



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

70. Die rechteckige Platte

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

Aus diesen drei Bedingungsgleichungen wird mit den Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} (3 + \mu) + (1 - \mu) \beta^4 &= \kappa_1, & 4(2 + \mu) + (1 - \mu)(3 + \beta^4) \beta^2 &= \kappa_2, \\ 4(2 + \mu) \beta^4 - (3 + \mu)(3 + \beta^4) \beta^2 &= \kappa_3, \\ C_1 &= -2 \frac{\kappa_2}{\kappa_1}, & C_3 &= 12, & C_4 &= -2 \frac{\kappa_3}{\kappa_1}. \end{aligned} \right\} (978)$$

Liefere die äußeren Kräfte an dem Tragwerk ein Moment M in bezug auf den Mittelpunkt der Gründungsplatte, so ist $\bar{p}_0 = 4M/\pi a^3$ (Abb. 642). Das Ergebnis der Rechnung lautet dann folgendermaßen:

$$\left. \begin{aligned} M_r &= \frac{\bar{p}_0 a^2}{48 \kappa_1} \{ (5 + \mu) \kappa_1 \varrho^3 - (3 + \mu) \kappa_2 \varrho + 3(1 + \mu) \kappa_1 \varrho^{-1} - (1 - \mu) \kappa_3 \varrho^{-3} \} \cos \alpha, \\ M_\alpha &= \frac{\bar{p}_0 a^2}{48 \kappa_1} \{ (1 + 5\mu) \kappa_1 \varrho^3 - (1 + 3\mu) \kappa_2 \varrho + 3(1 + \mu) \kappa_1 \varrho^{-1} + (1 - \mu) \kappa_3 \varrho^{-3} \} \cos \alpha, \\ M_{r,\alpha} &= -\frac{\bar{p}_0 a^2}{48 \kappa_1} (1 - \mu) \{ \kappa_1 \varrho^3 - \kappa_3 \varrho + 3 \kappa_1 \varrho^{-1} + \kappa_3 \varrho^{-3} \} \sin \alpha, \\ Q_r &= \frac{\bar{p}_0 a}{24} (9 \varrho^2 - 2 \frac{\kappa_2}{\kappa_1} - 3 \varrho^{-2}) \cos \alpha, \\ Q_\alpha &= -\frac{\bar{p}_0 a}{24} (3 \varrho^3 - 2 \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \varrho + 3 \varrho^{-1}) \sin \alpha. \end{aligned} \right\} (979)$$

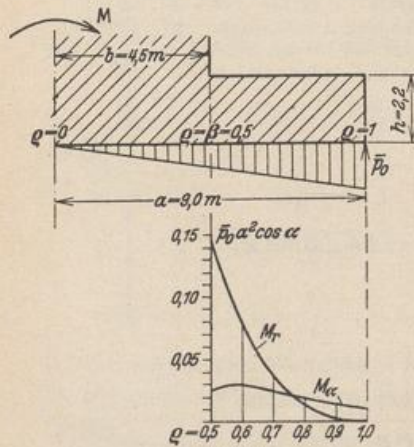


Abb. 643.

Berechnung der Gründungsplatte eines Schornsteins für antimetrische Belastung.

1. Geometrische Grundlagen. Abmessungen der Platte nach Abb. 643. Der mittlere Teil, auf dem der Schornstein aufsitzt, wird als starr angenommen.

2. Belastung. Die Belastung besteht aus dem Moment M infolge Winddruck auf den Schornstein. Der Bodendruck wird geradlinig und antimetrisch angesetzt

$$\bar{p}_0 = 4M/\pi a^3.$$

3. Die Schnittkräfte. Nach (978) ist mit

$$\mu = 1/6: \quad \kappa_1 = 3,2188, \quad \kappa_2 = 9,3048, \quad \kappa_3 = -1,8827.$$

Damit wird nach (979)

$$M_r = \frac{\bar{p}_0 a^2}{154,5024} (16,6306 \varrho^3 - 29,4655 \varrho + 11,2661 \varrho^{-1} + 1,5689 \varrho^{-3}) \cos \alpha,$$

$$M_\alpha = \frac{\bar{p}_0 a^2}{154,5024} (5,9010 \varrho^3 - 13,9572 \varrho + 11,2661 \varrho^{-1} - 1,5689 \varrho^{-3}) \cos \alpha,$$

$$M_{r,\alpha} = -\frac{\bar{p}_0 a^2}{178,2651} (3,2188 \varrho^3 + 1,8827 \varrho + 9,6564 \varrho^{-1} - 1,8827 \varrho^{-3}) \sin \alpha.$$

Die Momente M_r und M_α sind in Abb. 643 dargestellt. Das vollständige Kräftebild infolge zentrischer Last und Winddruck ergibt sich nach Abb. 642 durch Superposition der Ergebnisse von S. 665 oder 668.

Flügge, W.: Kreisplatten mit linear veränderlichen Belastungen. Bauing. 1929 S. 221.

