



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Die rechteckige Platte mit frei drehbarer Auflagerung der Kanten

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

aufgelagert, so daß Zug- und Druckkräfte auf den Unterbau übertragen werden (Abb. 644). Die Oberfläche erhält in der Regel gleichförmige Belastung, bei Verwendung der Platten im Behälterbau auch hydrostatische Belastung.

Die Biegesteifigkeit der Platte ist bei homogenem und isotropem Baustoff in jeder Richtung die gleiche. Die Beziehungen auf S. 646 zwischen der vorgeschrie-

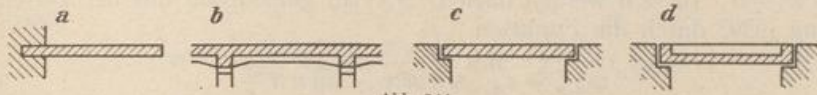


Abb. 644.

benen Belastung $p(x,y)$ und den Ordinaten $w(x,y)$ der ausgebogenen Mittelebene lassen sich jedoch auch auf Platten mit verschiedener Biegesteifigkeit in der Längs- und Querrichtung erweitern. Der Nachweis der Formänderung von Eisenbetonplatten oberhalb der Reißlast im Sinne des Stadiums II der Festigkeit ist ausgeschlossen.

Die Untersuchung des Spannungs- und Verschiebungszustandes besteht bei homogenem und isotropem Baustoff und den Annahmen auf S. 644 in der Integration der partiellen Differentialgleichung (929) für vorgeschriebene Randbedingungen an den Kanten $x = 0, x = a, y = 0, y = b$ (Abb. 645). Das Ergebnis kann in der Regel nur als Reihenentwicklung angegeben werden, deren Brauchbarkeit für die Zahlenrechnung nicht allein von der Konvergenz der Reihe $w(x,y)$ selbst, sondern auch von der Konvergenz ihrer Ableitungen abhängt. Damit scheidet Näherungslösungen aus, welche nur die Durchbiegung, aber nicht die Krümmung der elastischen Fläche ausreichend beschreiben. Brauchbare Lösungen sind von L. Navier, A. Nadai, H. Hencky und einigen französischen Mathematikern angegeben worden. Sie bestehen entweder aus Gliedern $w_h(x,y), h = 1, \dots, \infty$, welche die Differentialgleichung (929) und die Randbedingungen für den Anteil $p_h(x,y)$ der vorgeschriebenen Belastung $p = \sum p_h, h = 1, \dots, \infty$ erfüllen oder aus einer partikulären Lösung w^* der inhomogenen Gleichung, welche die Randbedingungen nur teilweise befriedigt und in einer Lösung w^{**} der homogenen Gleichung $\Delta \Delta w^{**} = 0$, die mit w^* überlagert, das gesuchte Ergebnis darstellt.

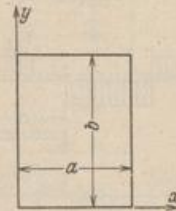


Abb. 645.

Der Plattenstreifen unter einer Belastung $p(x)$. Der Plattenstreifen ist in den Kanten $x = 0$ und $x = a$ gestützt (Abb. 646). Die Ableitungen der Durchbiegung w nach y sind Null, so daß aus (929) folgende Beziehung entsteht.

$$d^4 w / d x^4 = p(x) / N. \tag{980}$$

Die Lösung kann nach Abschn. 20 für die frei drehbare Auflagerung des Streifens unmittelbar angeschrieben werden.

a) Gleichförmige Belastung

$$w = \frac{p a^4}{24 N} \left(\frac{x}{a} - 2 \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^4}{a^4} \right). \tag{981}$$

b) Hydrostatische Belastung (Abb. 646)

$$w = \frac{p_0 a^4}{360 N} \left(7 \frac{x}{a} - 10 \frac{x^3}{a^3} + 3 \frac{x^5}{a^5} \right). \tag{982}$$



Abb. 646.

Die rechteckige Platte mit frei drehbarer Auflagerung der Kanten. Die Platte ist in den Punkten $y \neq 0, x = 0$ oder $x = a$ und $x \neq 0, y = 0$ oder $y = b$ gestützt. Die Durchbiegung w und ihre Ableitung Δw sind hier nach S. 647 Null. Die Biegemomente verschwinden an den Rändern, die Krümmung ist hier nach zwei winkelrechten Richtungen Null. Die Tangentialebene fällt also in den Ecken mit

der ursprünglichen Mittelebene zusammen. Die elastische Fläche zeigt daher von den Ecken ausgehende Grate, in denen die Krümmung und daher auch die Biegemomente groß sind. Die größten Auflagerkräfte A_{x_2} , A_{y_2} in Kantenmitte sind bei gleichmäßiger Belastung vom Seitenverhältnis a/b der Platte nahezu unabhängig ($0,42pa$ bis $0,5pa$, a die kleinere Rechteckseite). Die Randbedingungen $w = 0$, $\Delta w = 0$ werden nach L. Navier gemeinsam mit der Differentialgleichung (929) durch die Funktion

$$w_{m,n} = c_{m,n} \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b} \quad (983)$$

für die Belastung

$$p(x,y)_{m,n} = N c_{m,n} \pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b} \quad (984)$$

erfüllt, wie sich an Hand der Gleichung (929) nachweisen läßt. Da nun jede Belastung $p(x,y)$ über die Kanten der Platte hinaus nach beiden Seiten periodisch fortgesetzt werden kann (Abb. 647), ohne die Randbedingungen $w = 0$, $\Delta w = 0$ zu verletzen, so kann sie nach Fourier in eine trigonometrische Doppelreihe entwickelt werden.

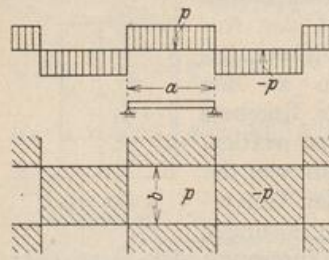


Abb. 647.

$$p(x,y) = \sum \sum a_{m,n} \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}. \quad (985)$$

Die Koeffizienten sind nach bekannten mathematischen Regeln

$$a_{m,n} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a p(x,y) \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b} dx dy. \quad (986)$$

Daher ist bei gleichförmiger Belastung p der ganzen Platte

$$a_{m,n} = \frac{16 p_0}{m n \pi^2} \quad (m, n = 1, 3, 5, \dots). \quad (987)$$

Die gliedweise Gegenüberstellung von (984) mit (985) liefert $c_{m,n}$ und damit

$$w = \frac{16 p_0}{N \pi^6} \sum_m \sum_n \frac{\sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}}{m n \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}. \quad (988)$$

In dieser Reihe wird zuerst $m = 1$ und $n = 1, 3, 5$ usw., darauf $m = 3$ und $n = 1, 3, 5$ usw. eingesetzt, so daß die Buchstaben m und n der Reihe nach alle ungeraden Zahlen durchlaufen. Leider konvergiert die Reihe $\sum w_{m,n}$ mit ihren Ableitungen nur bei gleichförmiger Belastung p der Oberfläche schnell genug, um darnach numerisch zu rechnen. Sie ist neuerdings von V. Lewe zur Untersuchung von Pilzdecken verwendet worden, indem die äußeren an der Platte angreifenden Kräfte aus der Auflast und der über die Fläche des Pilzkopfes gleichmäßig verteilten Stützkraft ähnlich wie nach (988) in eine trigonometrische Doppelreihe entwickelt werden.

Um Lösungen zu erhalten, welche die Differentialgleichung (929) für eine vorgeschriebene Belastung $p(x)$ streng erfüllen und nur aus einfachen und besser konvergierenden Reihen bestehen, addiert A. Nadai zur Durchbiegung w^* des Plattenstreifens mit den Randbedingungen der Platte für $x = 0$ und $x = a$ die Durchbiegung w^{**} einer Platte mit Randkräften, welche die homogene Gleichung $\Delta \Delta w^{**} = 0$ erfüllt und gemeinsam mit w^* die für w vorgeschriebenen Randbedingungen an allen vier Kanten befriedigt.

