1, \quad M_r = M_t = -\frac{p a^2}{16} \kappa_1, \quad Q_r = 0.$$

$$\varrho \geq 1: \quad w = -\frac{p a^4}{64 N (1 + \mu)} [2 \kappa_2 \Phi_1 + (1 + \mu) \Phi_0 + 4(1 + \mu)(2\beta^2 - 1) \Phi_3 + 8(1 + \mu)\beta^2 \Phi_2],$$

$$M_r = -\frac{p a^2}{16} [\kappa_1 - (3 + \mu) \Phi_1 + (1 - \mu)(2\beta^2 - 1) \Phi_4 - 4(1 + \mu)\beta^2 \Phi_3],$$

$$M_t = -\frac{p a^2}{16} [\kappa_1 - (1 + 3\mu) \Phi_1 - (1 - \mu)(2\beta^2 - 1) \Phi_4 - 4(1 + \mu)\beta^2 \Phi_3].$$

$$Q_r = \frac{p a}{2} \left(\frac{\beta^2}{\varrho} - \varrho \right).$$

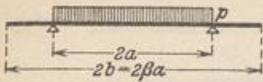
$$\varrho = 0: \quad w = -\frac{p a^4}{32 N (1 + \mu)} \kappa_1, \quad M_r = M_t = -\frac{p a^2}{16} \kappa_1.$$

$$\varrho = 1: \quad w' = \frac{p a^3}{16 N (1 + \mu)} \kappa_1, \quad M_r = M_t = -\frac{p a^2}{16} \kappa_1, \quad Q_{r1} = 0, \quad Q_{ra} = \frac{p a}{2} (\beta^2 - 1).$$

$$\varrho = \beta: \quad w = \frac{p a^4}{64 N (1 + \mu)}$$

$$\cdot \left\{ [2(1 - \mu) - (3 - 5\mu)\beta^2 + (7 + 3\mu)\beta^4] \frac{\beta^2 - 1}{\beta^2} - 4(1 + \mu)(4\beta^2 - 1) \ln \beta \right\},$$

$$w' = \frac{p a^3}{8 N (1 + \mu)} \frac{(\beta^2 - 1)^2}{\beta}, \quad M_t = -\frac{p a^2}{8} (1 - \mu) \frac{(\beta^2 - 1)^2}{\beta^2}.$$



$$\kappa = \frac{1-\mu}{\beta^2} + 2(1+\mu).$$

$$\varrho \leq 1: \quad w = \frac{p a^4}{64 N} \left(2 \frac{\kappa}{1+\mu} \Phi_1 - \Phi_0 \right), \quad M_r = \frac{p a^2}{16} [\kappa - (3+\mu) + (3+\mu) \Phi_1],$$

$$M_t = \frac{p a^2}{16} [\kappa - (1+3\mu) + (1+3\mu) \Phi_1], \quad Q_r = -\frac{p a}{2} \varrho.$$

$$\varrho \geq 1: \quad w = \frac{p a^4}{32 N} \left[\frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{1}{\beta^2} \Phi_1 - 2 \Phi_3 \right], \quad Q_r = 0.$$

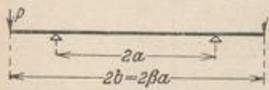
$$M_r = -\frac{p a^2}{16} (1-\mu) \left(\frac{\beta^2-1}{\beta^2} + \Phi_4 \right), \quad M_t = -\frac{p a^2}{16} (1-\mu) \left(-\frac{\beta^2+1}{\beta^2} - \Phi_4 \right).$$

$$\varrho = 0: \quad w = \frac{p a^4}{64 N} \left(2 \frac{\kappa}{1+\mu} - 1 \right), \quad M_r = M_t = \frac{p a^2}{16} \kappa.$$

$$\varrho = 1: \quad w' = -\frac{p a^3}{16 N} \left(\frac{\kappa}{1+\mu} - 1 \right), \quad M_r = -\frac{p a^2}{16} (1-\mu) \frac{\beta^2-1}{\beta^2},$$

$$M_t = \frac{p a^2}{16} (1-\mu) \frac{\beta^2+1}{\beta^2}, \quad Q_r = -\frac{p a}{2}.$$

$$\varrho = \beta: \quad w = -\frac{p a^4}{32 N} \left[\frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{\beta^2-1}{\beta^2} + 2 \ln \beta \right], \quad w' = -\frac{p a^3}{8 N (1+\mu) \beta}, \quad M_t = \frac{p a^2}{8} \frac{1-\mu}{\beta^2}.$$



$$\kappa = (1-\mu) \left(\beta - \frac{1}{\beta} \right) + 2(1+\mu) \beta \ln \beta.$$

$$\varrho \leq 1: \quad w = -\frac{P a^3}{8 N} \frac{\kappa}{1+\mu} \Phi_1, \quad M_r = M_t = -\frac{P a}{4} \kappa, \quad Q_r = 0.$$

$$\varrho \geq 1: \quad w = \frac{P a^3}{8 N} \left\{ -\left[\frac{\kappa}{1+\mu} + 2\beta \right] \Phi_1 - 2\beta \Phi_3 - 2\beta \Phi_2 \right\},$$

$$M_r = -\frac{P a}{4} [\kappa + (1-\mu) \beta \Phi_4 - 2(1+\mu) \beta \Phi_3], \quad Q_r = +P \frac{\beta}{\varrho}.$$

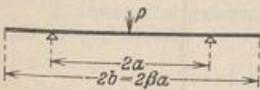
$$M_t = -\frac{P a}{4} [\kappa - (1-\mu) \beta \Phi_4 - 2(1+\mu) \beta \Phi_3].$$

$$\varrho = 0: \quad w = -\frac{P a^3}{8 N (1+\mu)} \kappa.$$

$$\varrho = 1: \quad w' = \frac{P a^2}{4 N (1+\mu)} \kappa; \quad M_r = M_t = -\frac{P a}{4} \kappa.$$

$$\varrho = \beta: \quad w = \frac{P a^3}{8 N (1+\mu)} \left\{ [(1-\mu) + (3+\mu) \beta^2] \left(\beta - \frac{1}{\beta} \right) - 2\kappa \right\},$$

$$w' = \frac{P a^2}{2 N (1+\mu)} (\beta^2 - 1); \quad M_t = \frac{P a}{2 \beta} (1-\mu) (1-\beta^2).$$



$$\kappa = 2(1+\mu) \beta^2.$$

$$\varrho \leq 1: \quad w = \frac{P a^2}{8 \pi N} \left[\left(\frac{1-\mu}{\kappa} + 1 \right) \Phi_1 + \Phi_2 \right],$$

$$M_r = -\frac{P}{8 \pi \beta^2} [(1-\mu) (\beta^2-1) + \kappa \Phi_3],$$

$$M_t = -\frac{P}{8 \pi \beta^2} [-(1-\mu) (\beta^2+1) + \kappa \Phi_3]; \quad Q_r = -\frac{P}{2 \pi a \varrho}.$$

$$e \geq 1: \quad w = \frac{P a^2}{8 \pi N} \left(\frac{1-\mu}{\kappa} \Phi_1 - \Phi_3 \right), \quad M_r = -\frac{P}{8 \pi \beta^2} (1-\mu) [(\beta^2-1) + \beta^2 \Phi_4],$$

$$M_t = -\frac{P}{8 \pi \beta^2} (1-\mu) [-(\beta^2+1) - \beta^2 \Phi_4]; \quad Q_r = 0.$$

