UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Kreisplatte mit gleichbleibender Dicke auf elastischer Bettung

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

Visual Library

Die Auflösung nach Abschn. 29 liefert

$\overline{\varphi}_1$	$\overline{\varphi}_2$	$\overline{\varphi}_3$	$\overline{\varphi}_4$	$\overline{\varphi}_5$	$\overline{\varphi}_6$	$\overline{\varphi}_7$
−0,54941	−1,13216	−1,78824	−2,55517	−3,47254	−4,19757	−4,64943

6. Die Verformung der Platte. Nach (967) ist für die Zwischenpunkte $w_{m+0,5} = w_{m-0,5} + \overline{\varphi}_m\, s/N_0$. Die Verformung wird mit $w_{0,5} = 0$ auf den Plattenmittelpunkt bezogen, so daß mit

$\overline{\varphi}_8$	$\overline{\varphi}_9$	$\overline{\varphi}_{10}$	$\overline{\varphi}_{11}$	
−4,90251	−4,95976	−4,85775	−4,79800	$\dfrac{\overline{p}\, r_a^3}{n^2}$

$$\overline{\varphi} = \overline{\varphi}^* \overline{p}\, r_a^3/n^2: \qquad w_{m+0,5} = \frac{\overline{p}\, r_a^4}{n^3 N_0} \sum \overline{\varphi}^*. \qquad \text{Abb. 637d.}$$

$w_{0,5}$	$w_{1,5}$	$w_{2,5}$	$w_{3,5}$	$w_{4,5}$	$w_{5,5}$	$w_{6,5}$	$w_{7,5}$	$w_{8,5}$	$w_{9,5}$	$w_{10,5}$	
0	−0,5494	−1,6816	−3,4698	−6,0250	−9,4975	−13,6951	−18,3445	−23,2470	−28,2068	−33,0645	$\dfrac{\overline{p}\, r_a^4}{1000\, N_0}$

7. Die Schnittkräfte. Mit $r_m/s = m$ und $r_a/s = n$ wird aus (966)

$$M_{r,m} = -\frac{\nu_{1,m}}{2n}\left(\overline{\varphi}^*_{m+1} + \frac{1}{3m}\,\overline{\varphi}^*_m - \overline{\varphi}^*_{m-1}\right)\overline{p}\, r_a^2,$$

$$M_{\alpha,m} = -\frac{\nu_{1,m}}{12n}\left(\overline{\varphi}^*_{m+1} + \frac{12}{m}\,\varphi^*_m - \overline{\varphi}^*_{m-1}\right)\overline{p}\, r_a^2.$$

In Plattenmitte ist $\overline{\varphi}_0 = 0$, $\left(\dfrac{\overline{\varphi}_m}{m}\right)_{m\to 0} \approx \overline{\varphi}_1$, $\overline{\varphi}_{-1} = -\overline{\varphi}_1$.

Z. B. ist

$$M_{r,0} = -\frac{1}{20}\left(-0{,}54941 - \frac{1}{3}\,0{,}54941 - 0{,}54941\right)\overline{p}\, r_a^2 = 0{,}0641\,\overline{p}\, r_a^2 \text{ mt},$$

$$M_{r,1} = -\frac{1}{20}\left(-1{,}13216 - \frac{1}{3}\,0{,}54941 + 0\right)\overline{p}\, r_a^2 \qquad = 0{,}0658\,\overline{p}\, r_a^2 \text{ mt},$$

$$M_{r,2} = -\frac{1}{20}\left(-1{,}78824 - \frac{1}{6}\,1{,}13216 + 0{,}54941\right)\overline{p}\, r_a^2 = 0{,}0714\,\overline{p}\, r_a^2 \text{ mt}.$$

Die Momente sind in Abb. 637e dargestellt. Positive Momente erzeugen auf der Plattenunterseite Zugspannungen. Im Lastbereich wird die Momentenlinie parabelförmig ergänzt.

Um ein Urteil über die Genauigkeit der Differenzenmethode zu bekommen, sind die Momente M_r der Gründungsplatte mit gleichbleibender Dicke $h = 2{,}2$ m für eine Intervallteilung $n = 6$ und $n = 10$ berechnet und in Abb. 638 mit den Werten der exakten Berechnung ($n = \infty$) nach Tabelle 63 verglichen worden.

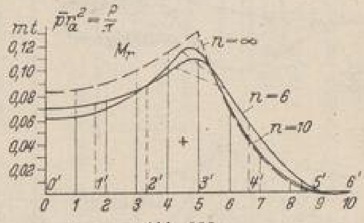

Abb. 638.

Kreisplatte mit gleichbleibender Dicke auf elastischer Bettung. Die äußeren Kräfte bestehen aus der Auflast $p(r)$ und dem Bodendruck $\overline{p}(r)$, der nach den Angaben auf S. 17 proportional zur Einsenkung w der Platte gesetzt werden soll ($\overline{p} = cw$). Daher besteht zwischen dem Verschiebungszustand w und den äußeren Kräften nach (948) folgende Differentialbeziehung:

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + 2\,\frac{1}{r}\,\frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\,\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\,\frac{dw}{dr} + \frac{c}{N}\,w = \frac{p}{N}. \qquad (968)$$

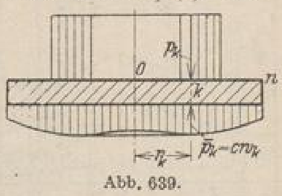

Abb. 639.

Sie besitzt auch Bedeutung für $p = 0$, um den Verschiebungszustand w für vorgeschriebene Randkräfte $M_{r=r_n}$, $Q_{r=r_n}$ anzugeben.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Um den geometrischen Zusammenhang in einfacher Weise zu klären, werden die Differentialquotienten hier ebenfalls durch Differenzenquotienten ersetzt. Dabei zerfällt der Integrationsbereich wiederum in n Stufen mit der konstanten Breite s. Für den Punkt k mit $r = r_k$, $s/r_k = \lambda_k$ und $p = p_k$ entsteht folgende Gleichung k $(k = 0, \ldots, n)$,

$$(1-\lambda_k)\,w_{k-2} - \left[2(2-\lambda_k) + \frac{\lambda_k^2}{2}(2+\lambda_k)\right] w_{k-1} + \left[6 + 2\lambda_k^2 + \frac{c\,s^4}{N}\right] w_k$$
$$- \left[2(2+\lambda_k) + \frac{\lambda_k^2}{2}(2-\lambda_k)\right] w_{k+1} + (1+\lambda_k)\,w_{k+2} = \frac{p_k\,s^4}{N}. \qquad (969)$$

Die Wurzeln w_k des Ansatzes werden entweder mit dem Gaußschen Algorithmus nach S. 216ff. oder durch Iteration einer Anfangslösung nach Abschn. 30 berechnet. Die fehlenden Gleichungen liefern die Randbedingungen. Die Schnittkräfte sind dann aus den Verschiebungen w_k folgendermaßen bestimmt:

$$\left.\begin{aligned}
M_{r,k} &= -\frac{N}{s^2}\left(\Delta^2 w_k + \mu\frac{s}{r_k}\Delta w_k\right) = -\frac{N}{s^2}\left[w_{k+1}\left(1+\frac{\mu s}{2r_k}\right) - 2w_k + w_{k-1}\left(1-\frac{\mu s}{2 r_k}\right)\right],\\
M_{\alpha,k} &= -\frac{N\mu}{s^2}\left(\Delta^2 w_k + \frac{s}{\mu r_k}\Delta w_k\right) = -\frac{N\mu}{s^2}\left[w_{k+1}\left(1+\frac{s}{2\mu r_k}\right) - 2w_k + w_{k-1}\left(1-\frac{s}{2\mu r_k}\right)\right],\\
Q_{rz,k} &= -\frac{N}{s^3}\left(\Delta^3 w_k + \frac{s}{r_k}\Delta^2 w_k - \frac{s^2}{r_k^2}\Delta w_k\right)\\
&= -\frac{N}{2s^3}\left[w_{k+2} - w_{k+1}(2-2\lambda_k+\lambda_k^2) - 4\lambda_k w_k + w_{k-1}(2+2\lambda_k+\lambda_k^2) - w_{k-2}\right].
\end{aligned}\right\} \quad (970)$$

Berechnung der Gründungsplatte für einen Schornstein unter Berücksichtigung der elastischen Bettung.

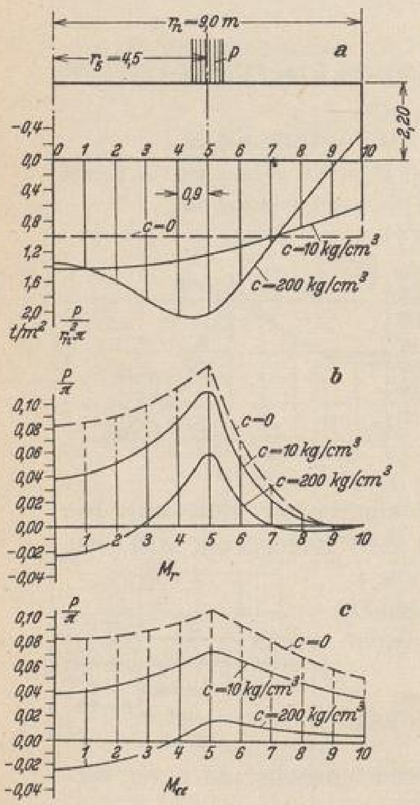

Abb. 640.

1. Geometrische Grundlagen. Abmessungen der Platte nach Abb. 640. Mit $\mu = 1/6$, $E = 2100000$ t/m² ist nach S. 645

$$N = \frac{2100000 \cdot 2{,}2^3}{12\,(1 - 0{,}0278)} = 1916684 \text{ tm}^2/\text{m}.$$

2. Belastung. Die senkrechte Belastung P durch den Schornstein verteilt sich auf einen Ring von der Breite s und dem mittleren Radius $r_5 = 4{,}5$ m. Der Bodendruck wird nach S. 17 mit $\bar{p} = c\,w$ angenommen. Der Leitwert c liegt zwischen 10 und 200 kg/cm³, so daß die Rechnung für beide Grenzwerte durchgeführt wird.

3. Die Randbedingungen. Am Rand $r = r_{10}$ ist $M_{r,10} = 0$, $Q_{rz,10} = 0$; daher nach (970) mit $s = 0{,}9$, $r_{10} = 9{,}0$, $\lambda_{10} = 0{,}1$

$$1{,}0083\,w_{11} - 2\,w_{10} + 0{,}9917\,w_9 = 0,$$
$$w_{12} - 1{,}81\,w_{11} - 0{,}40\,w_{10} + 2{,}21\,w_9 - w_8 = 0.$$

In Plattenmitte ist aus Symmetriegründen $w_{-1} = w_1$, $w_{-2} = w_2$. Die Glieder der Differentialgleichung (968) werden für den Plattenmittelpunkt mit $r = 0$ unbestimmt, so daß sich die erste Differenzengleichung (969) für $k = 0$ erst nach einem Grenzübergang anschreiben läßt. Nach der Taylorentwicklung ist in der Umgebung des Mittelpunktes

$$w = w(0) + \frac{w''(0)}{2!}\,r^2 + \frac{w^{IV}(0)}{4!}\,r^4 + \cdots,$$
$$w' = w''(0)\,r + \frac{w^{IV}(0)}{3!}\,r^3 + \cdots,$$
$$w'' = w''(0) + \frac{w^{IV}(0)}{2!}\,r^2 + \cdots, \qquad w''' = w^{IV}(0)\,r + \cdots,$$
$$w^{IV} = w^{IV}(0) + \cdots.$$