70. Die rechteckige Platte.

Die Platte mit rechteckiger Begrenzung wird im Bauwesen selten einzeln, sondern in der Regel als Teil zusammenhängender Konstruktionen verwendet. Die Ränder der einfachen Platte sind entweder kräftefrei, eingespannt oder frei drehbar

aufgelagert, so daß Zug- und Druckkräfte auf den Unterbau übertragen werden (Abb. 644). Die Oberfläche erhält in der Regel gleichförmige Belastung, bei Verwendung der Platten im Behälterbau auch hydrostatische Belastung.

Die Biegesteifigkeit der Platte ist bei homogenem und isotropem Baustoff in jeder Richtung die gleiche. Die Beziehungen auf S. 646 zwischen der vorgeschrie-

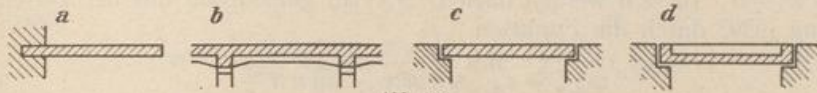


Abb. 644.

benen Belastung $p(x,y)$ und den Ordinaten $w(x,y)$ der ausgebogenen Mittelebene lassen sich jedoch auch auf Platten mit verschiedener Biegesteifigkeit in der Längs- und Querrichtung erweitern. Der Nachweis der Formänderung von Eisenbetonplatten oberhalb der Reißlast im Sinne des Stadiums II der Festigkeit ist ausgeschlossen.

Die Untersuchung des Spannungs- und Verschiebungszustandes besteht bei homogenem und isotropem Baustoff und den Annahmen auf S. 644 in der Integration der partiellen Differentialgleichung (929) für vorgeschriebene Randbedingungen an den Kanten $x = 0, x = a, y = 0, y = b$ (Abb. 645). Das Ergebnis kann in der Regel nur als Reihenentwicklung angegeben werden, deren Brauchbarkeit für die Zahlenrechnung nicht allein von der Konvergenz der Reihe $w(x,y)$ selbst, sondern auch von der Konvergenz ihrer Ableitungen abhängt. Damit scheidet Näherungslösungen aus, welche nur die Durchbiegung, aber nicht die Krümmung der elastischen Fläche ausreichend beschreiben. Brauchbare Lösungen sind von L. Navier, A. Nadai, H. Hencky und einigen französischen Mathematikern angegeben worden. Sie bestehen entweder aus Gliedern $w_h(x,y), h = 1, \dots, \infty$, welche die Differentialgleichung (929) und die Randbedingungen für den Anteil $p_h(x,y)$ der vorgeschriebenen Belastung $p = \sum p_h, h = 1, \dots, \infty$ erfüllen oder aus einer partikulären Lösung w^* der inhomogenen Gleichung, welche die Randbedingungen nur teilweise befriedigt und in einer Lösung w^{**} der homogenen Gleichung $\Delta \Delta w^{**} = 0$, die mit w^* überlagert, das gesuchte Ergebnis darstellt.

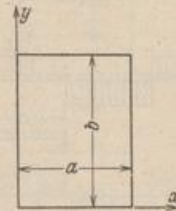


Abb. 645.

Der Plattenstreifen unter einer Belastung $p(x)$. Der Plattenstreifen ist in den Kanten $x = 0$ und $x = a$ gestützt (Abb. 646). Die Ableitungen der Durchbiegung w nach y sind Null, so daß aus (929) folgende Beziehung entsteht.

$$d^4 w / d x^4 = p(x) / N. \tag{980}$$

Die Lösung kann nach Abschn. 20 für die frei drehbare Auflagerung des Streifens unmittelbar angeschrieben werden.

a) Gleichförmige Belastung

$$w = \frac{p a^4}{24 N} \left(\frac{x}{a} - 2 \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^4}{a^4} \right). \tag{981}$$

b) Hydrostatische Belastung (Abb. 646)

$$w = \frac{p_0 a^4}{360 N} \left(7 \frac{x}{a} - 10 \frac{x^3}{a^3} + 3 \frac{x^5}{a^5} \right). \tag{982}$$



Abb. 646.

Die rechteckige Platte mit frei drehbarer Auflagerung der Kanten. Die Platte ist in den Punkten $y \neq 0, x = 0$ oder $x = a$ und $x \neq 0, y = 0$ oder $y = b$ gestützt. Die Durchbiegung w und ihre Ableitung Δw sind hier nach S. 647 Null. Die Biegemomente verschwinden an den Rändern, die Krümmung ist hier nach zwei winkelrechten Richtungen Null. Die Tangentialebene fällt also in den Ecken mit

der ursprünglichen Mittelebene zusammen. Die elastische Fläche zeigt daher von den Ecken ausgehende Grate, in denen die Krümmung und daher auch die Biegemomente groß sind. Die größten Auflagerkräfte A_{x_2} , A_{y_2} in Kantenmitte sind bei gleichmäßiger Belastung vom Seitenverhältnis a/b der Platte nahezu unabhängig ($0,42pa$ bis $0,5pa$, a die kleinere Rechteckseite). Die Randbedingungen $w = 0$, $\Delta w = 0$ werden nach L. Navier gemeinsam mit der Differentialgleichung (929) durch die Funktion

$$w_{m,n} = c_{m,n} \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b} \quad (983)$$

für die Belastung

$$p(x,y)_{m,n} = N c_{m,n} \pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b} \quad (984)$$

erfüllt, wie sich an Hand der Gleichung (929) nachweisen läßt. Da nun jede Belastung $p(x,y)$ über die Kanten der Platte hinaus nach beiden Seiten periodisch fortgesetzt werden kann (Abb. 647), ohne die Randbedingungen $w = 0$, $\Delta w = 0$ zu verletzen, so kann sie nach Fourier in eine trigonometrische Doppelreihe entwickelt werden.