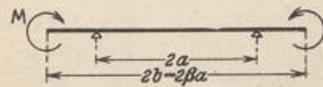
$$e = 0: \quad w = \frac{P a^2}{8 \pi N} \left(\frac{1-\mu}{\kappa} + 1 \right).$$

$$e = 1: \quad w' = -\frac{P a}{8 \pi N} \left(2 \frac{1-\mu}{\kappa} + 1 \right), \quad M_r = -\frac{P}{8 \pi \beta^2} (1-\mu) (\beta^2-1);$$

$$M_t = \frac{P}{8 \pi \beta^2} (1-\mu) (\beta^2+1).$$

$$e = \beta: \quad w = -\frac{P a^2}{8 \pi N} \left[\frac{1-\mu}{\kappa} (\beta^2-1) + \ln \beta \right]; \quad w' = -\frac{P a}{4 \pi N (1+\mu) \beta},$$

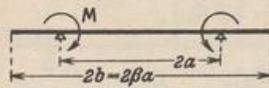
$$M_t = \frac{P}{4 \pi \beta^2} (1-\mu).$$



$$w = \frac{M a^2}{2 N (1+\mu)} \Phi_1; \quad M_r = M_t = M; \quad Q_r = 0.$$

$$e = 0: \quad w = \frac{M a^2}{2 N (1+\mu)}; \quad e = 1: \quad w' = -\frac{M a}{N (1+\mu)}.$$

$$e = \beta: \quad w = -\frac{M a^2}{2 N (1+\mu)} (\beta^2-1); \quad w' = -\frac{M b}{N (1+\mu)}.$$



$$\psi = \frac{1-\mu}{\beta^2}; \quad \kappa = (1+\mu) + \psi.$$

$$e \leq 1: \quad w = \frac{M a^2}{4 N} \frac{\kappa}{1+\mu} \Phi_1, \quad M_r = M_t = \frac{M}{2} \kappa, \quad Q_r = 0.$$

$$e \geq 1: \quad w = \frac{M a^2}{4 N} \left(\frac{\psi}{1+\mu} \Phi_1 - 2 \Phi_3 \right); \quad Q_r = 0,$$

$$M_r = \frac{M}{2} (1-\mu) \left[\left(\frac{1}{\beta^2} - 1 \right) - \Phi_4 \right], \quad M_t = \frac{M}{2} (1-\mu) \left[\left(\frac{1}{\beta^2} + 1 \right) + \Phi_4 \right].$$

$$e = 0: \quad w = \frac{M a^2}{4 N} \frac{\kappa}{1+\mu}.$$

$$e = 1: \quad w' = -\frac{M a}{2 N} \left(1 + \frac{\psi}{1+\mu} \right),$$

$$M_{r,i} = \frac{M}{2} \kappa; \quad M_{r,a} = -\frac{M}{2} (2 - \kappa),$$

$$M_{t,i} = \frac{M}{2} \kappa; \quad M_{t,a} = \frac{M}{2} \psi (\beta^2 + 1).$$

$$e = \beta: \quad w = -\frac{M a^2}{4 N} \left[\frac{\psi}{1+\mu} (\beta^2-1) + 2 \ln \beta \right].$$

$$w' = -\frac{M a}{N (1+\mu) \beta}, \quad M_t = M \psi.$$

Tabelle 64. Funktionen Φ_0 bis Φ_4 .

ϱ	Φ_0	Φ_1	Φ_2	Φ_3	Φ_4
0,0	+ 1,0000	+ 1,00	0	- ∞	+ ∞
1	+ 0,9999	+ 0,99	- 0,0230	- 2,3026	+ 99,0000
2	+ 0,9984	+ 0,96	- 0,0644	- 1,6094	+ 24,0000
3	+ 0,9919	+ 0,91	- 0,1084	- 1,2040	+ 10,1111
4	+ 0,9744	+ 0,84	- 0,1556	- 0,9163	+ 5,2500
5	+ 0,9375	+ 0,75	- 0,1733	- 0,6931	+ 3,0000
6	+ 0,8704	+ 0,64	- 0,1839	- 0,5108	+ 1,7778
7	+ 0,7599	+ 0,51	- 0,1748	- 0,3567	+ 1,0408
8	+ 0,5904	+ 0,36	- 0,1428	- 0,2231	+ 0,5625
9	+ 0,3439	+ 0,19	- 0,0853	- 0,1053	+ 0,2346
1,0	0	0	0	0	0
1	- 0,4641	- 0,21	+ 0,1153	+ 0,0953	- 0,1736
2	- 1,0736	- 0,44	+ 0,2625	+ 0,1823	- 0,3056
3	- 1,8561	- 0,69	+ 0,4434	+ 0,2624	- 0,4083
4	- 2,8416	- 0,96	+ 0,6595	+ 0,3365	- 0,4898
5	- 4,0625	- 1,25	+ 0,9123	+ 0,4055	- 0,5556
6	- 5,5536	- 1,56	+ 1,2032	+ 0,4700	- 0,6094
7	- 7,3521	- 1,89	+ 1,5335	+ 0,5306	- 0,6540
8	- 9,4976	- 2,24	+ 1,9044	+ 0,5878	- 0,6914
9	- 12,0321	- 2,61	+ 2,3171	+ 0,6419	- 0,7230
2,0	- 15,0000	- 3,00	+ 2,7726	+ 0,6931	- 0,7500
1	- 18,4481	- 3,41	+ 3,2719	+ 0,7419	- 0,7732
2	- 22,4256	- 3,84	+ 3,8161	+ 0,7885	- 0,7934
3	- 26,9841	- 4,29	+ 4,4061	+ 0,8329	- 0,8110
4	- 32,1776	- 4,76	+ 5,0427	+ 0,8755	- 0,8264
5	- 38,0625	- 5,25	+ 5,7268	+ 0,9163	- 0,8400

Beispiel für die Anwendung der Tabelle 63.

Der Verlauf der Biegemomente wird für eine Kreisringplatte mit verschiedener Stützung aus der Tabelle 63 entwickelt ($\mu = 1/2$).

1. Innen eingespannte Kreisringplatte (Abb. 632a).

Mit $\beta = b/a = 5,5/2,5 = 2,20$ ist nach S. 657

$$\kappa_1 = 5,20, \quad \kappa_2 = 6,48, \quad \psi_1 = 17,808, \quad \psi = 17,185.$$

Damit wird

$$M_r = -6,6445 + 1,2370 \Phi_1 - 5,5942 \Phi_4 + 8,8230 \Phi_3,$$

$$M_t = -1,1074 + 0,5859 \Phi_1 + 5,5942 \Phi_4 + 8,8230 \Phi_3 \quad (\text{Abb. 633a})$$

2. Innen frei gelagerte Kreisringplatte (Abb. 632b).

Mit $\beta = 2,20$ ist nach S. 655

$$\kappa_1 = -1,4710, \quad \kappa_2 = 7,8043, \quad \text{und damit}$$

$$M_r = 1,2370 \Phi_1 + 2,7811 \Phi_4 + 8,8230 \Phi_3,$$

$$M_t = 0,5859 \Phi_1 - 2,7811 \Phi_4 + 8,8230 \Phi_3 - 11,2132 \quad (\text{Abb. 633b}).$$

3. Außen eingespannte Kreisringplatte (Abb. 632c).

Mit $\beta = \frac{b}{a} = \frac{2,5}{5,5} = 0,4545$ ist nach S. 657

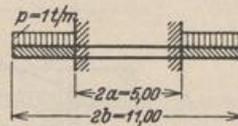


Abb. 632 a.

