



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

69. Die Kreisplatte und die Kreisringplatte unter antimetrischer Belastung

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

Daher lautet die Differentialgleichung (968) für den Plattenmittelpunkt $r = 0$

$$w^{IV}(0) + 2w^{IV}(0) - \frac{w^{IV}(0)}{2!} + \frac{w^{IV}(0)}{3!} + \frac{c}{N}w(0) = 0,$$

$$\frac{8}{3}w^{IV}(0) + \frac{c}{N}w(0) = 0,$$

oder in Differenzen ausgedrückt

$$\left(16 + \frac{cs^4}{N}\right)w_0 - \frac{64}{3}w_1 + \frac{16}{3}w_2 = 0.$$

4. Die Vorzahlen der Differenzgleichungen (969).

k	λ_k	$1 - \lambda_k$	$1 + \lambda_k$	$2 - \lambda_k$	$2 + \lambda_k$	λ_k^2	$[]_{k-1}$	$[]_{k+1}$	$6 + 2\lambda_k^2$
1	1	0	2	1	3	1	3,5	6,5	8
2	0,500	0,500	1,500	1,500	2,500	0,250	3,312500	5,187500	6,5
3	0,333	0,666	1,333	1,666	2,333	0,111	3,462964	4,759260	6,222
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

$$\frac{cs^4}{N} = \frac{10000 \cdot 0,9^4}{1916684} = 0,003432 \quad \text{oder} \quad \frac{200000 \cdot 0,9^4}{1916684} = 0,068462.$$

Mit $p = \frac{P}{2r_s \cdot \pi \cdot s} = \frac{10P}{\pi r_s^2}$ wird für $k = 5$ das Absolutglied $\frac{p_5 s^4}{N} = \frac{P r_s^2}{1000 \pi N}$, die übrigen sind Null.

5. Matrix der Differenzgleichungen (969) für $c = 10 \text{ kg/cm}^3$. (Die Matrix für $c = 200 \text{ kg/cm}^3$ ergibt sich durch Addition von 0,065039 zu den Hauptgliedern.) Die Wurzeln w_{11} und w_{12} sind bereits durch die Randbedingungen eliminiert. Matrix und Auflösung s. S. 669.

7. Die Schnittkräfte. Für $r = 0$ ist

$$M_{r,0} = M_{\alpha,0} = -N(1 + \mu) \frac{d^2w}{dr^2} = -N(1 + \mu) \frac{2}{s^2}(w_1 - w_0) = +0,0384 \frac{P}{\pi}, \quad \left(-0,0234 \frac{P}{\pi}\right).$$

Mit $\frac{\mu s}{2r_k} = \frac{1}{12k}$, $\frac{s}{2\mu r_k} = \frac{3}{k}$ ist nach (970) z. B.

$$M_{r,1} = -\frac{N}{s^2} \left[\left(1 - \frac{1}{12}\right) \cdot 0 - 2w_1 + \left(1 + \frac{1}{12}\right)w_2 \right] = 0,043 \frac{P}{\pi}, \quad \left(-0,019 \frac{P}{\pi}\right),$$

$$M_{r,2} = -\frac{N}{s^2} \left[\left(1 - \frac{1}{24}\right)w_1 - 2w_2 + \left(1 + \frac{1}{24}\right)w_3 \right] = 0,051 \frac{P}{\pi}, \quad \left(-0,011 \frac{P}{\pi}\right).$$

Die eingeklammerten Werte gelten für $c = 200 \text{ kg/cm}^3$.

Die Schnittkräfte sind in Abb. 640b, c dargestellt.

Melan, E.: Die Durchbiegung einer exzentrisch durch eine Einzellast belasteten Kreisplatte. Eisenbau Bd. 11 (1920) S. 190. — Nádai, A.: Die elastischen Platten. Berlin 1925. — Schleicher, F.: Kreisplatten auf elastischer Grundlage. Berlin 1926. — Crämer, H.: Die Beanspruchung von Kreisplatten mit veränderlicher Stärke. Beton u. Eisen 1928 S. 382. — Flügge, W.: Die strenge Berechnung von Kreisplatten unter Einzellasten. Berlin 1928. — Pichler, O.: Die Biegung kreissymmetrischer Platten von veränderlicher Dicke. Berlin 1928. — Haynal-Konyi: Die Berechnung von kreisförmig begrenzten Pilzdecken bei zentralsymmetrischer Belastung. Berlin 1929. — Schmidt, H.: Ein Beitrag zur Theorie der Biegung homogener Kreisplatten. Ing.-Arch. 1930 S. 147.

69. Die Kreisplatte und die Kreisringplatte unter antimetrischer Belastung.

Die antimetrische Belastung ist graphisch durch Abb. 641, analytisch durch

$$p = p_0 \frac{r \cos \alpha}{a} \quad \text{und mit} \quad \frac{r}{a} = \varrho \quad \text{durch} \quad p = p_0 \varrho \cos \alpha \quad (971)$$

beschrieben. Sie kann als der antimetrische Teil der hydraulischen Belastung einer senkrecht oder schräg eingebauten Kreisplatte oder als der antimetrische Teil des

Bodendruckes \bar{p} eines Kreisplattenfundamentes angesehen werden, dessen Steifigkeit die Annahme des Gradliniengesetzes für \bar{p} rechtfertigt. Die Ordinaten der Biegefläche sind in diesem Falle von dem Winkel α abhängig, so daß sich die Beziehungen zwischen Belastung, Formänderung und Beanspruchung der Platte nur durch den allgemeinen Ansatz auf S. 647 beschreiben lassen.