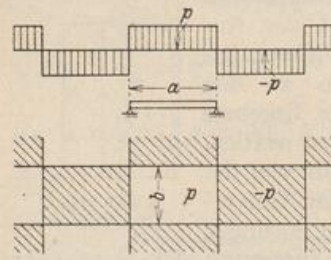


Abb. 647.

$$p(x,y) = \sum \sum a_{m,n} \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}. \quad (985)$$

Die Koeffizienten sind nach bekannten mathematischen Regeln

$$a_{m,n} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a p(x,y) \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b} dx dy. \quad (986)$$

Daher ist bei gleichförmiger Belastung p der ganzen Platte

$$a_{m,n} = \frac{16 p_0}{m n \pi^2} \quad (m, n = 1, 3, 5, \dots). \quad (987)$$

Die gliedweise Gegenüberstellung von (984) mit (985) liefert $c_{m,n}$ und damit

$$w = \frac{16 p_0}{N \pi^6} \sum_m \sum_n \frac{\sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}}{m n \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}. \quad (988)$$

In dieser Reihe wird zuerst $m = 1$ und $n = 1, 3, 5$ usw., darauf $m = 3$ und $n = 1, 3, 5$ usw. eingesetzt, so daß die Buchstaben m und n der Reihe nach alle ungeraden Zahlen durchlaufen. Leider konvergiert die Reihe $\sum w_{m,n}$ mit ihren Ableitungen nur bei gleichförmiger Belastung p der Oberfläche schnell genug, um darnach numerisch zu rechnen. Sie ist neuerdings von V. Lewe zur Untersuchung von Pilzdecken verwendet worden, indem die äußeren an der Platte angreifenden Kräfte aus der Auflast und der über die Fläche des Pilzkopfes gleichmäßig verteilten Stützkraft ähnlich wie nach (988) in eine trigonometrische Doppelreihe entwickelt werden.

Um Lösungen zu erhalten, welche die Differentialgleichung (929) für eine vorgeschriebene Belastung $p(x)$ streng erfüllen und nur aus einfachen und besser konvergierenden Reihen bestehen, addiert A. Nadai zur Durchbiegung w^* des Plattenstreifens mit den Randbedingungen der Platte für $x = 0$ und $x = a$ die Durchbiegung w^{**} einer Platte mit Randkräften, welche die homogene Gleichung $\Delta w^{**} = 0$ erfüllt und gemeinsam mit w^* die für w vorgeschriebenen Randbedingungen an allen vier Kanten befriedigt.

Bei gleichförmiger Belastung p und frei drehbarer Stützung in $x = 0, x = a$ ist nach (981)

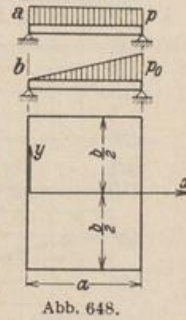
$$w^* = \frac{p a^4}{24 N} \left(\frac{x}{a} - 2 \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^4}{a^4} \right) = \frac{4 p a^4}{N \pi^5} \sum \frac{1}{n^5} \sin \frac{n \pi x}{a} \quad (n = 1, 3, 5, \dots). \quad (989)$$

Der Ansatz

$$w^{**} = \sum Y_n \sin \frac{n \pi x}{a} \quad \text{mit} \quad Y_n = f_n(y) \quad (990)$$

erfüllt die Randbedingungen $w^{**} = 0, \Delta w^{**} = 0$ in $x = 0$ und $x = a$ und die Differentialgleichung $\Delta \Delta w^{**} = 0$ für

$$Y_n = a_n \operatorname{Cof} \frac{n \pi y}{a} + b_n \frac{n \pi y}{a} \operatorname{Sin} \frac{n \pi y}{a} + c_n \operatorname{Sin} \frac{n \pi y}{a} + d_n \frac{n \pi y}{a} \operatorname{Cof} \frac{n \pi y}{a}, \quad (991)$$



da jedes einzelne Glied eine Lösung der biharmonischen Gleichung ist. Die Freiwerte a_n, b_n, c_n, d_n ($n = 1, \dots, \infty$) werden so bestimmt, daß die Funktion $w = w^* + w^{**}$ die vier Randbedingungen für $y = \pm b/2$ befriedigt (Abb. 648). Bei Symmetrie der Stützung genügen die in y geraden Funktionen der allgemeinen Lösung w^{**} . Das Ergebnis lautet nach A. Nadai mit

$$\xi_n = \frac{n \pi x}{a}, \quad \eta_n = \frac{n \pi y}{a}, \quad \alpha_n = \frac{n \pi b}{2a}, \quad (992)$$

$$w = \frac{4 p a^4}{N \pi^5} \sum \frac{1}{n^5} \left[1 - \frac{2 \operatorname{Cof} \alpha_n \operatorname{Cof} \eta_n + \alpha_n \operatorname{Sin} \alpha_n \operatorname{Cof} \eta_n - \eta_n \operatorname{Sin} \eta_n \operatorname{Cof} \alpha_n}{1 + \operatorname{Cof} 2 \alpha_n} \right] \sin \xi_n \quad (993)$$

$(n = 1, 3, 5, \dots)$.