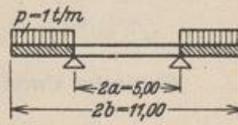


Abb. 632 b.

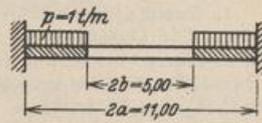


Abb. 632 c.

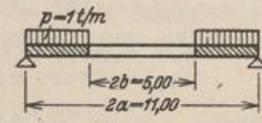


Abb. 632 d.

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= 1,33884, & \kappa_2 &= 1,07438, & \psi_1 &= -0,760222, & \psi &= 0,111273; \\ M_r &= -2,6395 + 5,9870 \Phi_1 - 0,1753 \Phi_4 + 1,8229 \Phi_3, \\ M_t &= -0,4399 + 2,8359 \Phi_1 + 0,1753 \Phi_4 + 1,8229 \Phi_3 \quad (\text{Abb. 633 c}). \end{aligned}$$

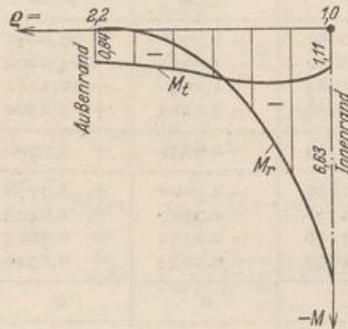


Abb. 633a.

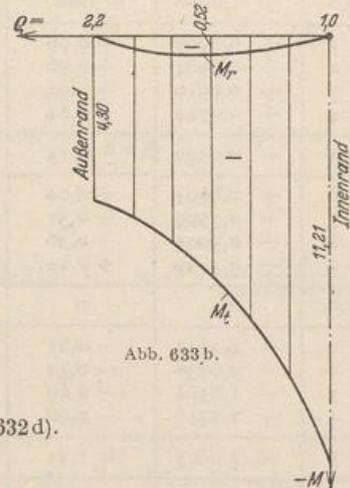


Abb. 633b.

4. Außen frei gelagerte Kreisringplatte (Abb. 632 d).
Mit $\beta = 0,4545$ ist nach § 655

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= 2,2085, & \kappa_2 &= 4,1249; \\ M_r &= 5,9870 \Phi_1 - 0,8627 \Phi_4 + 1,8229 \Phi_3, \\ M_t &= 2,8359 \Phi_1 + 0,8627 \Phi_4 + 1,8229 \Phi_3 + 3,5743 \quad (\text{Abb. 633 d}). \end{aligned}$$

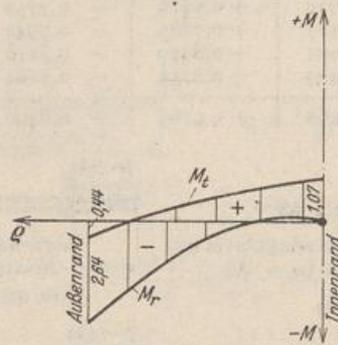


Abb. 633c.

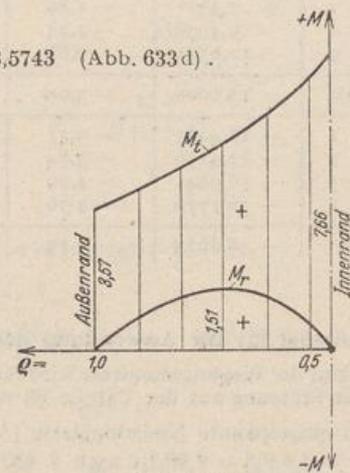


Abb. 633d.

Statische Untersuchung für die Decke eines kreisrunden Behälters mit Zwischenstützen.

Der Abstand der Stützen auf dem Parallelkreis $r = a$ ist so klein, daß die Punkt- oder Flächenkräfte durch eine rotationsymmetrische Linienstützung ersetzt werden können.

1. Geometrische Grundlagen. Die Abmessungen des Tragwerks sind in Abb. 634a enthalten. Die Querdehnung wird mit $\mu = 1/6$ eingesetzt.

2. Hauptsystem und Überzählige. Zur Berechnung dient das Hauptsystem Abb. 634b. Überzählige Größen sind die Linienstützkraft X_1 über den ganzen äußeren Rand und die Stützkraft X_2 der Mittelstütze.

3. Formänderung und Schnittkräfte des Hauptsystems. Die Verschiebungen werden im Nfachen Betrag angegeben und von den Schnittkräften nur die Biegemomente M_r berechnet.

Zustand $X_1 = -1$ (Abb. 634c, Tabelle 63 S. 659).

$$\begin{aligned} \beta &= 2,0, & \ln \beta &= 0,693147, & \kappa &= 4,48469, \\ \delta_{11} &= 0,30216 \frac{a^2}{\pi}, & \delta_{21} &= -0,12013 \frac{a^2}{\pi}, \end{aligned}$$

$$w_i = -\frac{a^2}{\pi} 0,12013 \Phi_1, \quad w_a = \frac{a^2}{\pi} (-0,24513 \Phi_1 - 0,125 \Phi_3 - 0,125 \Phi_2),$$

$$M_{r,i} = -\frac{1}{\pi} 0,28029, \quad M_{r,a} = -\frac{1}{\pi} (0,28029 + 0,10417 \Phi_4 - 0,29167 \Phi_3).$$

Zustand $X_2 = -1$ (Abb. 634d, Tabelle 63 S. 659).

$$\kappa = 9,33333, \quad \delta_{22} = 0,13616 \frac{a^2}{\pi}, \quad \delta_{12} = -0,12013 \frac{a^2}{\pi},$$

$$w_i = \frac{a^2}{\pi} (0,13616 \Phi_1 + 0,125 \Phi_2), \quad w_a = \frac{a^2}{\pi} (0,01116 \Phi_1 - 0,125 \Phi_3),$$

$$M_{r,i} = -\frac{1}{\pi} (0,07812 + 0,29167 \Phi_3),$$

$$M_{r,a} = -\frac{1}{\pi} (0,07812 + 0,10417 \Phi_4).$$

Belastung durch p t/m (Abb. 634e, Tabelle 63 S. 658).

$$\kappa_1 = -5,27208, \quad \kappa_2 = -23,9387,$$

$$\delta_{10} = 0,42516 p a^4, \quad \delta_{20} = -0,15686 p a^4,$$

$$w_i = -p a^4 (0,14123 \Phi_1 + 0,01562 \Phi_0),$$

$$w_a = -p a^4 (0,64122 \Phi_1 + 0,01562 \Phi_0 + 0,5 \Phi_3 + 0,5 \Phi_2),$$

$$M_{r,i} = p a^2 (-0,52742 + 0,19792 \Phi_1),$$

$$M_{r,a} = p a^2 (-0,52742 + 0,19792 \Phi_1 - 0,41667 \Phi_4 + 1,16667 \Phi_3).$$

4. Elastizitätsgleichungen nach Erweiterung

mit $\frac{\pi}{a^2}$

	X_1	X_2	
1	+0,30216	-0,12013	+0,42516 $p a^2 \pi$
2	-0,12013	+0,13616	-0,15686 $p a^2 \pi$

Lösung: $X_1 = 1,4618 p a^2 \pi$, $X_2 = 0,1377 p a^2 \pi$.