Die Lösung der Differentialgleichung (935) besteht aus einem partikulären Integral der inhomogenen Gleichung und aus vier mit den Integrationskonstanten C_1, \dots, C_4 erweiterten Lösungen der homogenen Gleichung. Sie läßt sich daher in der folgenden Form anschreiben:

$$w = C(\varrho^5 + C_1\varrho^3 + C_2\varrho + C_3\varrho \ln \varrho + C_4\varrho^{-1}) \cos \alpha, \quad (972)$$

denn

$$A \Delta w = \frac{192}{a^4} C \varrho \cos \alpha = \frac{p_0 \varrho \cos \alpha}{N}, \quad \text{wenn } C = \frac{p_0 a^4}{192 N}. \quad (973)$$

Die Integrationskonstanten sind durch die Randbedingungen der Aufgabe bestimmt. Die Lösung vereinfacht sich für Kreisplatten, da C_3 und C_4 Null sein müssen, damit die Ausbiegung w für $\varrho = 0$ endlich bleibt. Sie lautet in diesem Falle nach S. 650 folgendermaßen:

$$\begin{aligned} w &= \frac{p_0 a^4}{192 N} (\varrho^5 + C_1 \varrho^3 + C_2 \varrho) \cos \alpha, & \frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{p_0 a^3}{192 N} (5 \varrho^4 + 3 C_1 \varrho^2 + C_2) \cos \alpha, \\ M_r &= -\frac{p_0 a^2}{192} [4(5 + \mu) \varrho^3 + 2(3 + \mu) C_1 \varrho] \cos \alpha, \\ M_\alpha &= -\frac{p_0 a^2}{192} [4(1 + 5\mu) \varrho^3 + 2(1 + 3\mu) C_1 \varrho] \cos \alpha, \\ M_{rz} &= \frac{p_0 a^2}{192} (1 - \nu) (4 \varrho^3 + 2 C_1 \varrho) \sin \alpha, \\ Q_r &= -\frac{p_0 a}{96} (36 \varrho^2 + 4 C_1) \cos \alpha, & Q_\alpha &= \frac{p_0 a}{96} (12 \varrho^3 + 4 C_1 \varrho) \sin \alpha, \\ A_r &= \frac{p_0 a}{192} [4(17 + \nu) \varrho^2 + 2(3 + \nu) C_1] \cos \alpha. \end{aligned} \quad (974)$$

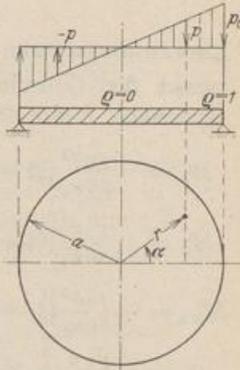


Abb. 641.

Freie Auflagerung am Rande $\varrho = 1$: $w = 0, M_r = 0$.

$$\left. \begin{aligned} 1 + C_1 + C_2 &= 0, & 4(5 + \mu) + 2(3 + \mu) C_1 &= 0, \\ C_1 &= -2 \frac{5 + \mu}{3 + \mu}, & C_2 &= \frac{7 + \mu}{3 + \mu}. \end{aligned} \right\} \quad (975)$$

Einspannung am Rande $\varrho = 1$: $w = 0, \partial w / \partial r = 0$.

$$\left. \begin{aligned} 1 + C_1 + C_2 &= 0, & 5 + 3 C_1 + C_2 &= 0. \\ C_1 &= -2, & C_2 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (976)$$

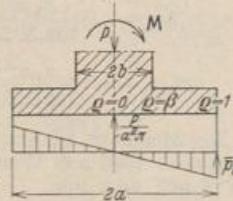


Abb. 642.

Bei einer Kreisringplatte sind die Integrationskonstanten C_3 und C_4 der allgemeinen Lösung von Null verschieden und durch die Randbedingungen $M_r = 0, A_r = 0$ am freien Rande bestimmt. Bei einer Gründungsplatte, die sich aus einer Kreisringplatte und einem starren Kern zusammensetzt (Abb. 642), genügen 3 Randbedingungen. Für $\varrho = 1$ sind M_r und A_r Null, während die Verdrehung der Elemente an der inneren Begrenzung der Ringplatte ($r = b, \varrho = b/a = \beta$) durch die Verdrehung des starren Kerns vorgeschrieben ist.

$$\frac{dw}{dr} = \frac{w}{b} \quad \text{oder} \quad \frac{dw}{d\varrho} = \frac{w}{\beta}. \quad (977)$$