Bei hydrostatischer Belastung (Abb. 648b) $p = p_0 x/a$ ist

$$w = \frac{2 p_0 a^4}{N \pi^5} \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^5} \left[1 - \frac{(2 + \alpha_n \operatorname{Tg} \alpha_n) \operatorname{Cof} \eta_n - \eta_n \operatorname{Sin} \eta_n}{2 \operatorname{Cof} \alpha_n} \right] \sin \xi_n. \quad (994)$$

Die Reihen konvergieren schnell, so daß bereits das erste Glied als Näherung genügt. Mit $w(x, y)$ sind nach S. 645 auch die Schnittkräfte $M_x, M_y, M_{xy}, Q_{xz}, Q_{yz}$ und die Stützkkräfte A_{xz}, A_{yz} der Platte bestimmt, so daß Richtung und Größe der Hauptbiegungs- und Hauptdrillungsmomente berechnet und darauf die Trajektorien und die Linien gleichen Hauptmomentes aufgetragen werden können. Um daran das Wesen der Plattenbiegung zu studieren, ist die Zahlenrechnung für zwei Platten unter gleichförmiger Belastung mit dem Seitenverhältnis 1 : 1 und 3 : 4 ausgeführt worden (s. S. 677). In Abb. 649 sind die Biegemomente M_x, M_y in den Symmetrieachsen der rechteckigen Platten mit dem Seitenverhältnis $b/a = 1; 1,5; 2$ für $\mu = 1/4$ dargestellt. Die Abhängigkeit der Momente und der Durchbiegung von dem Seitenverhältnis zeigt nach A. Nadai für $\mu = 3/10$ Abb. 650.

Der gleichmäßig belastete Halbstreifen ist ein Sonderfall der rechteckig begrenzten Platte mit $b \gg a$ und von A. Nadai in der gleichen Weise untersucht worden. Das Ergebnis ist hier wiedergegeben, um damit später andere Aufgaben zu lösen.

a) Die drei Seiten des Halbstreifens liegen frei auf (Abb. 651a)

$$w = \frac{4 p a^4}{N \pi^5} \sum \left[1 - \left(1 + \frac{\eta_n}{2} \right) e^{-\eta_n} \right] \frac{1}{n^5} \sin \xi_n, \quad (n = 1, 3, 5, \dots). \quad (995)$$

b) Die Längsseiten des Halbstreifens liegen frei auf, die kurze Seite ist frei (Abb. 651b)

$$w = \frac{4 p a^4}{N \pi^5} \sum \left[1 + \frac{\mu}{3 + \mu} \left(\frac{1 + \mu}{1 - \mu} - \eta_n \right) e^{-\eta_n} \right] \frac{1}{n^5} \sin \xi_n, \quad (n = 1, 3, 5, \dots). \quad (996)$$

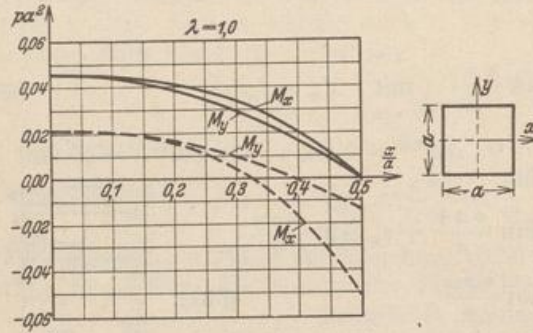
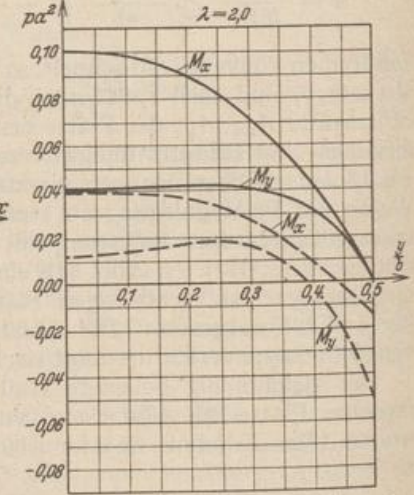
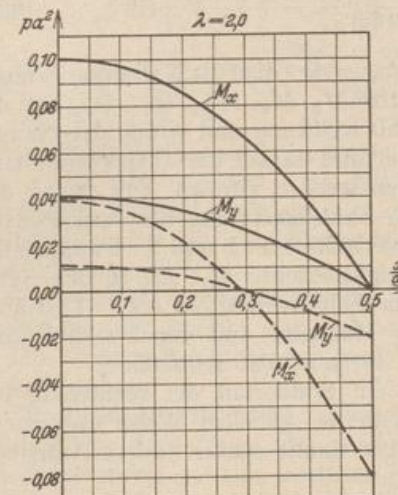
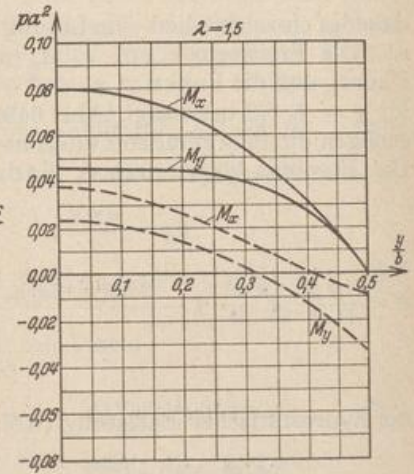
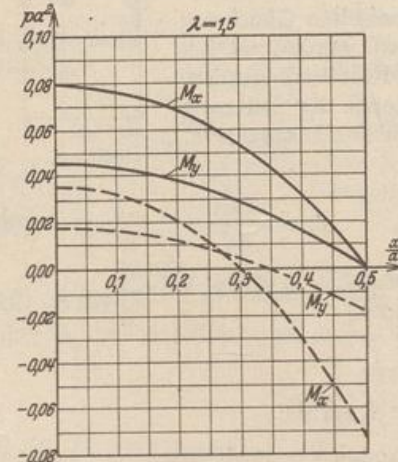