5. Superposition.

$$w = w_0 - X_1 w_1 - X_2 w_2,$$

$$w_i = p a^4 (-0,14123 \Phi_1 - 0,01562 \Phi_0) - 1,4618 p a^2 \pi \cdot \frac{a^2}{\pi} (-0,12013 \Phi_1) - 0,1377 p a^2 \pi \cdot \frac{a^2}{\pi} (0,13616 \Phi_1 + 0,125 \Phi_2),$$

$$= p a^4 (-0,01562 \Phi_0 + 0,01561 \Phi_1 - 0,01721 \Phi_2),$$

$$w_a = p a^4 (-0,01562 \Phi_0 - 0,28444 \Phi_1 - 0,31728 \Phi_2 - 0,30006 \Phi_3),$$

$$M_{r,i} = p a^2 (-0,10693 + 0,19792 \Phi_1 + 0,04016 \Phi_3),$$

$$M_{r,a} = p a^2 (-0,10693 + 0,19792 \Phi_1 + 0,74031 \Phi_3 - 0,25005 \Phi_4).$$

Die Biegelinie und die Biegemomente M_r , ferner M_t und Q_r sind in Abb. 635 dargestellt.

Platten mit veränderlicher Dicke. Werden die Ausdrücke (945) der Biegemomente M_r, M_α in die allgemeingültigen Gleichgewichtsbedingungen (947) eingesetzt, so entsteht die Differentialgleichung

$$N \Delta \Delta w + \frac{dN}{dr} \left(2 \frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{2 + \mu}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) + \frac{d^2 N}{dr^2} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} \right) = p. \quad (959)$$

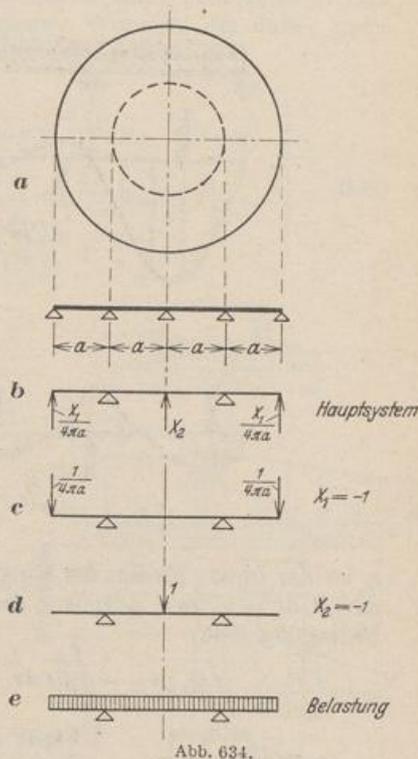


Abb. 634.

Sie läßt sich durch Differentiation aus

$$\frac{d}{dr} \left[r N \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) + r \frac{dN}{dr} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} \right) \right] = p r \quad (960)$$

gewinnen und daher mit $dw/dr = \text{tg } \varphi \approx \varphi$ und $\bar{\varphi} = \varphi E h_0^3 / 12 (1 - \mu^2) = \varphi N_0$ auch als Differentialgleichung 2ter Ordnung anschreiben:

$$\frac{N}{N_0} \frac{d^2 \bar{\varphi}}{dr^2} + \left(\frac{N}{r N_0} + \frac{dN}{N_0 dr} \right) \frac{d\bar{\varphi}}{dr} - \left(\frac{N}{N_0} \frac{1}{r^2} - \frac{\mu}{r} \frac{dN}{N_0 dr} \right) \bar{\varphi} = \frac{1}{r} \left[\int_{r_i}^r p r dr + C \right]. \quad (961)$$

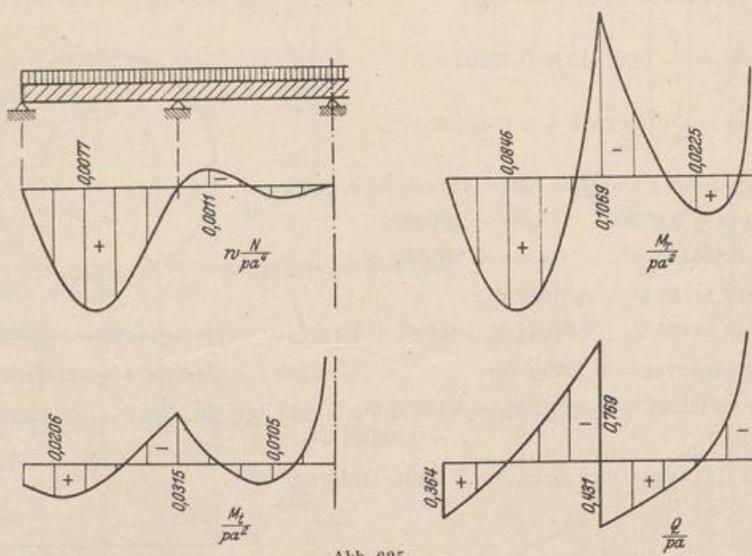


Abb. 635.

r_i ist der innere Radius der Ringplatte (Abb. 636). Die Funktionen $N/N_0 = h^3/h_0^3 = v_1$, $dN/N_0 dr = v_2$ sind gegeben; die rechte Seite ist das Integral zur Gleichgewichtsbedingung (946).

$$r Q_{r,z} = - \int_{r_i}^r p r dr + C \quad \text{und daher} \quad C = r Q_{r,z} + \int_{r_i}^r p r dr. \quad (962)$$

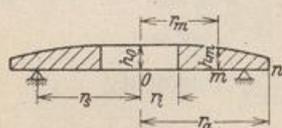


Abb. 636.

Freier Außenrand ($r_s = r_i$, Abb. 636), $Q_{r,z,a} = 0$, $C = \mathfrak{F}$.
 Freier Innenrand ($r_s = r_a$, Abb. 636), $Q_{r,z,i} = 0$, $C = 0$.
 Freier Innen- und Außenrand ($r_i < r_s < r_a$), $Q_{r,z,i} = 0$, $C = 0$.
 In diesem Falle ist die Querkraft in $r = r_s$ unstetig, die Lösung der Gl. (961) daher für zwei Bereiche anzuschreiben. Nach Division mit v_1 lautet die Gl. (961)

$$\frac{d^2 \bar{\varphi}}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} + \frac{v_2}{v_1} \right) \frac{d\bar{\varphi}}{dr} - \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\mu}{r} \frac{v_2}{v_1} \right) \bar{\varphi} = \frac{1}{r v_1} \left[\int_{r_i}^r p r dr + C \right]. \quad (963)$$