Aus diesen drei Bedingungsgleichungen wird mit den Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} (3 + \mu) + (1 - \mu) \beta^4 &= \kappa_1, & 4(2 + \mu) + (1 - \mu)(3 + \beta^4) \beta^2 &= \kappa_2, \\ 4(2 + \mu) \beta^4 - (3 + \mu)(3 + \beta^4) \beta^2 &= \kappa_3, \\ C_1 &= -2 \frac{\kappa_2}{\kappa_1}, & C_3 &= 12, & C_4 &= -2 \frac{\kappa_3}{\kappa_1}. \end{aligned} \right\} (978)$$

Liefere die äußeren Kräfte an dem Tragwerk ein Moment M in bezug auf den Mittelpunkt der Gründungsplatte, so ist $\bar{p}_0 = 4M/\pi a^3$ (Abb. 642). Das Ergebnis der Rechnung lautet dann folgendermaßen:

$$\left. \begin{aligned} M_r &= \frac{\bar{p}_0 a^2}{48 \kappa_1} \{ (5 + \mu) \kappa_1 \varrho^3 - (3 + \mu) \kappa_2 \varrho + 3(1 + \mu) \kappa_1 \varrho^{-1} - (1 - \mu) \kappa_3 \varrho^{-3} \} \cos \alpha, \\ M_\alpha &= \frac{\bar{p}_0 a^2}{48 \kappa_1} \{ (1 + 5\mu) \kappa_1 \varrho^3 - (1 + 3\mu) \kappa_2 \varrho + 3(1 + \mu) \kappa_1 \varrho^{-1} + (1 - \mu) \kappa_3 \varrho^{-3} \} \cos \alpha, \\ M_{r,\alpha} &= -\frac{\bar{p}_0 a^2}{48 \kappa_1} (1 - \mu) \{ \kappa_1 \varrho^3 - \kappa_3 \varrho + 3 \kappa_1 \varrho^{-1} + \kappa_3 \varrho^{-3} \} \sin \alpha, \\ Q_r &= \frac{\bar{p}_0 a}{24} (9 \varrho^2 - 2 \frac{\kappa_2}{\kappa_1} - 3 \varrho^{-2}) \cos \alpha, \\ Q_\alpha &= -\frac{\bar{p}_0 a}{24} (3 \varrho^3 - 2 \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \varrho + 3 \varrho^{-1}) \sin \alpha. \end{aligned} \right\} (979)$$

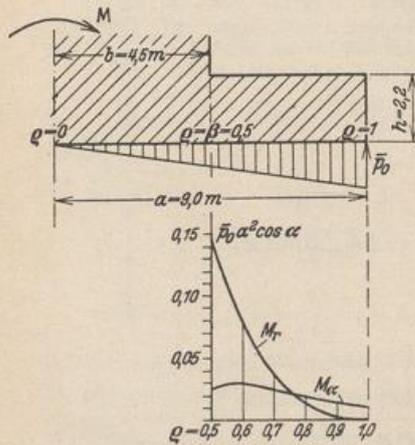


Abb. 643.

Berechnung der Gründungsplatte eines Schornsteins für antimetrische Belastung.

1. Geometrische Grundlagen. Abmessungen der Platte nach Abb. 643. Der mittlere Teil, auf dem der Schornstein aufsitzt, wird als starr angenommen.

2. Belastung. Die Belastung besteht aus dem Moment M infolge Winddruck auf den Schornstein. Der Bodendruck wird geradlinig und antimetrisch angesetzt

$$\bar{p}_0 = 4M/\pi a^3.$$

3. Die Schnittkräfte. Nach (978) ist mit

$$\mu = 1/6: \quad \kappa_1 = 3,2188, \quad \kappa_2 = 9,3048, \quad \kappa_3 = -1,8827.$$

Damit wird nach (979)

$$M_r = \frac{\bar{p}_0 a^2}{154,5024} (16,6306 \varrho^3 - 29,4655 \varrho + 11,2661 \varrho^{-1} + 1,5689 \varrho^{-3}) \cos \alpha,$$

$$M_\alpha = \frac{\bar{p}_0 a^2}{154,5024} (5,9010 \varrho^3 - 13,9572 \varrho + 11,2661 \varrho^{-1} - 1,5689 \varrho^{-3}) \cos \alpha,$$

$$M_{r,\alpha} = -\frac{\bar{p}_0 a^2}{178,2651} (3,2188 \varrho^3 + 1,8827 \varrho + 9,6564 \varrho^{-1} - 1,8827 \varrho^{-3}) \sin \alpha.$$

Die Momente M_r und M_α sind in Abb. 643 dargestellt. Das vollständige Kräftebild infolge zentrischer Last und Winddruck ergibt sich nach Abb. 642 durch Superposition der Ergebnisse von S. 665 oder 668.

Flügge, W.: Kreisplatten mit linear veränderlichen Belastungen. Bauing. 1929 S. 221.

70. Die rechteckige Platte.

Die Platte mit rechteckiger Begrenzung wird im Bauwesen selten einzeln, sondern in der Regel als Teil zusammenhängender Konstruktionen verwendet. Die Ränder der einfachen Platte sind entweder kräftefrei, eingespannt oder frei drehbar