Abb. 649.

Biegemomente M_x und M_y
für rechteckige Platten mit
 $b/a = \lambda = 1,0, 1,5, 2,0$.
 $\mu = 1/4$.

Frei aufliegende Platten ———
Eingespannte Platten - - - - -



c) Die Längsseiten des Halbstreifens liegen frei auf, die kurze Seite ist eingespannt (Abb. 651c)

$$w = \frac{4 p a^4}{N \pi^5} \sum \left[1 - (1 + \eta_n) e^{-\eta_n} \right] \frac{1}{n^5} \sin \xi_n, \quad (n = 1, 3, 5, \dots). \quad (997)$$

Berechnung einer rechteckigen Platte nach A. Nadai.

Untersucht wird eine rechteckige Platte mit $b/a = 4/3$ unter gleichmäßig verteilter Belastung p . Mit der Abkürzung

$$\Phi_n = 2 \cos \alpha_n \cos \eta_n + \alpha_n \sin \alpha_n \cos \eta_n - \eta_n \sin \eta_n \cos \alpha_n$$

wird nach (993) die Durchbiegung

$$w = 0,01307 \frac{p a^4}{N} \sum \frac{1}{n^5} \left[1 - \frac{\Phi_n}{1 + \cos 2 \alpha_n} \right] \sin \xi_n, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

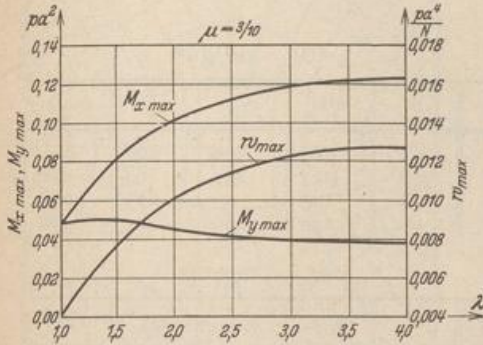


Abb. 650. Biegemomente $M_{x \max}$, $M_{y \max}$ und Durchbiegung w_{\max} der frei aufliegenden, rechteckigen Platte mit gleichmäßig verteilter Last p als Funktionen des Seitenverhältnisses $b/a = \lambda$.

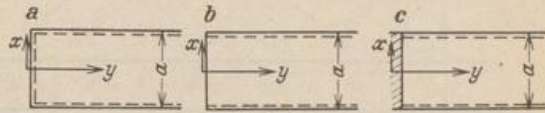


Abb. 651.

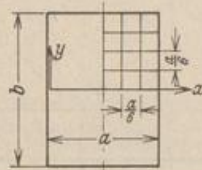


Abb. 652.

Die $10^{-5} p a^4 / N$ fachen Ordinaten w in den Punkten eines Gitters (Abb. 652) mit $\frac{a}{12} = \frac{b}{16}$ sind

$x \backslash y$	0	$a/12$	$a/6$	$a/4$	$a/3$	$5a/12$	$a/2$	$7a/12$
$a/2$	663	651	618	563	487	389	273	141
$7a/12$	641	631	599	545	471	377	264	138
$2a/3$	578	569	540	492	426	341	239	125
$3a/4$	476	468	445	406	351	281	198	103
$5a/6$	339	334	317	289	250	201	142	73
$11a/12$	176	174	165	151	131	105	74	38