Sie läßt sich leicht angenähert berechnen, wenn die Differentialquotienten durch Differenzenquotienten ersetzt werden. Hierbei ist die Unstetigkeit der Querkraft bei einer Stützung nach Abb. 636 ohne Bedeutung für die Lösung. Die bekannten Vorzeichen der Gleichung werden durch einzelne Buchstaben abgekürzt. Es ist

$$\frac{1}{r} + \frac{v_2}{v_1} = a, \quad \frac{1}{r^2} - \frac{\mu}{r} \frac{v_2}{v_1} = b, \quad \frac{1}{v_1 r} \left(\int_{r_i}^r p r dr + C \right) = K. \quad (964)$$

Der Integrationsbereich ($r_a - r_i$) zerfällt in n Stufen von konstanter Breite s mit den Intervallgrenzen $0, \dots, m, \dots, n$. Die Bedingung für die Formänderung der

Platte am Punkte m kann also in Verbindung mit den Bemerkungen auf S. 129 folgendermaßen angeschrieben werden:

$$\begin{aligned}
 & + \Delta^2 \bar{\varphi}_m + s a_m \Delta \bar{\varphi}_m - s^2 b_m \bar{\varphi}_m = K_m s^2, \\
 - \bar{\varphi}_{m-1} \left(1 - \frac{s a_m}{2}\right) + \bar{\varphi}_m (2 + s^2 b_m) - \bar{\varphi}_{m+1} \left(1 + \frac{s a_m}{2}\right) &= -K_m s^2, \quad (965) \\
 & m = 0 \dots n.
 \end{aligned}$$

Der Ansatz enthält $(n + 3)$ unbekannte Wurzeln φ_m in $(n + 1)$ linearen Gleichungen, die daher noch durch die Randbedingungen für $r = r_i$ und $r = r_a$ ergänzt werden müssen. Bei freien oder frei aufliegenden Rändern ist $M_i = 0$, $M_a = 0$, bei eingespannten Rändern $\varphi_i = 0$, $\varphi_a = 0$, bei der Kreisplatte außerdem $\varphi_i = 0$. Der Kern der Matrix enthält in jeder Zeile 3 unbekannte Wurzeln, die daher nach Abschn. 29 oder durch Iteration nach Abschn. 30 berechnet werden.

Die Schnittkräfte sind

$$\left. \begin{aligned}
 M_r &= -\frac{N}{N_0} \left(\frac{d\bar{\varphi}}{dr} + \frac{\mu}{r} \bar{\varphi} \right) \rightarrow -\frac{v_{1,m}}{2s} \left(\bar{\varphi}_{m+1} + \frac{2s\mu}{r_m} \bar{\varphi}_m - \bar{\varphi}_{m-1} \right), \\
 M_\alpha &= -\frac{N}{N_0} \left(\mu \frac{d\bar{\varphi}}{dr} + \frac{1}{r} \bar{\varphi} \right) \rightarrow -\frac{\mu v_{1,m}}{2s} \left(\bar{\varphi}_{m+1} + \frac{2s}{\mu r_m} \bar{\varphi}_m - \bar{\varphi}_{m-1} \right), \\
 Q_r &= -\frac{N}{N_0} \left(\frac{d^2\bar{\varphi}}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \bar{\varphi} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{\varphi}}{dr} \right) + \frac{dN}{N_0 dr} \left(\frac{d\bar{\varphi}}{dr} + \frac{\mu}{r} \bar{\varphi} \right) \\
 &\rightarrow -\frac{v_{1,m}}{s^2} \left[\left(1 + \frac{s}{2r_m} - \frac{s}{2} \frac{v_{2,m}}{v_{1,m}}\right) \varphi_{m+1} \right. \\
 &\quad \left. - \left(2 + \frac{s^2}{r_m^2} + \mu \frac{s^2}{r_m} \frac{v_{2,m}}{v_{1,m}}\right) \varphi_m \right. \\
 &\quad \left. + \left(1 - \frac{s}{2r_m} + \frac{s}{2} \frac{v_{2,m}}{v_{1,m}}\right) \varphi_{m-1} \right].
 \end{aligned} \right\} \quad (966)$$

Die Verformung der Platte folgt aus $d w / dr = \bar{\varphi} / N_0$ zu

$$w_{m+0,5} = w_{m-0,5} + \frac{\bar{\varphi}_m}{N_0} s. \quad (967)$$

Berechnung der Gründungsplatte für einen Schornstein.

1. Geometrische Grundlagen. Abmessungen der Platte nach Abb. 637.

$$h_0 = h_6 = 2,2 \text{ m}, \quad h_{10} = 1,5 \text{ m}.$$

Intervallbreite $s = r_a / 10 = 0,9 \text{ m}$. Im schrägen Teil der Platte ist

$$h_m = h_6 - (h_6 - h_{10}) \frac{m-6}{n-6} = 2,2 - 0,175(m-6),$$

$$n = 10, \quad m = 6 \div 10.$$

$$\mu = \frac{1}{6}, \quad N_0 = \frac{2100000 \cdot 2,2^3}{12 \cdot (1 - 0,028)} = 1918000 \text{ tm}^2/\text{m}.$$

2. Belastung. Ringförmige Belastung P nach Abb. 637 a. Der Bodendruck $\bar{p} = P / r_a^2 \pi$ wird gleichmäßig verteilt angenommen.

3. Vorzahlen der Differenzgleichungen (965) nach (964)

$$v_1 = \frac{h^3}{h_0^3}, \quad v_2 = \frac{1}{h_0^3} \frac{d}{dr} (h^3) = \frac{3 h^2}{h_0^3} \frac{1}{s} \frac{d}{dm} (h), \quad (\text{Abb. 637 b})$$

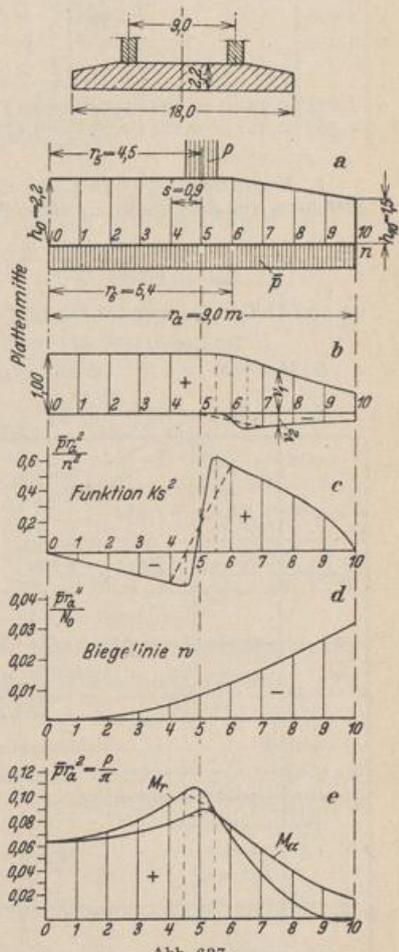


Abb. 637.

