



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Differenzengleichung eines Gitters

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

S. 262. — Huber, M. T.: Über die Biegung einer rechteckigen Platte von ungleicher Biegefestigkeit in der Längs- und Querrichtung bei einspannungsfreier Stützung des Randes usw. Bauing. 1924 S. 259. — Derselbe: Über die genaue Biegleichung einer orthotropen Platte und ihre Anwendung auf kreuzweise bewehrte Betonplatten. Bauing. 1925 S. 878 — Si Luan Wei: Über die eingespannte rechteckige Platte mit gleichmäßig verteilter Belastung. Diss. Göttingen 1925. — Huber, M. T.: Vereinfachte strenge Lösung der Biegeaufgabe einer rechteckigen Eisenbetonplatte bei geradliniger freier Stützung aller Ränder. Bauing. 1926 S. 121. — Derselbe: Anwendungen der Biegetheorie orthotroper Platten. Z. angew. Math. Mech. 1926 S. 228. — Marcus, H.: Die Grundlagen der Querschnittsbemessung kreuzweise bewehrter Platten. Bauing. 1926 S. 577. — Crämer, H.: Die Biegleichung von Platten stetig veränderlicher Stärke. Beton u. Eisen 1929 S. 12. — Marcus, H.: Die Drillungsmomente rechteckiger Platten. Bauing. 1929 S. 497. — Ritter, M.: Die Anwendung der Theorie elastischer Platten auf den Eisenbeton. Bericht über die II. Int. Tagung f. Brücken- u. Hochbau, S. 694. Wien 1929. — Inada, T.: Die Berechnung auf 4 Seiten gestützter rechteckiger Platten. Berlin 1930. — Müller, E.: Die Berechnung rechteckiger, gleichförmig belasteter Platten, die an zwei gegenüberliegenden Rändern durch Träger unterstützt sind. Ing.-Arch. 1931 S. 606. — Crämer, H.: Die bauliche Aufnahme der Randrillungsmomente vierseitig gelagerter Platten. Beton u. Eisen 1932 S. 95.

71. Die Lösung von Plattenaufgaben mit Differenzenrechnung.

Differenzgleichung eines Gitters. Die Anwendung der Theorie der Plattenbiegung bei beliebiger Belastung und Stützung ist ebenso wie die strenge Untersuchung ebener Spannungsprobleme im Bauwesen im wesentlichen durch die mathematischen Schwierigkeiten der Lösung verhindert worden.

Man begnügt sich daher für diese Aufgaben in der Regel mit qualitativ brauchbaren Näherungslösungen, zumal auch die Annahmen über die physikalischen Eigenschaften des Baustoffs und die Beschaffenheit der Stützung keineswegs streng erfüllt sind. Es liegt daher nahe, den stetigen Charakter des Ansatzes wie bei anderen Problemen der Mechanik aufzugeben und die Abhängigkeit zwischen Spannungs-, Verschiebungs- und Belastungszustand an endlichen Abschnitten der Platte zu beschreiben. Die stetiggekrümmte Biegefläche erscheint dabei als Vielkant, dessen Kanten sich im Grundriß je nach der Art der Koordinaten in Abständen Δx , Δy rechtwinklig schneiden oder als Strahlenbündel mit einer Schar konzentrischer Polygone erscheinen. Die Eckpunkte k des Vielkantes sind Punkte der Biegefläche, die Kanten beschreiben ein elastisches Gitter. Die geometrische Abwandlung der Fläche zum Vielkant bedeutet mathematisch den Übergang vom Längendifferential zur Differenz zweier Strecken und vom Differentialquotienten zum Differenzenquotienten. Er ist zur numerischen Lösung von Aufgaben der Plattenbiegung zuerst von H. Marcus vollzogen worden.

Die Mittelebene der rechteckigen Platte wird zur Vorbereitung der Untersuchung durch zwei Systeme äquidistanter, sich winkelrecht kreuzender Geraden geteilt. Die Abstände Δx , Δy sind in der Regel gleichgroß ($\Delta x = \Delta y = s$).

Die Differentialquotienten werden nach ihrer geometrischen Bedeutung durch Funktionen der Ordinaten w_k der Gitterknoten ersetzt (Abschn. 20). Danach ist in Verbindung mit Abb. 659

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_k &\rightarrow \frac{w_{k+1} - w_{k-1}}{2\Delta x}, & \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_k &\rightarrow \frac{w_t - w_i}{2\Delta y}, \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_k &\rightarrow \frac{w_{i+1} - w_{i-1} - w_{t+1} + w_{t-1}}{4\Delta x \Delta y}, \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_k &\rightarrow \frac{w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}}{\Delta x^2}, & \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_k &\rightarrow \frac{w_t - 2w_k + w_i}{\Delta y^2}, \end{aligned}$$

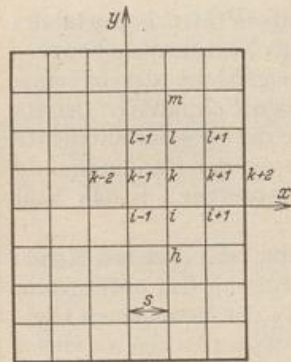


Abb. 659.