Die Schnittkräfte werden nach (919) mit

$$M'_x = p x(a - x)/2, \quad M'_y = \mu p x(a - x)/2;$$

$$M_x = M'_x + (1 - \mu) p a^2 \pi^2 \sum n^2 \sin \xi_n \left[a_n \cos \eta_n + b_n \left(\eta_n \sin \eta_n - \frac{2\mu}{1 - \mu} \cos \eta_n \right) \right],$$

$$M_y = M'_y - (1 - \mu) p a^2 \pi^2 \sum n^2 \sin \xi_n \left[a_n \cos \eta_n + b_n \left(\eta_n \sin \eta_n + \frac{2}{1 - \mu} \cos \eta_n \right) \right],$$

$$M_{xy} = - (1 - \mu) p a^2 \pi^2 \sum n^2 \cos \xi_n \left[a_n \sin \eta_n + b_n \left(\eta_n \cos \eta_n + \sin \eta_n \right) \right],$$

worin

$$a_n = - \frac{2(2 + \alpha_n \mathfrak{E} \alpha_n)}{n^5 \pi^3 \cos \alpha_n}, \quad b_n = \frac{2}{n^5 \pi^3 \cos \alpha_n}, \quad \mu = 1/6.$$

$$a_1 = -0,0063928; \quad a_3 = -8,3204 \cdot 10^{-7}; \quad b_1 = 0,0015856; \quad b_3 = 1,0045 \cdot 10^{-7}.$$

$x \backslash y$	0	$a/6$	$a/3$	$a/2$	0	$a/6$	$a/3$	$a/2$
$a/2$	0,0672	0,0630	0,0501	0,0288	0,0421	0,0413	0,0376	0,0266
$2a/3$	0,0611	0,0573	0,0458	0,0264	0,0370	0,0363	0,0332	0,0239
$5a/6$	0,0405	0,0382	0,0313	0,0189	0,0223	0,0219	0,0203	0,0152

$$M_{xy} / p a^2$$

$x \backslash y$	$a/6$	$a/3$	$a/2$	$2a/3$
$2a/3$	0,0068	0,0141	0,0187	0,0210
$5a/6$	0,0120	0,0250	0,0343	0,0390
a	0,0140	0,0293	0,0407	0,0479

Damit ergeben sich nach (921) die Richtung und Größe der Hauptbiegungsmomente M_I u. M_{II} und die Hauptdrillungsmomente $M_{I,II}$.

$$M_I \cdot 10^4 / p a^2$$

$x \backslash y$	0	$a/6$	$a/3$	$a/2$	$2a/3$	0	$a/6$	$a/3$	$a/2$	$2a/3$
$a/2$	672	630	501	288	0	421	413	376	266	0
$2a/3$	611	593	544	439	210	370	343	247	64	-210
$5a/6$	495	445	503	514	390	223	155	13	-173	-390
a	0	140	279	407	479	0	-140	-279	-407	-479

$$\alpha^0$$

$x \backslash y$	0	$a/6$	$a/3$	$a/2$	$2a/3$	0	$a/6$	$a/3$	$a/2$	$2a/3$
$a/2$	0	0	0	0	0	126	109	63	11	0
$2a/3$	0	16,5	32,5	43	45	121	125	148	188	210
$5a/6$	0	28	38,5	43	45	91	145	245	343	390
a	0	45	45	45	45	0	140	279	407	479

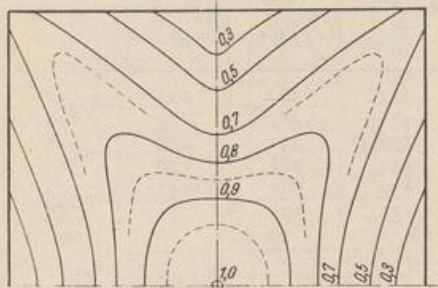


Abb. 653. Linien gleicher M_I .

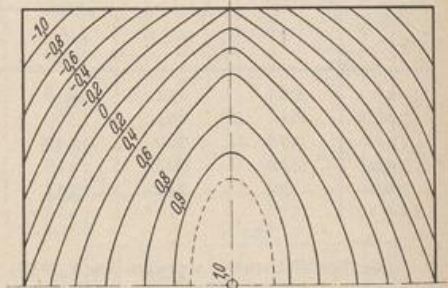


Abb. 654. Linien gleicher M_{II} .

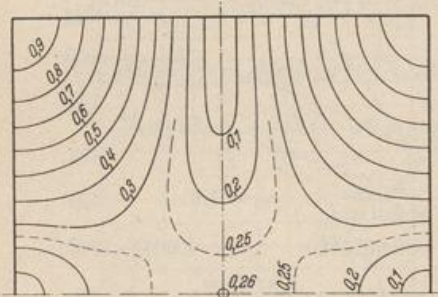


Abb. 655. Linien gleicher $M_{I,II}$.

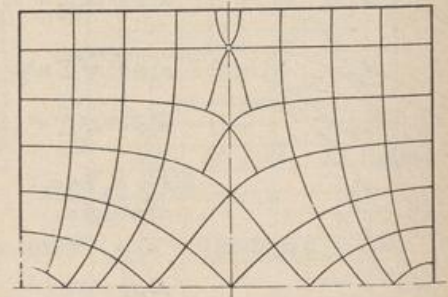


Abb. 656. Trajektorien der Hauptdrillungsmomente.

Die Linien gleicher Hauptmomente sind in Abb. 653 bis 655 dargestellt, ihre Bezifferung bedeutet den Bruchteil des größten Momentes. Abb. 656 zeigt die Trajektorien der Hauptdrillungsmomente, Abb. 657 die Trajektorien der Hauptbiegungsmomente, die in Abb. 658 mit denjenigen der quadratischen Platte verglichen werden. Der Mittelpunkt der quadratischen

Platte ist mit $M_x = M_y$ ein singulärer Punkt, in dem sich 4 Trajektorien schneiden. Die rechteckige Platte hat zwei singuläre Punkte auf der langen Symmetrieachse, in denen sich je 3 Trajektorien schneiden.

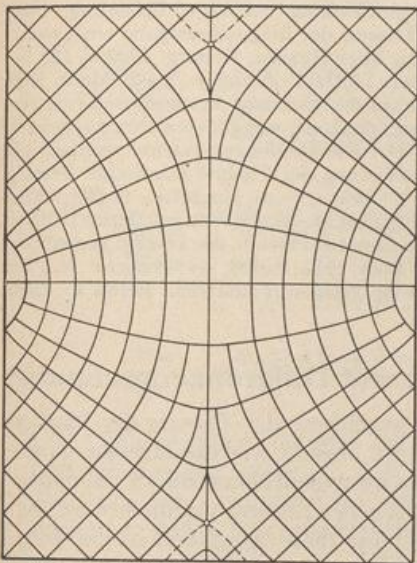


Abb. 657. Trajektorien der Hauptbiegemomente.

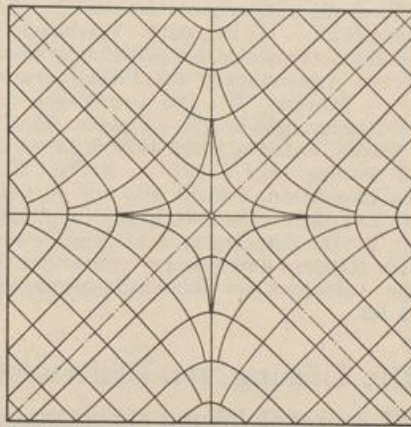


Abb. 658. Trajektorien der Hauptbiegemomente für die quadratische Platte.

Die eingespannte Platte bei gleichmäßiger Belastung.

Nachdem die Tangentialebene an die Biegefläche der frei aufliegenden Platte in den Eckpunkten bereits mit der ursprünglichen Mittelebene zusammenfällt, sind hier die Biegemomente der eingespannten Platte Null und die Tangenten an die Kurven der Randmomente waagrecht. Längs des Randes sind auch die Drillungsmomente nach S. 648 Null und daher $A_{xz} = Q_{xz}$.

Um die Differentialgleichung (929) bei starrer Einspannung oder anderen Randbedingungen zu integrieren, wird die Lösung Naviers w_1 für die frei aufliegende Platte (988) nach M. Levy durch eine allgemeine Lösung w_2 der homogenen Gleichung $\Delta\Delta w_2 = 0$ ergänzt. Sie enthält so viele Freiwerte, besteht also aus so vielen Partikularlösungen, daß die vorgeschriebenen Randbedingungen durch die Reihenentwicklung für $w = w_1 + w_2$ gliedweise erfüllt werden können. Die Fläche w_2 entsteht darnach durch Randkräfte an der frei aufliegenden Platte. Der mechanische Sinn dieser mathematischen Operation läßt sich mit der Berechnung der statisch unbestimmten Schnittkräfte in Abschn. 24 vergleichen.

Die Aufgabe kann auch nach H. Hencky und A. Nadai durch Überlagerung einer Grundlösung w^* für die vorgeschriebene Belastung mit einem allgemeinen Integral w^{**} der homogenen Gleichung $\Delta\Delta w^{**} = 0$ untersucht werden. Dieses läßt sich in einfach unendlichen Reihen anschreiben und enthält ebenso viele Freiwerte, also ebenso viele Partikularlösungen w_h^{**} , als andere Randbedingungen im Vergleich zur frei aufliegenden Platte vorhanden sind. Die Freiwerte werden auch hier gliedweise so bestimmt, daß die Funktion $w = w^* + w^{**}$ die Differentialgleichung und die vorgeschriebenen Randbedingungen erfüllt. Der mathematische Teil der Lösung bereitet hier jedoch wesentlich größere Schwierigkeiten als bei der frei aufliegenden Platte, so daß man sich bei diesen Aufgaben in der Regel mit Näherungslösungen begnügt.