$$0 \leq m \leq 6: \quad v_{1,m} = 1, \quad v_{2,m} = 0,$$

$$6 \leq m \leq 10: \quad v_{1,m} = \frac{h_m^3}{10,65}, \quad v_{2,m} = -0,0548 \frac{h_m^2}{n^2}.$$

$$\frac{s a_m}{2} = \frac{1}{2m} + 0,45 \frac{v_2}{v_1},$$

$$s^2 b_m = \frac{1}{m^2} - \frac{0,15}{m} \frac{v_2}{v_1}.$$

Für freien Innenrand ($r_i = 0$) ist nach S. 664 $C = 0$ und daher nach (964)

$$K s^2 = \frac{s^2}{r_1 r} \int_0^r p r dr.$$

$$0 \leq m \leq 5: \quad K_m s^2 = -\bar{p} r_a^3 \frac{m}{2 v_1 n^3}, \quad 5 \leq m \leq 10: \quad K_m s^2 = -\bar{p} r_a^3 \frac{1}{2 v_1 n^3} \left(m - \frac{n^2}{m} \right).$$

An den Unstetigkeitsstellen $m = 5$ und 6 werden die Funktionswerte v_1, v_2, K_m nach Abb. 637 c festgesetzt.

m	h	$v_{1,m}$	$v_{2,m}$	$\frac{1}{2m}$	$0,45 \frac{v_2}{v_1}$	$\frac{s a_m}{2}$	$\frac{1}{m^2}$	$0,15 \frac{v_2}{m v_1}$	$s^2 b_m$	$\frac{m}{2 v_1 n}$	$\frac{n}{2 v_1 m}$	$K_m s^2$
1	2,200	1	0	0,500	0	0,500	1	0	1	0,050	—	$-0,050 \cdot \bar{p} r_a^3 / n^2$
2	2,200	1	0	0,250	0	0,250	0,250	0	0,250	0,100	—	$-0,100 \quad "$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
9	1,675	0,441	-0,154	0,056	-0,157	-0,213	0,012	-0,006	0,018	1,022	1,261	$-0,239 \quad "$
10	1,500	0,317	-0,124	0,050	-0,175	-0,225	0,010	-0,006	0,016	1,579	1,579	0

4. Randbedingungen. In Plattenmitte ist $\varphi_0 = 0$, daher wird die erste Differenzgleichung für den Punkt 1 aufgestellt. Bei $m = 10$ ist $M_{10} = 0$, so daß nach (966)

$$\bar{\varphi}_{11} + \frac{2s\mu}{r_{10}} \bar{\varphi}_{10} - \bar{\varphi}_9 = \bar{\varphi}_{11} + 0,0333 \bar{\varphi}_{10} - \bar{\varphi}_9 = 0$$

ist und 11 Gleichungen für die 11 Unbekannten $\bar{\varphi}_m, m = 1 \dots 11$ zur Verfügung stehen.

5. Matrix der Differenzgleichungen (965) nach Elimination von φ_{11} .

$\bar{\varphi}_1$	$\bar{\varphi}_2$	$\bar{\varphi}_3$	$\bar{\varphi}_4$	$\bar{\varphi}_5$	$\bar{\varphi}_6$	$\bar{\varphi}_7$	$\bar{\varphi}_8$	$\bar{\varphi}_9$	$\bar{\varphi}_{10}$	$\frac{\bar{p} r_a^3}{n^2}$
3,000	-1,500									0,050
-0,750	2,250	-1,250								0,100
	-0,833	2,111	-1,167							0,150
		-0,875	2,063	-1,125						0,200
			-0,900	2,040	-1,100					-0,167
				-1,134	2,031	-0,866				-0,561
					-1,201	2,027	-0,799			-0,466
						-1,204	2,022	-0,796		-0,367
							-1,213	2,018	-0,787	-0,239
								-2,000	2,042	0

Die Auflösung nach Abschn. 29 liefert

$\bar{\varphi}_1$	$\bar{\varphi}_2$	$\bar{\varphi}_3$	$\bar{\varphi}_4$	$\bar{\varphi}_5$	$\bar{\varphi}_6$	$\bar{\varphi}_7$
-0,54941	-1,13216	-1,78824	-2,55517	-3,47254	-4,19757	-4,64943
			$\bar{\varphi}_8$	$\bar{\varphi}_9$	$\bar{\varphi}_{10}$	$\bar{\varphi}_{11}$
			-4,90251	-4,95976	-4,85775	-4,79800
						$\frac{\bar{p} r_a^3}{n^2}$

6. Die Verformung der Platte. Nach (967) ist für die Zwischenpunkte $w_{m+0,5} = w_{m-0,5} + \bar{\varphi}_m s/N_0$. Die Verformung wird mit $w_{0,5} = 0$ auf den Plattenmittelpunkt bezogen, so daß mit

$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}^* \bar{p} r_a^3 / n^2; \quad w_{m+0,5} = \frac{\bar{p} r_a^4}{n^3 N_0} \sum \bar{\varphi}^*. \quad \text{Abb. 637 d.}$$

$w_{0,5}$	$w_{1,5}$	$w_{2,5}$	$w_{3,5}$	$w_{4,5}$	$w_{5,5}$	$w_{6,5}$	$w_{7,5}$	$w_{8,5}$	$w_{9,5}$	$w_{10,5}$	
0	-0,5494	-1,6816	-3,4698	-6,0250	-9,4975	-13,6951	-18,3445	-23,2470	-28,2008	-33,0645	$\frac{\bar{p} r_a^4}{1000 N_0}$

7. Die Schnittkräfte. Mit $r_m/s = m$ und $r_a/s = n$ wird aus (966)

$$M_{r,m} = -\frac{r_{1,m}}{2n} \left(\bar{\varphi}_{m+1}^* + \frac{1}{3m} \bar{\varphi}_m^* - \bar{\varphi}_{m-1}^* \right) \bar{p} r_a^2.$$

$$M_{\alpha,m} = -\frac{r_{1,m}}{12n} \left(\bar{\varphi}_{m+1}^* + \frac{12}{m} \bar{\varphi}_m^* - \bar{\varphi}_{m-1}^* \right) \bar{p} r_a^2.$$

In Plattenmitte ist $\bar{\varphi}_0 = 0$, $\left(\frac{\bar{\varphi}_m}{m}\right)_{m \rightarrow 0} \approx \bar{\varphi}_1$, $\bar{\varphi}_{-1} = -\bar{\varphi}_1$.

Z. B. ist

$$M_{r,0} = -\frac{1}{20} \left(-0,54941 - \frac{1}{3} \cdot 0,54941 - 0,54941 \right) \bar{p} r_a^2 = 0,0641 \bar{p} r_a^2 \text{ mt.}$$

$$M_{r,1} = -\frac{1}{20} \left(-1,13216 - \frac{1}{3} \cdot 0,54941 + 0 \right) \bar{p} r_a^2 = 0,0658 \bar{p} r_a^2 \text{ mt.}$$

$$M_{r,2} = -\frac{1}{20} \left(-1,78824 - \frac{1}{6} \cdot 1,13216 + 0,54941 \right) \bar{p} r_a^2 = 0,0714 \bar{p} r_a^2 \text{ mt.}$$

Die Momente sind in Abb. 637e dargestellt. Positive Momente erzeugen auf der Plattenunterseite Zugspannungen. Im Lastbereich wird die Momentenlinie parabelförmig ergänzt.

Um ein Urteil über die Genauigkeit der Differenzmethode zu bekommen, sind die Momente M_r der Gründungsplatte mit gleichbleibender Dicke $h = 2,2$ m für eine Intervallteilung $n = 6$ und $n = 10$ berechnet und in Abb. 638 mit den Werten der exakten Berechnung ($n = \infty$) nach Tabelle 63 verglichen worden.

