



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Platten mit gleichbleibender Dicke

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

Fällen gelingt. Mit der Funktion $w(x, y)$ sind auch ihre Ableitungen und damit die Schnittkräfte in jedem Punkte der Platte bekannt.

Lévy, M.: C. R. Acad. Sci., Paris Bd. 129 (1899) S. 535. — Estanave, E.: Contribution à l'étude de l'équilibre élastique d'une plaque etc. Paris 1900. — Nadai, A.: Die elastischen Platten. Berlin 1925. — Geckeler, J. W.: Elastostatik. Handb. d. Physik Bd. VI: Mechanik der elastischen Körper, Kap. 3. Berlin 1928. — Bergsträßer, M.: Forsch.-Arbeiten Ing.-Wes. Heft 302. Berlin 1928.

68. Die Kreisplatte und die Kreisringplatte unter zentralsymmetrischer Belastung.

Platten mit gleichbleibender Dicke. Die Punkte der Mittelebene werden mit Rücksicht auf die Begrenzung der Platte auf Polarkoordinaten r, α mit dem Mittelpunkt O als Ursprung bezogen. Die Schnittkräfte der Platte und die Ausbiegung w ihrer Mittelfläche sind daher nach (935) aus der Belastung p bestimmt. Die Beziehungen sind jedoch bei Zentralsymmetrie der Plattenform, der Stützung und Belastung unabhängig vom Winkel α , so daß die Ableitungen der Funktion $w(r, \alpha) \rightarrow w(r)$ nach α Null sind und die partielle Differentialgleichung in eine totale Differentialgleichung übergeht. Die Drillungsmomente $M_{r\alpha} = M_{\alpha r}$ sind daher nach (933) ebenfalls Null. Im übrigen wird nach S. 647

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -N \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \mu \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right), & M_\alpha &= -N \left(\mu \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right), \\ \text{Momentensumme } M &= \frac{M_r + M_\alpha}{1 + \mu} = -N \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = -N \Delta w. \end{aligned} \right\} \quad (945)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen für die äußeren Kräfte an dem Plattenabschnitt Abb. 627 liefern die Beziehungen

$$Q_{rz} = \frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r - M_\alpha}{r} = -N \frac{d}{dr} (\Delta w); \quad \frac{d(r Q_{rz})}{dr} = -p r \quad (946)$$

und mit (945) die Differentialgleichung

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) w = \Delta \Delta w = \frac{p}{N}. \quad (947)$$

Das Ergebnis kann daher in der Form

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + 2 \frac{1}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} = \frac{p}{N} \quad (948)$$

angeschrieben und nach (946) aus dem Ansatz

$$\frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \right] = \frac{p r}{N} \quad (949)$$

abgeleitet werden. Es läßt sich daher mit $\varphi = dw/dr$ auch folgendermaßen ausdrücken:

$$r \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{d\varphi}{dr} - \frac{1}{r} \varphi = r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \varphi) \right] = \frac{1}{N} \left(\int_0^r p r dr + C \right). \quad (950)$$

Die vollständige Lösung der Differentialgleichung 4. Ordnung besteht aus einem partikulären Integral w_0 der inhomogenen Gleichung (947) und aus vier mit den Integrationskonstanten C_1 bis C_4 erweiterten Lösungen w_1 bis w_4 der homogenen Gleichung. Das partikuläre Integral w_0 kann in diesem Falle aus (936), (937) durch eine zweimalige Wiederholung einer doppelten Quadratur bestimmt werden, denn

$$\left. \begin{aligned} r \frac{d^2 M}{dr^2} + \frac{dM}{dr} &= \frac{d}{dr} \left(r \frac{dM}{dr} \right) = -p r, & M &= - \int \frac{dr}{r} \int p r dr, \\ r \frac{d^2 w_0}{dr^2} + \frac{dw_0}{dr} &= \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw_0}{dr} \right) = -\frac{M r}{N}, & w_0 &= - \int \frac{dr}{r} \int \frac{M}{N} r dr. \end{aligned} \right\} \quad (951)$$

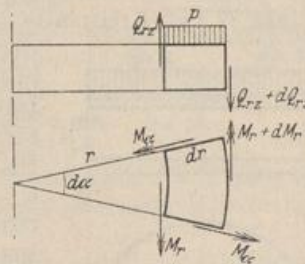


Abb. 627.

Als Lösungen der homogenen Gleichung eignen sich, wie sich leicht durch Einsetzen in (947) prüfen läßt, die folgenden Ansätze:

$$w_1 = 1, \quad w_2 = \left(\frac{r}{a}\right)^2, \quad w_3 = \frac{r^2}{a^2} \ln \frac{r}{a}, \quad w_4 = \ln \frac{r}{a}. \quad (952)$$

a ist der Radius des Plattenrandes (Abb. 628c). Daher lautet die vollständige Lösung von (947) mit $r/a = \varrho$

$$\begin{aligned} w &= w_0 + C_1 + C_2 \varrho^2 + C_3 \varrho^2 \ln \varrho + C_4 \ln \varrho, \\ \frac{dw}{dr} &= \frac{1}{a} \left[\frac{dw_0}{d\varrho} + 2C_2 \varrho + C_3 \varrho (1 + 2 \ln \varrho) + C_4 \frac{1}{\varrho} \right], \\ M_r &= -\frac{N}{a^2} \left\{ \frac{d^2 w_0}{d\varrho^2} + \frac{\mu}{\varrho} \frac{dw_0}{d\varrho} + (1+\mu) \left[2C_2 + C_3 \left(\frac{3+\mu}{1+\mu} + 2 \ln \varrho \right) - C_4 \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{1}{\varrho^2} \right] \right\}, \\ M_\alpha &= -\frac{N}{a^2} \left\{ \mu \frac{d^2 w_0}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dw_0}{d\varrho} + (1+\mu) \left[2C_2 + C_3 \left(\frac{1+3\mu}{1+\mu} + 2 \ln \varrho \right) + C_4 \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{1}{\varrho^2} \right] \right\}, \\ M &= -\frac{N}{a^2} \left[\frac{d^2 w_0}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dw_0}{d\varrho} + 4C_2 + 4C_3 (1 + \ln \varrho) \right], \\ Q_{rz} &= -\frac{N}{a^3} \left(\frac{d^3 w_0}{d\varrho^3} + \frac{d^2 w_0}{\varrho d\varrho^2} - \frac{dw_0}{\varrho^2 d\varrho} + 4C_3 \frac{1}{\varrho} \right). \end{aligned} \quad (953)$$

Der Stützendruck A bei einer zentralsymmetrischen Belastung \mathfrak{P} wird

$$A = \mathfrak{P}/2\pi a. \quad (954)$$

Da jedoch die Durchbiegung w und die Biegemomente M_r, M_α im Mittelpunkt O der Kreisplatte ($\varrho = 0, \ln \varrho = \infty$) für $C_3 \neq 0, C_4 \neq 0$ unendlich groß werden, sind diese Integrationskonstanten des logarithmischen Anteils der Lösung für die Kreisplatte Null. Die Integrationskonstanten C_1, C_2 werden aus den Bedingungen für die Stützung am Plattenrande $r = a, \varrho = 1$ bestimmt. Bei freier Auflagerung des Plattenrandes ist für $\varrho = 1$: $w = 0$ und $M_r = 0$, bei starrer Einspannung des Plattenrandes für $\varrho = 1$: $w = 0, dw/dr = 0$. Bei elastischer Einspannung der Kreisplatte in einem Zylinder besteht die Formänderung aus der Ausbiegung w^* der frei aufgelagerten Platte mit der vorgeschriebenen Belastung p und aus der Ausbiegung Mw^{**} derselben Platte mit einem am Rande angreifenden Einspannungsmoment M (Abb. 628a, b).

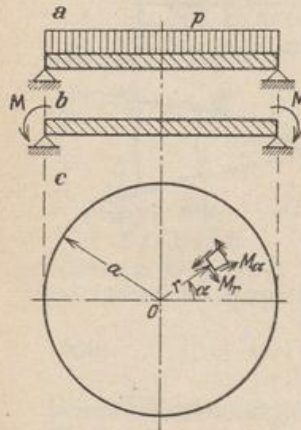


Abb. 628.

$$w = w^* + Mw^{**}. \quad (955)$$

Bei starrer Einspannung mit $M = M_0$ ist für $r = a$ mit $\varrho = 1$

$$\frac{dw}{dr} = \frac{dw^*}{dr} + M_0 \frac{dw^{**}}{dr} = 0 \quad (956)$$

und damit das Einspannungsmoment noch auf andere Weise bestimmt

Die Kreisringplatten werden entweder an beiden Rändern gestützt (Abb. 629a) oder als Kragplatten verwendet. Der freie Rand wird dann mit $r = b, b/a = \beta$, der gestützte Rand mit $r = a, \varrho = 1$ bezeichnet (Abb. 629b, c). Die Platte kann hier wieder frei aufgelagert oder eingespannt sein. Die Formänderung der Kreis-

ringplatte wird durch die vollständige Differentialgleichung mit vier Integrationskonstanten beschrieben. Zu ihrer Berechnung stehen an jedem Rande zwei Bedingungen zur Verfügung. Am freien Rand $\varrho = \beta$ ist $M_r = 0, Q_r = 0$.

Die Kreisplatte vom Durchmesser $2b$ kann außerdem in einem konzentrischen Kreis mit dem Durchmesser $2a$ gestützt sein und daher mit einer Ringplatte von der Breite $b-a$ auskragen. Die äußeren an der Platte angreifenden Kräfte sind dann in $r = a$ unstetig. Die Berechnung zerfällt in die Lösung I für die Formänderung w der Kreisplatte mit den beiden Integrationskonstanten C_1, C_2 und in die Lösung II nach (953) für die Formänderung der Ringplatte von der Breite $(b-a)$ mit vier Integrationskonstanten. Die sechs Integrationskonstanten werden aus den Randbedingungen an der äußeren Begrenzung ($r = b$) mit $M_{b,II} = 0, Q_{bz,II} = 0$ und aus den Bedingungen an dem abgestützten Kreis $r = a$ berechnet. An dieser Stelle ist $w_{a,I} = 0, w_{a,II} = 0, dw_{a,I}/dr = dw_{a,II}/dr$ und $M_{a,I} = M_{a,II}$. Als Kontrolle gilt $Q_{a,I} - Q_{a,II} + \mathfrak{P}/2\pi a = 0$ (Abb. 630) mit \mathfrak{P} als Plattenbelastung. Dasselbe gilt von der Berechnung einer Ringplatte von der Breite $(b-c)$, nur daß in diesem Falle in die Rechnung acht Integrationskonstanten eingehen, die sich aus acht linearen Gleichungen ergeben (Abb. 631). Die Lösung läßt sich bei zentraler Symmetrie naturgemäß leicht auch für die statisch unbestimmte Stützung der Kreis- und Kreisringplatte erweitern.

Die Belastung $\hat{p} = \hat{p}_0$ oder $\hat{p} = \hat{p}(r)$ erstreckt sich über die ganze Breite, über einen Ringstreifen oder als Linienbelastung P über einen ausgezeichneten Breitenkreis der Platte. Die Einzellast P_0 im Ursprung O ist ein Sonderfall. Formänderung und Schnittkräfte der Platte lassen sich in diesem Falle nach den Ansätzen auf S. 650 in dem Bereich um den Plattenmittelpunkt nicht angeben. Unstetigkeiten im Verlauf der zentralsymmetrischen Belastung \hat{p} führen zu einer Unterteilung des Integrationsbereiches. Dasselbe gilt bei einem Wechsel der Plattenstärke. Die

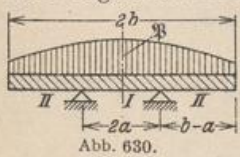


Abb. 630.

Untersuchung beginnt in jedem Falle mit der Berechnung der Integrationskonstanten aus ebenso vielen linearen Gleichungen. Damit ist die Ausbiegung w eindeutig bestimmt. Dasselbe gilt dann auch von den Schnittkräften,

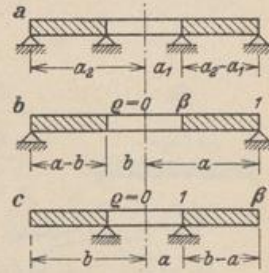


Abb. 629.

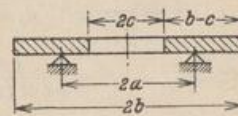


Abb. 631.

die sich nach (953) aus Ableitungen der Funktion w zusammensetzen. Die Lösung ist richtig, wenn sie die Differentialgleichung und die vorgeschriebenen Randbedingungen befriedigt.

Da Kreis- und Kreisringplatten für die konstruktive Ausgestaltung zahlreicher Bauaufgaben verwendet werden, ist das Ergebnis der notwendigen Untersuchungen in den Tabellen 63 u. 64 zusammengefaßt worden. Ihre Anwendung wird wesentlich vereinfacht, wenn die reziproke Poissonsche Zahl μ , die bei Stahl mit 0,25, bei Eisenbeton zwischen 0,16 und 0,10 gemessen ist, vernachlässigt wird. Dies ist in der Regel zulässig.

Die Differentialgleichung vierter Ordnung läßt sich mit (945) ebenso wie in Abschn. 67 in zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung zerlegen

$$\frac{d^2 M}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dM}{dr} = -\hat{p}, \quad \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = -\frac{M}{N} = -w. \quad (957)$$

Da nach (945) und (946)

$$\frac{dM}{dr} = Q_{rz,p} = -\frac{1}{r} \int_0^r \hat{p} r dr, \quad \text{also auch} \quad \frac{dw}{dr} = Q_{rz,w} = -\frac{1}{r} \int_0^r \frac{M}{N} r dr$$

ist, entstehen nach H. Marcus die beiden simultanen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\frac{d^2 M}{dr^2} = - \left[p - \frac{1}{r^2} \int_0^r p r dr \right], \quad \frac{d^2 w}{dr^2} = - \left[\frac{M}{N} - \frac{1}{r^2} \int_0^r \frac{M}{N} r dr \right], \quad (958)$$

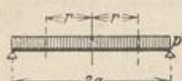
die wiederum eine Analogie zu den Differentialgleichungen der Seilkurve und der Biegelinie des biegeungssteifen Stabes bilden und sich zur Berechnung des Spannungs- und Formänderungszustandes der Kreisplatte ebenfalls eignen.

Tabelle 63. Formänderungen und Schnittkräfte symmetrisch belasteter Kreis- und Kreisringplatten.

$$q = \frac{r}{a}, \quad \beta = \frac{b}{a}, \quad N = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)}, \quad w' = \frac{dw}{dr}.$$

$$\Phi_0 = 1 - q^4, \quad \Phi_1 = 1 - q^2, \quad \Phi_2 = q^2 \ln q, \quad \Phi_3 = \ln q, \quad \Phi_4 = \frac{1}{q^2} - 1.$$

Die Funktionen Φ_0 bis Φ_4 sind in Tabelle 64 enthalten.

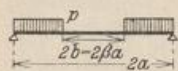


$$w = \frac{p a^4}{64 N (1 + \mu)} [2(3 + \mu) \Phi_1 - (1 + \mu) \Phi_0],$$

$$M_r = \frac{p a^2}{16} (3 + \mu) \Phi_1; \quad M_t = \frac{p a^2}{16} [2(1 - \mu) + (1 + 3\mu) \Phi_1], \quad Q_r = -\frac{p a}{2} q.$$

$$q = 0: \quad w = \frac{p a^4}{64 N} \frac{5 + \mu}{1 + \mu}; \quad M_r = M_t = \frac{p a^2}{16} (3 + \mu),$$

$$q = 1: \quad w' = -\frac{p a^3}{8 N (1 + \mu)}; \quad M_t = \frac{p a^2}{8} (1 - \mu); \quad Q_r = -\frac{p a}{2}.$$



$$\kappa_1 = [(5 + \mu) - (7 + 3\mu) \beta^2] (1 - \beta^2) - 4(1 + \mu) \beta^4 \ln \beta,$$

$$\kappa_2 = [(3 + \mu) - (1 - \mu) \beta^2] (1 - \beta^2) + 4(1 + \mu) \beta^2 \ln \beta.$$

$$q \leq \beta: \quad w = \frac{p a^4}{64 N (1 + \mu)} [\kappa_1 - 2\kappa_2 + 2\kappa_2 \Phi_1], \quad M_r = M_t = \frac{p a^2}{16} \kappa_2, \quad Q_r = 0.$$

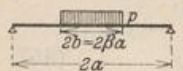
$$q \geq \beta: \quad w = \frac{p a^4}{64 N (1 + \mu)} \{ 2[(3 + \mu)(1 - 2\beta^2) + (1 - \mu)\beta^4] \Phi_1 - (1 + \mu) \Phi_0 - 4(1 + \mu) \beta^4 \Phi_3 - 8(1 + \mu) \beta^2 \Phi_2 \},$$

$$M_r = \frac{p a^2}{16} [(3 + \mu) \Phi_1 - (1 - \mu) \beta^4 \Phi_4 + 4(1 + \mu) \beta^2 \Phi_3], \quad Q_r = -\frac{p a}{2} \left(q - \frac{\beta^2}{q} \right),$$

$$M_t = \frac{p a^2}{16} [(1 + 3\mu) \Phi_1 + (1 - \mu) \beta^4 \Phi_4 + 4(1 + \mu) \beta^2 \Phi_3 + 2(1 - \mu)(1 - \beta^2)^2].$$

$$q = 0: \quad w = \frac{p a^4}{64 N (1 + \mu)} \kappa_1.$$

$$q = 1: \quad w' = -\frac{p a^3}{8 N (1 + \mu)} (1 - \beta^2)^2, \quad M_t = \frac{p a^2}{8} (1 - \mu)(1 - \beta^2)^2, \quad Q_r = -\frac{p a}{2} (1 - \beta^2).$$



$$\kappa_1 = 4 - (1 - \mu) \beta^2, \quad \kappa_2 = [\kappa_1 - 4(1 + \mu) \ln \beta] \beta^2,$$

$$\kappa_3 = 4(3 + \mu) - (7 + 3\mu) \beta^2 + 4(1 + \mu) \beta^2 \ln \beta.$$

$$q \leq \beta: \quad w = \frac{p a^4}{64 N} \left\{ 1 + [4 - 5\beta^2 + 4(2 + \beta^2) \ln \beta] \beta^2 + 2 \frac{\kappa_2}{1 + \mu} \Phi_1 - \Phi_0 \right\}, \quad Q_r = -\frac{p a}{2} q.$$

$$M_r = \frac{p a^2}{16} [\kappa_2 - (3 + \mu) + (3 + \mu) \Phi_1], \quad M_t = \frac{p a^2}{16} [\kappa_2 - (1 + 3\mu) + (1 + 3\mu) \Phi_1].$$