Hencky, H.: Über den Spannungszustand in rechteckigen ebenen Platten. München 1913. — Leitz, H.: Berechnung der frei aufliegenden Platte. Berlin 1914. — Nadai, A.: Die Formänderungen und die Spannungen von rechteckigen Platten. Forsch.-Arb. Ing.-Wes. Berlin 1915. — Leitz, H.: Berechnung der eingespannten rechteckigen Platte. Z. Math. Physik 1917

S. 262. — Huber, M. T.: Über die Biegung einer rechteckigen Platte von ungleicher Biegefestigkeit in der Längs- und Querrichtung bei einspannungsfreier Stützung des Randes usw. Bauing. 1924 S. 259. — Derselbe: Über die genaue Biegungsgleichung einer orthotropen Platte und ihre Anwendung auf kreuzweise bewehrte Betonplatten. Bauing. 1925 S. 878 — Si Luan Wei: Über die eingespannte rechteckige Platte mit gleichmäßig verteilter Belastung. Diss. Göttingen 1925. — Huber, M. T.: Vereinfachte strenge Lösung der Biegungsaufgabe einer rechteckigen Eisenbetonplatte bei geradliniger freier Stützung aller Ränder. Bauing. 1926 S. 121. — Derselbe: Anwendungen der Biegetheorie orthotroper Platten. Z. angew. Math. Mech. 1926 S. 228. — Marcus, H.: Die Grundlagen der Querschnittsbemessung kreuzweise bewehrter Platten. Bauing. 1926 S. 577. — Crämer, H.: Die Biegungsgleichung von Platten stetig veränderlicher Stärke. Beton u. Eisen 1929 S. 12. — Marcus, H.: Die Drillungsmomente rechteckiger Platten. Bauing. 1929 S. 497. — Ritter, M.: Die Anwendung der Theorie elastischer Platten auf den Eisenbeton. Bericht über die II. Int. Tagung f. Brücken- u. Hochbau, S. 694. Wien 1929. — Inada, T.: Die Berechnung auf 4 Seiten gestützter rechteckiger Platten. Berlin 1930. — Müller, E.: Die Berechnung rechteckiger, gleichförmig belasteter Platten, die an zwei gegenüberliegenden Rändern durch Träger unterstützt sind. Ing.-Arch. 1931 S. 606. — Crämer, H.: Die bauliche Aufnahme der Randrillungsmomente vierseitig gelagerter Platten. Beton u. Eisen 1932 S. 95.

71. Die Lösung von Plattenaufgaben mit Differenzenrechnung.

Differenzgleichung eines Gitters. Die Anwendung der Theorie der Plattenbiegung bei beliebiger Belastung und Stützung ist ebenso wie die strenge Untersuchung ebener Spannungsprobleme im Bauwesen im wesentlichen durch die mathematischen Schwierigkeiten der Lösung verhindert worden.

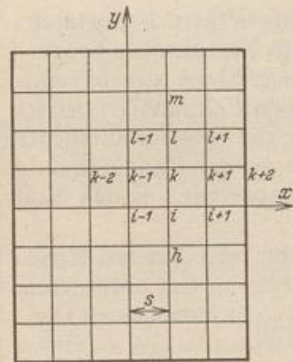


Abb. 659.

Man begnügt sich daher für diese Aufgaben in der Regel mit qualitativ brauchbaren Näherungslösungen, zumal auch die Annahmen über die physikalischen Eigenschaften des Baustoffs und die Beschaffenheit der Stützung keineswegs streng erfüllt sind. Es liegt daher nahe, den stetigen Charakter des Ansatzes wie bei anderen Problemen der Mechanik aufzugeben und die Abhängigkeit zwischen Spannungs-, Verschiebungs- und Belastungszustand an endlichen Abschnitten der Platte zu beschreiben. Die stetiggekrümmte Biegefläche erscheint dabei als Vielkant, dessen Kanten sich im Grundriß je nach der Art der Koordinaten in Abständen Δx , Δy rechtwinklig schneiden oder als Strahlenbündel mit einer Schar konzentrischer Polygone erscheinen. Die Eckpunkte k des Vielkantes

sind Punkte der Biegefläche, die Kanten beschreiben ein elastisches Gitter. Die geometrische Abwandlung der Fläche zum Vielkant bedeutet mathematisch den Übergang vom Längendifferential zur Differenz zweier Strecken und vom Differentialquotienten zum Differenzenquotienten. Er ist zur numerischen Lösung von Aufgaben der Plattenbiegung zuerst von H. Marcus vollzogen worden.

Die Mittelebene der rechteckigen Platte wird zur Vorbereitung der Untersuchung durch zwei Systeme äquidistanter, sich winkelrecht kreuzender Geraden geteilt. Die Abstände Δx , Δy sind in der Regel gleichgroß ($\Delta x = \Delta y = s$).

Die Differentialquotienten werden nach ihrer geometrischen Bedeutung durch Funktionen der Ordinaten w_k der Gitterknoten ersetzt (Abschn. 20). Danach ist in Verbindung mit Abb. 659

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_k &\rightarrow \frac{w_{k+1} - w_{k-1}}{2 \Delta x}, & \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_k &\rightarrow \frac{w_l - w_t}{2 \Delta y}, \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_k &\rightarrow \frac{w_{l+1} - w_{l-1} - w_{t+1} + w_{t-1}}{4 \Delta x \Delta y}, \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_k &\rightarrow \frac{w_{k+1} - 2 w_k + w_{k-1}}{\Delta x^2}, & \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_k &\rightarrow \frac{w_l - 2 w_k + w_t}{\Delta y^2}, \end{aligned}$$