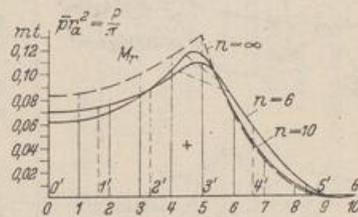


Abb. 638.

Kreisplatte mit gleichbleibender Dicke auf elastischer Bettung. Die äußeren Kräfte bestehen aus der Auflast $\bar{p}(r)$ und dem Bodendruck $\bar{p}(r)$, der nach den Angaben auf S. 17 proportional zur Einsenkung w der Platte gesetzt werden soll ($\bar{p} = cw$). Daher besteht zwischen dem Verschiebungszustand w und den äußeren Kräften nach (948) folgende Differentialbeziehung:

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + 2 \frac{1}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} + \frac{c}{N} w = \frac{\bar{p}}{N}. \quad (968)$$

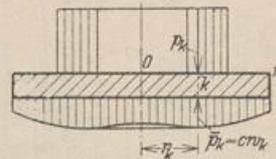


Abb. 639.

Sie besitzt auch Bedeutung für $\bar{p} = 0$, um den Verschiebungszustand w für vorgeschriebene Randkräfte $M_{r=r_n}$, $Q_{r=r_n}$ anzugeben.

Um den geometrischen Zusammenhang in einfacher Weise zu klären, werden die Differentialquotienten hier ebenfalls durch Differenzenquotienten ersetzt. Dabei zerfällt der Integrationsbereich wiederum in n Stufen mit der konstanten Breite s . Für den Punkt k mit $r = r_k$, $s/r_k = \lambda_k$ und $p = p_k$ entsteht folgende Gleichung k ($k = 0, \dots, n$),

$$(1 - \lambda_k)w_{k-2} - \left[2(2 - \lambda_k) + \frac{\lambda_k^2}{2}(2 + \lambda_k)\right]w_{k-1} + \left[6 + 2\lambda_k^2 + \frac{c s^4}{N}\right]w_k - \left[2(2 + \lambda_k) + \frac{\lambda_k^2}{2}(2 - \lambda_k)\right]w_{k+1} + (1 + \lambda_k)w_{k+2} = \frac{p_k s^4}{N}. \quad (969)$$

Die Wurzeln w_k des Ansatzes werden entweder mit dem Gaußschen Algorithmus nach S. 216 ff. oder durch Iteration einer Anfangslösung nach Abschn. 30 berechnet. Die fehlenden Gleichungen liefern die Randbedingungen. Die Schnittkräfte sind dann aus den Verschiebungen w_k folgendermaßen bestimmt:

$$\left. \begin{aligned} M_{r,k} &= -\frac{N}{s^2} (\Delta^2 w_k + \mu \frac{s}{r_k} \Delta w_k) = -\frac{N}{s^2} \left[w_{k+1} \left(1 + \frac{\mu s}{2 r_k}\right) - 2 w_k + w_{k-1} \left(1 - \frac{\mu s}{2 r_k}\right) \right], \\ M_{\alpha,k} &= -\frac{N \mu}{s^2} (\Delta^2 w_k + \frac{s}{\mu r_k} \Delta w_k) = -\frac{N \mu}{s^2} \left[w_{k+1} \left(1 + \frac{s}{2 \mu r_k}\right) - 2 w_k + w_{k-1} \left(1 - \frac{s}{2 \mu r_k}\right) \right], \\ Q_{rz,k} &= -\frac{N}{s^3} (\Delta^3 w_k + \frac{s}{r_k} \Delta^2 w_k - \frac{s^2}{r_k^2} \Delta w_k) \\ &= -\frac{N}{2 s^3} [w_{k+2} - w_{k+1} (2 - 2 \lambda_k + \lambda_k^2) - 4 \lambda_k w_k + w_{k-1} (2 + 2 \lambda_k + \lambda_k^2) - w_{k-2}]. \end{aligned} \right\} (970)$$

Berechnung der Gründungsplatte für einen Schornstein unter Berücksichtigung der elastischen Bettung.

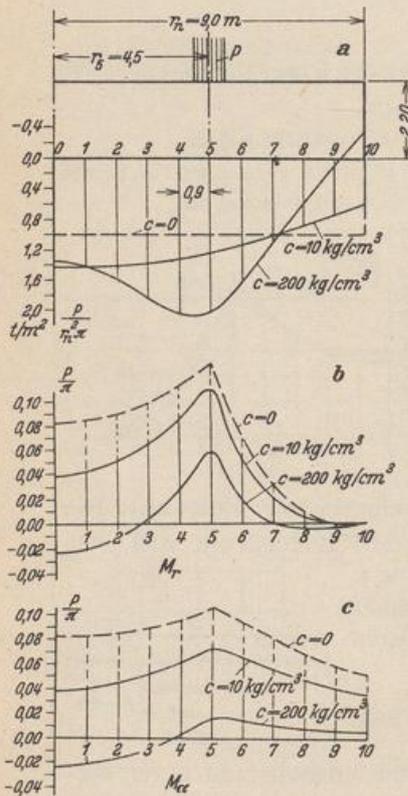


Abb. 640.

1. Geometrische Grundlagen. Abmessungen der Platte nach Abb. 640. Mit $\mu = 1/6$, $E = 2100000 \text{ t/m}^2$ ist nach S. 645

$$N = \frac{2100000 \cdot 2,2^3}{12 (1 - 0,0278)} = 1916684 \text{ tm}^2/\text{m}.$$

2. Belastung. Die senkrechte Belastung P durch den Schornstein verteilt sich auf einen Ring von der Breite s und dem mittleren Radius $r_3 = 4,5 \text{ m}$. Der Bodendruck wird nach S. 17 mit $\bar{p} = c w$ angenommen. Der Leitwert c liegt zwischen 10 und 200 kg/cm^3 , so daß die Rechnung für beide Grenzwerte durchgeführt wird.

3. Die Randbedingungen. Am Rand $r = r_{10}$ ist $M_{r,10} = 0$, $Q_{rz,10} = 0$; daher nach (970) mit $s = 0,9$, $r_{10} = 9,0$, $\lambda_{10} = 0,1$

$$1,0083 w_{11} - 2 w_{10} + 0,9917 w_9 = 0,$$

$$w_{12} - 1,81 w_{11} - 0,40 w_{10} + 2,21 w_9 - w_8 = 0.$$

In Plattenmitte ist aus Symmetriegründen $w_{-1} = w_1$, $w_{-2} = w_2$. Die Glieder der Differentialgleichung (968) werden für den Plattenmittelpunkt mit $r = 0$ unbestimmt, so daß sich die erste Differenzgleichung (969) für $k = 0$ erst nach einem Grenzübergang anschreiben läßt. Nach der Taylorentwicklung ist in der Umgebung des Mittelpunktes

$$w = w(0) + \frac{w''(0)}{2!} r^2 + \frac{w^{IV}(0)}{4!} r^4 + \dots,$$

$$w' = w'(0) r + \frac{w^{IV}(0)}{3!} r^3 + \dots,$$

$$w'' = w''(0) + \frac{w^{IV}(0)}{2!} r^2 + \dots, \quad w''' = w^{IV}(0) r + \dots,$$

$$w^{IV} = w^{IV}(0) + \dots$$

	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	$\frac{P r_m^2}{1000 \pi N}$
	16,005 217	-21,333 333	5,333 333									0
	-3,50000	8,003 423	-6,500 000	2,000 000								0
	0,500 000	-3,312 500	6,503 423	-5,187 500	1,500 000							0
		0,666 667	-3,462 964	6,225 645	-4,759 260	1,333 333						0
			0,750 000	-3,570 313	6,128 423	-4,554 688	1,250 000					0
				0,800 000	-3,644 000	6,083 423	-4,436 000	1,200 000				1
					0,833 333	-3,696 759	6,058 979	-4,358 797	1,166 667			0
						0,857 143	-3,736 152	6,044 239	-4,304 664	1,142 857		0
							0,875 000	-3,766 602	6,034 673	-4,264 648	1,125 000	0
								0,888 889	-3,790 812	4,935 368	-2,030 024	0
									2,000 000	-4,059 658	2,063 071	0

