Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Schnittkräfte

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

$$
\left.
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right)_k \to \frac{\Delta^2 w_{k+1} - \Delta^2 w_{k-1}}{2\,\Delta x^3} = \frac{w_{k+2} - 2\,w_{k+1} + 2\,w_{k-1} - w_{k-2}}{2\,\Delta x^3},\\
&\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right)_k \to \frac{w_m - 2\,w_l + 2\,w_i - w_n}{2\,\Delta y^3},\\
&\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2}\right)_k = \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_k\right]_k \to \frac{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_l - 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_k + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_i}{\Delta y^2}\\
&\qquad \to \frac{4\,w_k - 2\,(w_{k+1} + w_{k-1} + w_l + w_i) + (w_{i-1} + w_{i+1} + w_{l+1} + w_{l-1})}{\Delta x^2\,\Delta y^2},\\
&\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right)_k \to \frac{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{k+1} - 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_k + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{k-1}}{\Delta x^2}\\
&\qquad \to \frac{w_{k+2} - 4\,w_{k+1} + 6\,w_k - 4\,w_{k-1} + w_{k-2}}{\Delta x^4},\\
&\left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)_k \to \frac{w_m - 4\,w_l + 6\,w_k - 4\,w_i + w_h}{\Delta y^4}.
\end{aligned}
\right\} \qquad (998)
$$

Die Differentialgleichungen der Plattenbiegung (929) und (931), (932) werden Differenzengleichungen, so daß der Zusammenhang zwischen der Belastungsintensität p_k, den Ordinaten w_k der Biegefläche und den Momentensummen M_k in folgender Weise beschrieben wird:

$$
\begin{aligned}
&\text{I.} \quad \frac{\Delta^4 w_k}{\Delta x^4} + 2\,\frac{\Delta^4 w_k}{\Delta x^2\,\Delta y^2} + \frac{\Delta^4 w_k}{\Delta y^4} = \frac{p_k}{N},\\
&\text{II.} \quad \frac{\Delta^2 M_k}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2 M_k}{\Delta y^2} = -\,p_k, \qquad \frac{\Delta^2 w_k}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2 w_k}{\Delta y^2} = -\frac{M_k}{N}.
\end{aligned}
$$

Daraus entsteht an jedem freien Maschenknoten mit den Differenzenquotienten (998) und mit $\Delta y^2/\Delta x^2 = \alpha$ die Gleichung

$$
\left.
\begin{aligned}
&\text{I.} \quad w_k\left[6\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + 8\right] - 4\left[(1 + \alpha)\,(w_{k+1} + w_{k-1}) + \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)(w_l + w_i)\right]\\
&\qquad + 2\,(w_{i-1} + w_{l-1} + w_{l+1} + w_{i+1}) + \alpha\,(w_{k+2} + w_{k-2})\\
&\qquad + \frac{1}{\alpha}\,(w_m + w_h) = p_k\,\frac{\alpha\,\Delta x^4}{N},\\
&\text{II.} \quad 2\,(1 + \alpha)\,M_k - \alpha\,(M_{k+1} + M_{k-1}) - (M_l + M_i) = p_k\,\alpha\,\Delta x^2,\\
&\qquad 2\,(1 + \alpha)\,w_k - \alpha\,(w_{k+1} + w_{k-1}) - (w_l + w_i) = \frac{M_k}{N}\,\alpha\,\Delta x^2.
\end{aligned}
\right| \qquad (999)
$$

Bei gleich großen Abständen $\Delta x = \Delta y = s$ des Gitters ist

$$
\begin{aligned}
&\text{I.} \quad 20\,w_k - 8\,(w_{k-1} + w_l + w_{k+1} + w_i) + 2\,(w_{i-1} + w_{l-1} + w_{l+1} + w_{i+1})\\
&\qquad + (w_{k-2} + w_m + w_{k+2} + w_h) = p_k\,\frac{s^4}{N}. \qquad (1000)\\
&\text{II.} \quad 4\,M_k - M_{k-1} - M_l - M_{k+1} - M_i = +\,p_k\,s^2, \qquad (1001)\\
&\qquad 4\,w_k - w_{k-1} - w_l - w_{k+1} - w_i = +\,\frac{M_k}{N}\,s^2. \qquad (1002)
\end{aligned}
$$

