



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Zahlenbeispiel

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

Platte am Punkte m kann also in Verbindung mit den Bemerkungen auf S. 129 folgendermaßen angeschrieben werden:

$$\begin{aligned}
 & + \Delta^2 \bar{\varphi}_m + s a_m \Delta \bar{\varphi}_m - s^2 b_m \bar{\varphi}_m = K_m s^2, \\
 - \bar{\varphi}_{m-1} \left(1 - \frac{s a_m}{2}\right) + \bar{\varphi}_m (2 + s^2 b_m) - \bar{\varphi}_{m+1} \left(1 + \frac{s a_m}{2}\right) &= -K_m s^2, \quad (965) \\
 & m = 0 \dots n.
 \end{aligned}$$

Der Ansatz enthält $(n + 3)$ unbekannte Wurzeln φ_m in $(n + 1)$ linearen Gleichungen, die daher noch durch die Randbedingungen für $r = r_i$ und $r = r_a$ ergänzt werden müssen. Bei freien oder frei aufliegenden Rändern ist $M_i = 0$, $M_a = 0$, bei eingespannten Rändern $\varphi_i = 0$, $\varphi_a = 0$, bei der Kreisplatte außerdem $\varphi_i = 0$. Der Kern der Matrix enthält in jeder Zeile 3 unbekannte Wurzeln, die daher nach Abschn. 29 oder durch Iteration nach Abschn. 30 berechnet werden.

Die Schnittkräfte sind

$$\left. \begin{aligned}
 M_r &= -\frac{N}{N_0} \left(\frac{d\bar{\varphi}}{dr} + \frac{\mu}{r} \bar{\varphi} \right) \rightarrow -\frac{v_{1,m}}{2s} \left(\bar{\varphi}_{m+1} + \frac{2s\mu}{r_m} \bar{\varphi}_m - \bar{\varphi}_{m-1} \right), \\
 M_\alpha &= -\frac{N}{N_0} \left(\mu \frac{d\bar{\varphi}}{dr} + \frac{1}{r} \bar{\varphi} \right) \rightarrow -\frac{\mu v_{1,m}}{2s} \left(\bar{\varphi}_{m+1} + \frac{2s}{\mu r_m} \bar{\varphi}_m - \bar{\varphi}_{m-1} \right), \\
 Q_r &= -\frac{N}{N_0} \left(\frac{d^2 \bar{\varphi}}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \bar{\varphi} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{\varphi}}{dr} \right) + \frac{dN}{N_0 dr} \left(\frac{d\bar{\varphi}}{dr} + \frac{\mu}{r} \bar{\varphi} \right) \\
 &\rightarrow -\frac{v_{1,m}}{s^2} \left[\left(1 + \frac{s}{2r_m} - \frac{s}{2} \frac{v_{2,m}}{v_{1,m}}\right) \varphi_{m+1} \right. \\
 &\quad \left. - \left(2 + \frac{s^2}{r_m^2} + \mu \frac{s^2}{r_m} \frac{v_{2,m}}{v_{1,m}}\right) \varphi_m \right. \\
 &\quad \left. + \left(1 - \frac{s}{2r_m} + \frac{s}{2} \frac{v_{2,m}}{v_{1,m}}\right) \varphi_{m-1} \right].
 \end{aligned} \right\} \quad (966)$$

Die Verformung der Platte folgt aus $d w / dr = \bar{\varphi} / N_0$ zu

$$w_{m+0,5} = w_{m-0,5} + \frac{\bar{\varphi}_m}{N_0} s. \quad (967)$$

Berechnung der Gründungsplatte für einen Schornstein.

1. Geometrische Grundlagen. Abmessungen der Platte nach Abb. 637.

$$h_0 = h_6 = 2,2 \text{ m}, \quad h_{10} = 1,5 \text{ m}.$$

Intervallbreite $s = r_a / 10 = 0,9 \text{ m}$. Im schrägen Teil der Platte ist

$$h_m = h_6 - (h_6 - h_{10}) \frac{m-6}{n-6} = 2,2 - 0,175(m-6),$$

$$n = 10, \quad m = 6 \div 10.$$

$$\mu = \frac{1}{6}, \quad N_0 = \frac{2100000 \cdot 2,2^3}{12 \cdot (1 - 0,028)} = 1918000 \text{ tm}^2/\text{m}.$$

2. Belastung. Ringförmige Belastung P nach Abb. 637 a. Der Bodendruck $\bar{p} = P / r_a^2 \pi$ wird gleichmäßig verteilt angenommen.

3. Vorzeichen der Differenzgleichungen (965) nach (964)

$$v_1 = \frac{h^3}{h_0^3}, \quad v_2 = \frac{1}{h_0^3} \frac{d}{dr} (h^3) = \frac{3 h^2}{h_0^3} \frac{1}{s} \frac{d}{dm} (h), \quad (\text{Abb. 637 b})$$

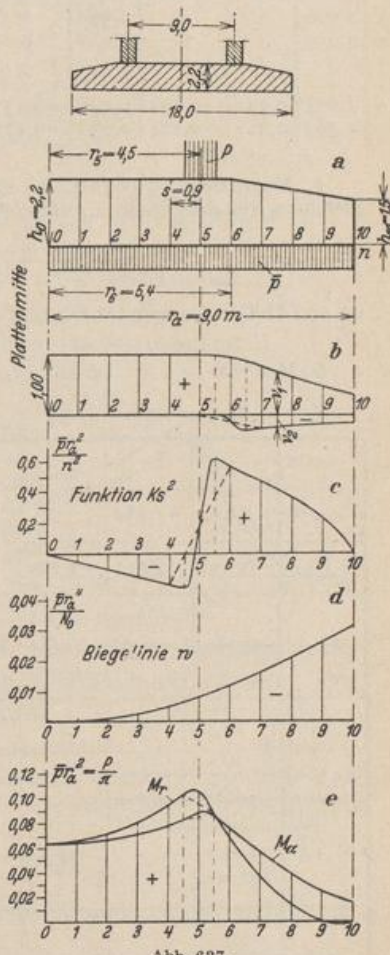


Abb. 637.

$$0 \leq m \leq 6: \quad v_{1,m} = 1, \quad v_{2,m} = 0,$$

$$6 \leq m \leq 10: \quad v_{1,m} = \frac{h_m^3}{10,65}, \quad v_{2,m} = -0,0548 \frac{h_m^2}{n^2}.$$

$$\frac{s a_m}{2} = \frac{1}{2m} + 0,45 \frac{v_2}{v_1},$$

$$s^2 b_m = \frac{1}{m^2} - \frac{0,15}{m} \frac{v_2}{v_1}.$$

Für freien Innenrand ($r_i = 0$) ist nach S. 664 $C = 0$ und daher nach (964)

$$K s^2 = \frac{s^2}{r_1 r} \int_0^r p r dr.$$

$$0 \leq m \leq 5: \quad K_m s^2 = -\bar{p} r_a^3 \frac{m}{2 v_1 n^3}, \quad 5 \leq m \leq 10: \quad K_m s^2 = -\bar{p} r_a^3 \frac{1}{2 v_1 n^3} \left(m - \frac{n^2}{m} \right).$$

An den Unstetigkeitsstellen $m = 5$ und 6 werden die Funktionswerte v_1, v_2, K_m nach Abb. 637 c festgesetzt.

m	h	$v_{1,m}$	$v_{2,m}$	$\frac{1}{2m}$	$0,45 \frac{v_2}{v_1}$	$\frac{s a_m}{2}$	$\frac{1}{m^2}$	$0,15 \frac{v_2}{m v_1}$	$s^2 b_m$	$\frac{m}{2 v_1 n}$	$\frac{n}{2 v_1 m}$	$K_m s^2$
1	2,200	1	0	0,500	0	0,500	1	0	1	0,050	—	$-0,050 \cdot \bar{p} r_a^3 / n^2$
2	2,200	1	0	0,250	0	0,250	0,250	0	0,250	0,100	—	$-0,100 \cdot \bar{p} r_a^3 / n^2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
9	1,675	0,441	-0,154	0,056	-0,157	-0,213	0,012	-0,006	0,018	1,022	1,261	$-0,239 \cdot \bar{p} r_a^3 / n^2$
10	1,500	0,317	-0,124	0,050	-0,175	-0,225	0,010	-0,006	0,016	1,579	1,579	0

4. Randbedingungen. In Plattenmitte ist $\varphi_0 = 0$, daher wird die erste Differenzgleichung für den Punkt 1 aufgestellt. Bei $m = 10$ ist $M_{10} = 0$, so daß nach (966)

$$\bar{\varphi}_{11} + \frac{2s\mu}{r_{10}} \bar{\varphi}_{10} - \bar{\varphi}_9 = \bar{\varphi}_{11} + 0,0333 \bar{\varphi}_{10} - \bar{\varphi}_9 = 0$$

ist und 11 Gleichungen für die 11 Unbekannten $\bar{\varphi}_m, m = 1 \dots 11$ zur Verfügung stehen.

5. Matrix der Differenzgleichungen (965) nach Elimination von φ_{11} .

$\bar{\varphi}_1$	$\bar{\varphi}_2$	$\bar{\varphi}_3$	$\bar{\varphi}_4$	$\bar{\varphi}_5$	$\bar{\varphi}_6$	$\bar{\varphi}_7$	$\bar{\varphi}_8$	$\bar{\varphi}_9$	$\bar{\varphi}_{10}$	$\frac{\bar{p} r_a^3}{n^2}$
3,000	-1,500									0,050
-0,750	2,250	-1,250								0,100
	-0,833	2,111	-1,167							0,150
		-0,875	2,063	-1,125						0,200
			-0,900	2,040	-1,100					-0,167
				-1,134	2,031	-0,866				-0,561
					-1,201	2,027	-0,799			-0,466
						-1,204	2,022	-0,796		-0,367
							-1,213	2,018	-0,787	-0,239
								-2,000	2,042	0

Die Auflösung nach Abschn. 29 liefert

$\bar{\varphi}_1$	$\bar{\varphi}_2$	$\bar{\varphi}_3$	$\bar{\varphi}_4$	$\bar{\varphi}_5$	$\bar{\varphi}_6$	$\bar{\varphi}_7$
-0,54941	-1,13216	-1,78824	-2,55517	-3,47254	-4,19757	-4,64943
			$\bar{\varphi}_8$	$\bar{\varphi}_9$	$\bar{\varphi}_{10}$	$\bar{\varphi}_{11}$
			-4,90251	-4,95976	-4,85775	-4,79800
						$\frac{\bar{p} r_a^3}{n^2}$

6. Die Verformung der Platte. Nach (967) ist für die Zwischenpunkte $w_{m+0,5} = w_{m-0,5} + \bar{\varphi}_m s/N_0$. Die Verformung wird mit $w_{0,5} = 0$ auf den Plattenmittelpunkt bezogen, so daß mit

$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}^* \bar{p} r_a^3 / n^2; \quad w_{m+0,5} = \frac{\bar{p} r_a^4}{n^3 N_0} \sum \bar{\varphi}^*. \quad \text{Abb. 637 d.}$$

$w_{0,5}$	$w_{1,5}$	$w_{2,5}$	$w_{3,5}$	$w_{4,5}$	$w_{5,5}$	$w_{6,5}$	$w_{7,5}$	$w_{8,5}$	$w_{9,5}$	$w_{10,5}$	
0	-0,5494	-1,6816	-3,4698	-6,0250	-9,4975	-13,6951	-18,3445	-23,2470	-28,2008	-33,0645	$\frac{\bar{p} r_a^4}{1000 N_0}$

7. Die Schnittkräfte. Mit $r_m/s = m$ und $r_a/s = n$ wird aus (966)

$$M_{r,m} = -\frac{r_{1,m}}{2n} \left(\bar{\varphi}_{m+1}^* + \frac{1}{3m} \bar{\varphi}_m^* - \bar{\varphi}_{m-1}^* \right) \bar{p} r_a^2.$$

$$M_{\alpha,m} = -\frac{r_{1,m}}{12n} \left(\bar{\varphi}_{m+1}^* + \frac{12}{m} \bar{\varphi}_m^* - \bar{\varphi}_{m-1}^* \right) \bar{p} r_a^2.$$

In Plattenmitte ist $\bar{\varphi}_0 = 0$, $\left(\frac{\bar{\varphi}_m}{m}\right)_{m \rightarrow 0} \approx \bar{\varphi}_1$, $\bar{\varphi}_{-1} = -\bar{\varphi}_1$.

Z. B. ist

$$M_{r,0} = -\frac{1}{20} \left(-0,54941 - \frac{1}{3} \cdot 0,54941 - 0,54941 \right) \bar{p} r_a^2 = 0,0641 \bar{p} r_a^2 \text{ mt.}$$

$$M_{r,1} = -\frac{1}{20} \left(-1,13216 - \frac{1}{3} \cdot 0,54941 + 0 \right) \bar{p} r_a^2 = 0,0658 \bar{p} r_a^2 \text{ mt.}$$

$$M_{r,2} = -\frac{1}{20} \left(-1,78824 - \frac{1}{6} \cdot 1,13216 + 0,54941 \right) \bar{p} r_a^2 = 0,0714 \bar{p} r_a^2 \text{ mt.}$$

Die Momente sind in Abb. 637e dargestellt. Positive Momente erzeugen auf der Plattenunterseite Zugspannungen. Im Lastbereich wird die Momentenlinie parabelförmig ergänzt.

Um ein Urteil über die Genauigkeit der Differenzmethode zu bekommen, sind die Momente M_r der Gründungsplatte mit gleichbleibender Dicke $h = 2,2$ m für eine Intervallteilung $n = 6$ und $n = 10$ berechnet und in Abb. 638 mit den Werten der exakten Berechnung ($n = \infty$) nach Tabelle 63 verglichen worden.

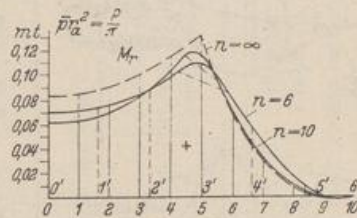


Abb. 638.

Kreisplatte mit gleichbleibender Dicke auf elastischer Bettung. Die äußeren Kräfte bestehen aus der Auflast $\bar{p}(r)$ und dem Bodendruck $\bar{p}(r)$, der nach den Angaben auf S. 17 proportional zur Einsenkung w der Platte gesetzt werden soll ($\bar{p} = cw$). Daher besteht zwischen dem Verschiebungszustand w und den äußeren Kräften nach (948) folgende Differentialbeziehung:

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + 2 \frac{1}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} + \frac{c}{N} w = \frac{\bar{p}}{N}. \quad (968)$$

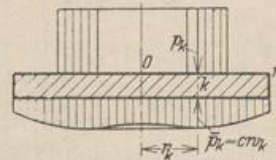


Abb. 639.

Sie besitzt auch Bedeutung für $\bar{p} = 0$, um den Verschiebungszustand w für vorgeschriebene Randkräfte $M_{r=r_n}$, $Q_{r=r_n}$ anzugeben.