6. Die Auflösung nach Abschn. 29 liefert:

k	Für $c = 10 \text{ kg/cm}^3$											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
w	41,721 844	41,557 311	41,022 914	40,937 339	38,467 969	36,132 603	32,802 740	29,042 026	25,160 666	21,311 919	17,545 764	$\frac{P r_m^2}{1000 \pi N}$
$\bar{p} = c w$	1,428 2	1,422 5	1,404 3	1,370 5	1,316 8	1,236 9	1,122 9	0,994 1	0,861 3	0,729 5	0,600 6	$\frac{P}{r_m^2 \pi}$

Für $c = 200 \text{ kg/cm}^3$

w	1,961 285	2,061 615	2,324 233	2,668 974	2,951 416	2,948 407	2,348 391	1,590 896	0,851 008	0,166 964	-0,481 272	$\frac{P r_m^2}{1000 \pi N}$
$\bar{p} = c w$	1,342 7	1,411 4	1,591 2	1,827 2	2,020 6	2,018 5	1,607 8	1,089 2	0,582 6	0,114 3	-0,329 5	$\frac{P}{r_m^2 \pi}$

Die Zahlenrechnung ist wegen ihrer Fehlerempfindlichkeit mit 6 Stellen durchgeführt worden.
Der Bodendruck \bar{p} ist in Abb. 640a dargestellt.

Daher lautet die Differentialgleichung (968) für den Plattenmittelpunkt $r = 0$

$$w^{IV}(0) + 2w^{IV}(0) - \frac{w^{IV}(0)}{2!} + \frac{w^{IV}(0)}{3!} + \frac{c}{N} w(0) = 0,$$

$$\frac{8}{3} w^{IV}(0) + \frac{c}{N} w(0) = 0,$$

oder in Differenzen ausgedrückt

$$\left(16 + \frac{c s^4}{N}\right) w_0 - \frac{64}{3} w_1 + \frac{16}{3} w_2 = 0.$$

4. Die Vorzahlen der Differenzengleichungen (969).

k	λ_k	$1 - \lambda_k$	$1 + \lambda_k$	$2 - \lambda_k$	$2 + \lambda_k$	λ_k^2	$[]_{k-1}$	$[]_{k+1}$	$6 + 2 \lambda_k^2$
1	1	0	2	1	3	1	3,5	6,5	8
2	0,500	0,500	1,500	1,500	2,500	0,250	3,312500	5,187500	6,5
3	0,333	0,666	1,333	1,666	2,333	0,111	3,462964	4,759260	6,222
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

$$\frac{c s^4}{N} = \frac{10000 \cdot 0,9^4}{1916684} = 0,003432 \quad \text{oder} \quad \frac{200000 \cdot 0,9^4}{1916684} = 0,068462.$$

Mit $p = \frac{P}{2 r_0 \cdot \pi \cdot s} = \frac{10 P}{\pi r_0^2}$ wird für $k = 5$ das Absolutglied $\frac{p_5 s^4}{N} = \frac{P r_0^2}{1000 \pi N}$, die übrigen sind Null.

5. Matrix der Differenzengleichungen (969) für $c = 10 \text{ kg/cm}^3$. (Die Matrix für $c = 200 \text{ kg/cm}^3$ ergibt sich durch Addition von 0,065039 zu den Hauptgliedern.) Die Wurzeln w_{11} und w_{12} sind bereits durch die Randbedingungen eliminiert. Matrix und Auflösung s. S. 669.

7. Die Schnittkräfte. Für $r = 0$ ist

$$M_{r,0} = M_{\alpha,0} = -N(1 + \mu) \frac{d^2 w}{dr^2} = -N(1 + \mu) \frac{2}{s^2} (w_1 - w_0) = +0,0384 \frac{P}{\pi}, \quad \left(-0,0234 \frac{P}{\pi}\right).$$

Mit $\frac{\mu s}{2 r_k} = \frac{1}{12 k}$, $\frac{s}{2 \mu r_k} = \frac{3}{k}$ ist nach (970) z. B.

$$M_{r,1} = -\frac{N}{s^2} \left[\left(1 - \frac{1}{12}\right) \cdot 0 - 2 w_1 + \left(1 + \frac{1}{12}\right) w_2 \right] = 0,043 \frac{P}{\pi}, \quad \left(-0,019 \frac{P}{\pi}\right),$$

$$M_{r,2} = -\frac{N}{s^2} \left[\left(1 - \frac{1}{24}\right) w_1 - 2 w_2 + \left(1 + \frac{1}{24}\right) w_3 \right] = 0,051 \frac{P}{\pi}, \quad \left(-0,011 \frac{P}{\pi}\right).$$

Die eingeklammerten Werte gelten für $c = 200 \text{ kg/cm}^3$.

Die Schnittkräfte sind in Abb. 640b, c dargestellt.

Melan, E.: Die Durchbiegung einer exzentrisch durch eine Einzellast belasteten Kreisplatte. Eisenbau Bd. 11 (1920) S. 190. — Nádai, A.: Die elastischen Platten. Berlin 1925. — Schleicher, F.: Kreisplatten auf elastischer Grundlage. Berlin 1926. — Crämer, H.: Die Beanspruchung von Kreisplatten mit veränderlicher Stärke. Beton u. Eisen 1928 S. 382. — Flügge, W.: Die strenge Berechnung von Kreisplatten unter Einzellasten. Berlin 1928. — Pichler, O.: Die Biegung kreissymmetrischer Platten von veränderlicher Dicke. Berlin 1928. — Haynal-Konyi: Die Berechnung von kreisförmig begrenzten Pilzdecken bei zentralsymmetrischer Belastung. Berlin 1929. — Schmidt, H.: Ein Beitrag zur Theorie der Biegung homogener Kreisplatten. Ing.-Arch. 1930 S. 147.

69. Die Kreisplatte und die Kreisringplatte unter antimetrischer Belastung.

Die antimetrische Belastung ist graphisch durch Abb. 641, analytisch durch

$$p = p_0 \frac{r \cos \alpha}{a} \quad \text{und mit} \quad \frac{r}{a} = \varrho \quad \text{durch} \quad p = p_0 \varrho \cos \alpha \quad (971)$$

beschrieben. Sie kann als der antimetrische Teil der hydraulischen Belastung einer senkrecht oder schräg eingebauten Kreisplatte oder als der antimetrische Teil des