Schnittkräfte. Die Schnittkräfte der Platte sind nach (919) Funktionen von Differentialquotienten der Plattenbiegung und daher jetzt Funktionen von Differenzenquotienten, so daß die Schnittkräfte am Maschenknoten k in folgender Weise von den Verschiebungen des Gitters abhängen:

$$\left.\begin{aligned}
M_{x,k} &= -N\left(\frac{\Delta^2 w_k}{\Delta x^2} + \mu\frac{\Delta^2 w_k}{\Delta y^2}\right) = \frac{N}{s^2}[-w_{k-1} + 2w_k - w_{k+1} + \mu(-w_i + 2w_k - w_l)],\\
M_{y,k} &= -N\left(\mu\frac{\Delta^2 w_k}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2 w_k}{\Delta y^2}\right) = \frac{N}{s^2}[\mu(-w_{k-1} + 2w_k - w_{k+1}) - w_i + 2w_k - w_l],\\
M_k &= -N\left(\frac{\Delta^2 w_k}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2 w_k}{\Delta y^2}\right) = \frac{N}{s^2}[-w_i - w_{k-1} + 4w_k - w_{k+1} - w_l],\\
M_{xy,k} &= -N(1-\mu)\frac{\Delta^2 w_k}{\Delta x\,\Delta y} = \frac{N(1-\mu)}{4s^2}[w_{l-1} - w_{l+1} - w_{i-1} + w_{i+1}].
\end{aligned}\right| \qquad (1003)$$

$$\left.\begin{aligned}
Q_{xz,k} &= \frac{\Delta M_k}{\Delta x} = \frac{1}{2s}(M_{k+1} - M_{k-1})\\
&= \frac{N}{2s^3}[w_{k-2} + (w_{l-1} + w_{i-1}) - (w_{l+1} + w_{i+1}) - w_{k+2} + 4(w_{k+1} - w_{k-1})],\\
Q_{yz,k} &= \frac{\Delta M_k}{\Delta y} = \frac{1}{2s}(M_l - M_i)\\
&= \frac{N}{2s^3}[w_h + (w_{i+1} + w_{i-1}) - (w_{l+1} + w_{l-1}) - w_m + 4(w_l - w_i)].
\end{aligned}\right\} \qquad (1004)$$

$$\left.\begin{aligned}
A_{xz,k} &= -\frac{1}{2s}[M_{k+1} - M_{k-1} + M_{xy,l} - M_{xy,i}]\\
&= -\frac{N}{2s^3}[w_{k-2} + (6-2\mu)(w_{k+1} - w_{k-1})\\
&\qquad + (2-\mu)(w_{i-1} + w_{l-1} - w_{l+1} - w_{i+1}) - w_{k+2}],\\
A_{yz,k} &= -\frac{1}{2s}[M_l - M_i + M_{xy,k+1} - M_{xy,k-1}]\\
&= -\frac{N}{2s^3}[w_h + (6-2\mu)(w_l - w_i)\\
&\qquad + (2-\mu)(w_{i+1} + w_{i-1} - w_{l-1} - w_{l+1}) - w_m].
\end{aligned}\right| \qquad (1005)$$

Die Teilung $\Delta x, \Delta y$ des Gitters ist in beiden Richtungen konstant. Je kleiner die Abschnitte gewählt werden, um so besser ist die Angleichung des Verschiebungszustandes des Gitters an die elastische Fläche der Platte, um so größer aber auch die Anzahl der linearen Gleichungen (1000) und der Umfang der Zahlenrechnung. Die Zerlegung des Integrationsbereiches in quadratische Maschen ($\Delta x = \Delta y = s$) vereinfacht die Differenzengleichungen der Wurzeln M_k, w_k und die Ansätze für die Schnittkräfte. Die Poissonsche Zahl beträgt bei Eisenbetonplatten $\mu = 1/6$, sie kann aber auch zur einfachen Berechnung der Schnittkräfte, vor allem bei $\Delta x \neq \Delta y$ im Sinne dieser Näherungslösung Null gesetzt werden.

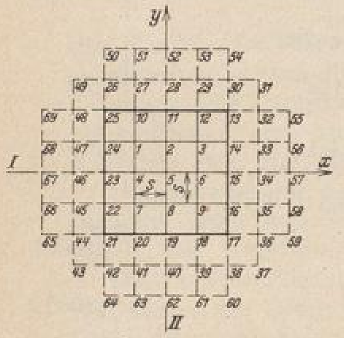

Abb. 660.

Die Bedingungen am Rande des Gitters und an den singulären Stellen der Belastungsfunktion. Um den Zusammenhang zwischen der Biegefläche $w(x, y)$ der Platte und der vorgeschriebenen Belastung auch am Plattenrande in endlichen Abschnitten $\Delta x, \Delta y$ zu beschreiben, und die Schnitt- und Stützkräfte nach (1003) ff. abzuleiten, wird die elastische Fläche unabhängig von der Stützung erweitert, indem das Gitter und die Belastung $p(x, y)$ stetig über den Plattenrand hinaus fortgesetzt werden. Damit ist die Bedingung $\Delta\Delta w = p/N$ auch außerhalb des Randes erfüllt (Abb. 660). Unter dieser Voraus-