Bei gleichförmiger Belastung p und frei drehbarer Stützung in $x = 0, x = a$ ist nach (981)

$$w^* = \frac{p a^4}{24 N} \left(\frac{x}{a} - 2 \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^4}{a^4} \right) = \frac{4 p a^4}{N \pi^5} \sum \frac{1}{n^5} \sin \frac{n \pi x}{a} \quad (n = 1, 3, 5, \dots). \quad (989)$$

Der Ansatz

$$w^{**} = \sum Y_n \sin \frac{n \pi x}{a} \quad \text{mit} \quad Y_n = f_n(y) \quad (990)$$

erfüllt die Randbedingungen $w^{**} = 0, \Delta w^{**} = 0$ in $x = 0$ und $x = a$ und die Differentialgleichung $\Delta \Delta w^{**} = 0$ für

$$Y_n = a_n \operatorname{Cof} \frac{n \pi y}{a} + b_n \frac{n \pi y}{a} \operatorname{Sin} \frac{n \pi y}{a} + c_n \operatorname{Sin} \frac{n \pi y}{a} + d_n \frac{n \pi y}{a} \operatorname{Cof} \frac{n \pi y}{a}, \quad (991)$$

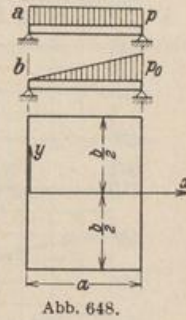


Abb. 648.

da jedes einzelne Glied eine Lösung der biharmonischen Gleichung ist. Die Freiwerte a_n, b_n, c_n, d_n ($n = 1, \dots, \infty$) werden so bestimmt, daß die Funktion $w = w^* + w^{**}$ die vier Randbedingungen für $y = \pm b/2$ befriedigt (Abb. 648). Bei Symmetrie der Stützung genügen die in y geraden Funktionen der allgemeinen Lösung w^{**} . Das Ergebnis lautet nach A. Nadai mit

$$\xi_n = \frac{n \pi x}{a}, \quad \eta_n = \frac{n \pi y}{a}, \quad \alpha_n = \frac{n \pi b}{2 a}, \quad (992)$$

$$w = \frac{4 p a^4}{N \pi^5} \sum \frac{1}{n^5} \left[1 - \frac{2 \operatorname{Cof} \alpha_n \operatorname{Cof} \eta_n + \alpha_n \operatorname{Sin} \alpha_n \operatorname{Cof} \eta_n - \eta_n \operatorname{Sin} \eta_n \operatorname{Cof} \alpha_n}{1 + \operatorname{Cof} 2 \alpha_n} \right] \sin \xi_n \quad (993)$$

$(n = 1, 3, 5, \dots)$.

Bei hydrostatischer Belastung (Abb. 648b) $p = p_0 x/a$ ist

$$w = \frac{2 p_0 a^4}{N \pi^5} \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^5} \left[1 - \frac{(2 + \alpha_n \operatorname{Tg} \alpha_n) \operatorname{Cof} \eta_n - \eta_n \operatorname{Sin} \eta_n}{2 \operatorname{Cof} \alpha_n} \right] \sin \xi_n. \quad (994)$$

Die Reihen konvergieren schnell, so daß bereits das erste Glied als Näherung genügt. Mit $w(x, y)$ sind nach S. 645 auch die Schnittkräfte $M_x, M_y, M_{xy}, Q_{xz}, Q_{yz}$ und die Stützkkräfte A_{xz}, A_{yz} der Platte bestimmt, so daß Richtung und Größe der Hauptbiegungs- und Hauptdrillungsmomente berechnet und darauf die Trajektorien und die Linien gleichen Hauptmomentes aufgetragen werden können. Um daran das Wesen der Plattenbiegung zu studieren, ist die Zahlenrechnung für zwei Platten unter gleichförmiger Belastung mit dem Seitenverhältnis 1 : 1 und 3 : 4 ausgeführt worden (s. S. 677). In Abb. 649 sind die Biegemomente M_x, M_y in den Symmetrieachsen der rechteckigen Platten mit dem Seitenverhältnis $b/a = 1; 1,5; 2$ für $\mu = 1/4$ dargestellt. Die Abhängigkeit der Momente und der Durchbiegung von dem Seitenverhältnis zeigt nach A. Nadai für $\mu = 3/10$ Abb. 650.

Der gleichmäßig belastete Halbstreifen ist ein Sonderfall der rechteckig begrenzten Platte mit $b \gg a$ und von A. Nadai in der gleichen Weise untersucht worden. Das Ergebnis ist hier wiedergegeben, um damit später andere Aufgaben zu lösen.

a) Die drei Seiten des Halbstreifens liegen frei auf (Abb. 651a)

$$w = \frac{4 p a^4}{N \pi^5} \sum \left[1 - \left(1 + \frac{\eta_n}{2} \right) e^{-\eta_n} \right] \frac{1}{n^5} \sin \xi_n, \quad (n = 1, 3, 5, \dots). \quad (995)$$

b) Die Längsseiten des Halbstreifens liegen frei auf, die kurze Seite ist frei (Abb. 651b)

$$w = \frac{4 p a^4}{N \pi^5} \sum \left[1 + \frac{\mu}{3 + \mu} \left(\frac{1 + \mu}{1 - \mu} - \eta_n \right) e^{-\eta_n} \right] \frac{1}{n^5} \sin \xi_n, \quad (n = 1, 3, 5, \dots). \quad (996)$$

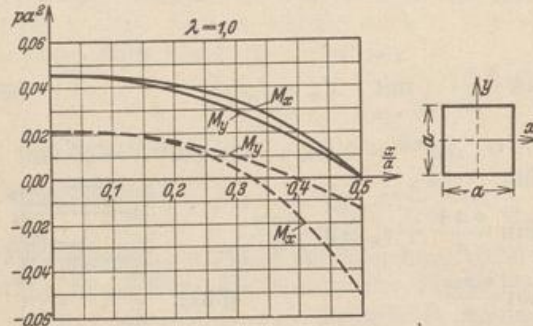
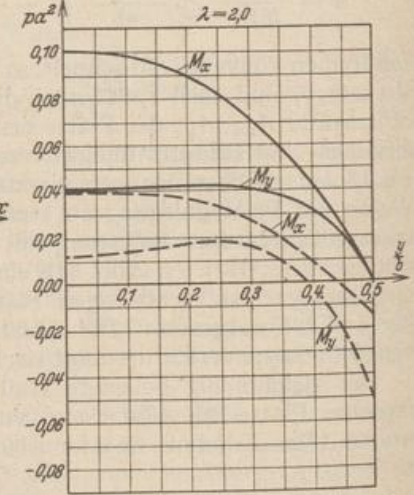
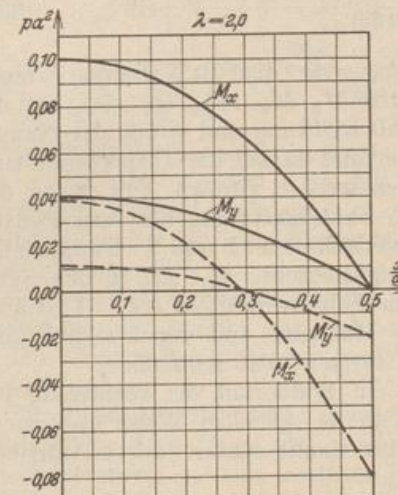
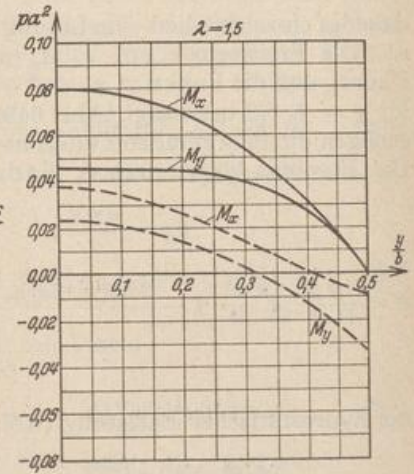
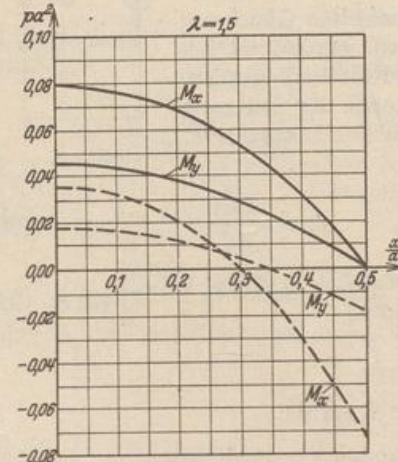


Abb. 649.

Biegemomente M_x und M_y
für rechteckige Platten mit
 $b/a = \lambda = 1,0, 1,5, 2,0.$
 $\mu = 1/4.$

Frei aufliegende Platten ———
Eingespannte Platten - - - - -



c) Die Längsseiten des Halbstreifens liegen frei auf, die kurze Seite ist eingespannt (Abb. 651c)

$$w = \frac{4 p a^4}{N \pi^5} \sum \left[1 - (1 + \eta_n) e^{-\eta_n} \right] \frac{1}{n^5} \sin \xi_n, \quad (n = 1, 3, 5, \dots). \quad (997)$$