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right)_k &\rightarrow \frac{\Delta^2 w_{k+1} - \Delta^2 w_{k-1}}{2 \Delta x^3} = \frac{w_{k+2} - 2 w_{k+1} + 2 w_{k-1} - w_{k-2}}{2 \Delta x^3}, \\
 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right)_k &\rightarrow \frac{w_m - 2 w_l + 2 w_i - w_n}{2 \Delta y^3}, \\
 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_k &= \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right]_k \rightarrow \frac{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_l - 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_k + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_i}{\Delta y^2} \\
 &\rightarrow \frac{4 w_k - 2 (w_{k+1} + w_{k-1} + w_l + w_i) + (w_{l-1} + w_{l+1} + w_{i+1} + w_{i-1})}{\Delta x^2 \Delta y^2}, \\
 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right)_k &\rightarrow \frac{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{k+1} - 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_k + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{k-1}}{\Delta x^2} \\
 &\rightarrow \frac{w_{k+2} - 4 w_{k+1} + 6 w_k - 4 w_{k-1} + w_{k-2}}{\Delta x^4}, \\
 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)_k &\rightarrow \frac{w_m - 4 w_l + 6 w_i - 4 w_n}{\Delta y^4}.
 \end{aligned} \tag{998}$$

Die Differentialgleichungen der Plattenbiegung (929) und (931), (932) werden Differenzgleichungen, so daß der Zusammenhang zwischen der Belastungsintensität p_k , den Ordinaten w_k der Biegefläche und den Momentensummen M_k in folgender Weise beschrieben wird:

$$\begin{aligned}
 \text{I.} \quad &\frac{\Delta^4 w_k}{\Delta x^4} + 2 \frac{\Delta^4 w_k}{\Delta x^2 \Delta y^2} + \frac{\Delta^4 w_k}{\Delta y^4} = \frac{p_k}{N}, \\
 \text{II.} \quad &\frac{\Delta^2 M_k}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2 M_k}{\Delta y^2} = -p_k, \quad \frac{\Delta^2 w_k}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2 w_k}{\Delta y^2} = -\frac{M_k}{N}.
 \end{aligned}$$

Daraus entsteht an jedem freien Maschenknoten mit den Differenzenquotienten (998) und mit $\Delta y^2 / \Delta x^2 = \alpha$ die Gleichung

$$\begin{aligned}
 \text{I.} \quad &w_k \left[6 \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) + 8 \right] - 4 \left[(1 + \alpha) (w_{k+1} + w_{k-1}) + \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) (w_l + w_i) \right] \\
 &+ 2 (w_{l-1} + w_{l+1} + w_{i-1} + w_{i+1}) + \alpha (w_{k+2} + w_{k-2}) \\
 &+ \frac{1}{\alpha} (w_m + w_n) = \frac{p_k \Delta x^4}{N}, \\
 \text{II.} \quad &2 (1 + \alpha) M_k - \alpha (M_{k+1} + M_{k-1}) - (M_l + M_i) = p_k \alpha \Delta x^2, \\
 &2 (1 + \alpha) w_k - \alpha (w_{k+1} + w_{k-1}) - (w_l + w_i) = \frac{M_k}{N} \alpha \Delta x^2.
 \end{aligned} \tag{999}$$

Bei gleich großen Abständen $\Delta x = \Delta y = s$ des Gitters ist

$$\begin{aligned}
 \text{I.} \quad &20 w_k - 8 (w_{k-1} + w_l + w_{k+1} + w_i) + 2 (w_{l-1} + w_{l+1} + w_{i-1} + w_{i+1}) \\
 &+ (w_{k-2} + w_m + w_{k+2} + w_n) = \frac{p_k s^4}{N}.
 \end{aligned} \tag{1000}$$

$$\text{II.} \quad 4 M_k - M_{k-1} - M_l - M_{k+1} - M_i = + p_k s^2, \tag{1001}$$

$$4 w_k - w_{k-1} - w_l - w_{k+1} - w_i = + \frac{M_k}{N} s^2. \tag{1002}$$

Schnittkräfte. Die Schnittkräfte der Platte sind nach (919) Funktionen von Differentialquotienten der Plattenbiegung und daher jetzt Funktionen von Differenzenquotienten, so daß die Schnittkräfte am Maschenknoten k in folgender Weise von den Verschiebungen des Gitters abhängen: