



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Die Statik im Stahlbetonbau**

**Beyer, Kurt**

**Berlin [u.a.], 1956**

Die Bedingungen am Rande des Gitters und an den singulären Stellen der  
Belastungsfunktion

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

$$\left. \begin{aligned}
 M_{x,k} &= -N \left( \frac{\Delta^2 w_k}{\Delta x^2} + \mu \frac{\Delta^2 w_k}{\Delta y^2} \right) = \frac{N}{s^2} [-w_{k-1} + 2w_k - w_{k+1} + \mu(-w_i + 2w_k - w_l)], \\
 M_{y,k} &= -N \left( \mu \frac{\Delta^2 w_k}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2 w_k}{\Delta y^2} \right) = \frac{N}{s^2} [\mu(-w_{k-1} + 2w_k - w_{k+1}) - w_i + 2w_k - w_l], \\
 M_k &= -N \left( \frac{\Delta^2 w_k}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2 w_k}{\Delta y^2} \right) = \frac{N}{s^2} [-w_i - w_{k-1} + 4w_k - w_{k+1} - w_l], \\
 M_{xy,k} &= -N(1 - \mu) \frac{\Delta^2 w_k}{\Delta x \Delta y} = \frac{N(1 - \mu)}{4s^2} [w_{l-1} - w_{l+1} - w_{i-1} + w_{i+1}].
 \end{aligned} \right\} (1003)$$

$$\left. \begin{aligned}
 Q_{xz,k} &= \frac{\Delta M_k}{\Delta x} = \frac{1}{2s} (M_{k+1} - M_{k-1}) \\
 &= \frac{N}{2s^3} [w_{k-2} + (w_{l-1} + w_{l-1}) - (w_{l+1} + w_{l+1}) - w_{k+2} + 4(w_{k+1} - w_{k-1})], \\
 Q_{yz,k} &= \frac{\Delta M_k}{\Delta y} = \frac{1}{2s} (M_l - M_i) \\
 &= \frac{N}{2s^3} [w_k + (w_{i+1} + w_{i-1}) - (w_{l+1} + w_{l-1}) - w_m + 4(w_l - w_i)].
 \end{aligned} \right\} (1004)$$

$$\left. \begin{aligned}
 A_{xz,k} &= -\frac{1}{2s} [M_{k+1} - M_{k-1} + M_{xy,l} - M_{xy,i}] \\
 &= -\frac{N}{2s^3} [w_{k-2} + (6 - 2\mu)(w_{k+1} - w_{k-1}) \\
 &\quad + (2 - \mu)(w_{i-1} + w_{l-1} - w_{l+1} - w_{i+1}) - w_{k+2}], \\
 A_{yz,k} &= -\frac{1}{2s} [M_l - M_i + M_{xy,k+1} - M_{xy,k-1}] \\
 &= -\frac{N}{2s^3} [w_k + (6 - 2\mu)(w_l - w_i) \\
 &\quad + (2 - \mu)(w_{i+1} + w_{i-1} - w_{l-1} - w_{l+1}) - w_m].
 \end{aligned} \right\} (1005)$$

Die Teilung  $\Delta x, \Delta y$  des Gitters ist in beiden Richtungen konstant. Je kleiner die Abschnitte gewählt werden, um so besser ist die Angleichung des Verschiebungszustandes des Gitters an die elastische Fläche der Platte, um so größer aber auch die Anzahl der linearen Gleichungen (1000) und der Umfang der Zahlenrechnung. Die Zerlegung des Integrationsbereiches in quadratische Maschen ( $\Delta x = \Delta y = s$ ) vereinfacht die Differenzgleichungen der Wurzeln  $M_k, w_k$  und die Ansätze für die Schnittkräfte. Die Poisson'sche Zahl beträgt bei Eisenbetonplatten  $\mu = 1/6$ , sie kann aber auch zur einfachen Berechnung der Schnittkräfte, vor allem bei  $\Delta x \neq \Delta y$  im Sinne dieser Näherungslösung Null gesetzt werden.

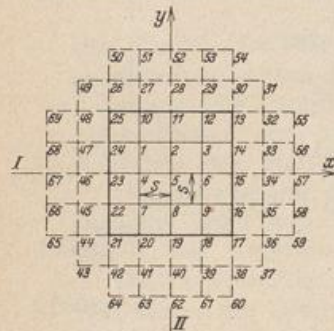


Abb. 660.

**Die Bedingungen am Rande des Gitters und an den singulären Stellen der Belastungsfunktion.** Um den Zusammenhang zwischen der Biegefläche  $w(x, y)$  der Platte und der vorgeschriebenen Belastung auch am

Plattenrande in endlichen Abschnitten  $\Delta x, \Delta y$  zu beschreiben, und die Schnitt- und Stützkkräfte nach (1003)ff. abzuleiten, wird die elastische Fläche unabhängig von der Stützung erweitert, indem das Gitter und die Belastung  $p(x, y)$  stetig über den Plattenrand hinaus fortgesetzt werden. Damit ist die Bedingung  $\Delta \Delta w = p/N$  auch außerhalb des Randes erfüllt (Abb. 660). Unter dieser Voraus-

setzung gelten die Ansätze (1004) für die Schnittkräfte  $Q_{xz}$ ,  $Q_{yz}$ ,  $M_{xy}$  und die Ansätze (1005) für die Auflagerkräfte  $A_{xz}$ ,  $A_{yz}$ . In diesen lassen sich dann die Verschiebungen  $w$  der Nebenknoten außerhalb des Randes eliminieren, so daß sich die Auflagerkräfte folgendermaßen berechnen lassen:

a) Frei aufliegende Platte. Für den Randknoten  $k$  folgt nach (1003) aus  $M_k = 0$  und  $w_i = w_k = w_l = 0$

$$w_{k+1} = -w_{k-1}. \quad (1006)$$

Die Differenzgleichung (1001) liefert mit  $M_l = M_k = M_l = 0$

$$M_{k+1} = -M_{k-1} - p_k s^2$$

und die Differenzgleichung (1002) für den Nebenknoten  $(k+1)$  ergibt

$$4w_{k+1} - w_{l-1} - w_{k+2} - w_{i+1} = \frac{M_{k+1}}{N} s^2 = -\frac{M_{k-1}}{N} s^2 - \frac{p_k s^4}{N}$$

oder mit (1006)

$$w_{k+2} = 4w_{k+1} + w_{l-1} + w_{i+1} + \frac{M_{k-1}}{N} s^2 + \frac{p_k s^4}{N}.$$

Nach (1002) ist für den Punkt  $(k-1)$

$$\frac{M_{k-1}}{N} s^2 = 4w_{k-1} - w_{k-2} - w_{l-1} - w_{l-1},$$

also

$$w_{k+2} = -w_{k-2} + \frac{p_k s^4}{N}. \quad (1007)$$

Damit geht Gl. (1005) über in

$$A_{xz,k} = \frac{N}{2s^3} \left[ 4(3-\mu)w_{k-1} - 2w_{k-2} - 2(2-\mu)(w_{i-1} + w_{l-1}) + \frac{p_k s^4}{N} \right]. \quad (1008)$$

Ebenso wird erhalten

$$A_{yz,k} = \frac{N}{2s^3} \left[ 4(3-\mu)w_i - 2w_k - 2(2-\mu)(w_{i-1} + w_{i+1}) + \frac{p_k s^4}{N} \right]. \quad (1009)$$

b) Starr eingespannte Platte. Für den Randknoten  $k$  folgt nach (998) aus  $dw/dx = 0$

$$w_{k+1} = w_{k-1}. \quad (1010)$$

Die Differenzgleichung (1000) liefert mit  $w_i = w_k = w_l = 0$  und (1010)

$$w_{k+2} = \frac{p_k s^4}{N} + 16w_{k-1} - 4(w_{i-1} + w_{l-1}) - w_{l-2}, \quad (1011)$$

so daß nach (1005)

$$A_{xz,k} = \frac{N}{2s^3} \left[ 16w_{k-1} - 2w_{k-2} - 4(w_{i-1} + w_{l-1}) + \frac{p_k s^4}{N} \right] \quad (1012)$$

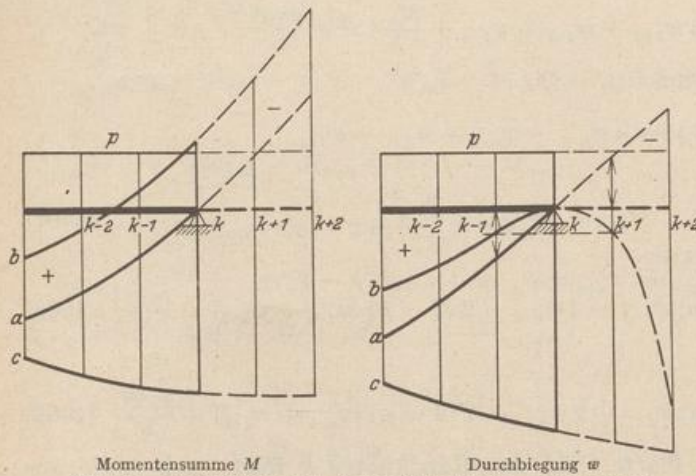
und ebenso

$$A_{yz,k} = \frac{N}{2s^3} \left[ 16w_i - 2w_k - 4(w_{i-1} + w_{i+1}) + \frac{p_k s^4}{N} \right]. \quad (1013)$$

Die Erweiterung der Fläche  $M_k$  und der elastischen Fläche  $w_k$  über den Rand hinaus zeigt Abb. 661 für einen Schnitt  $y = \text{const.}$  a) Frei aufliegende Platte, b) starr eingespannte Platte, c) freier Rand. Die Belastungsfunktion  $p$  ist dabei konstant angenommen worden.

Man kann aber auch zur Formulierung der Randbedingungen auf die Erweiterung der elastischen Fläche verzichten und die Differenzgleichungen und Schnittkräfte allein mit den Verschiebungen der Hauptknoten des Gitters anschreiben, wenn an Stelle des einzelnen Plattenelementes eine nach allen Seiten durchlaufende Platte mit den gleichen Stützenbedingungen untersucht wird. Die durchlaufende Platte

wird auf Schneiden gestützt und antimetrisch oder symmetrisch belastet. Die Formänderung der benachbarten Felder ist dann antimetrisch oder symmetrisch zur Formänderung des Hauptfeldes, so daß die Verschiebungen der Nebenknoten antimetrisch oder symmetrisch mit den Verschiebungen der Hauptknoten übereinstimmen. Die Differenzengleichungen der Randknoten enthalten jedoch dann neben der Belastungsintensität  $p$  die singulären Stützkkräfte. Sie können also nur angeschrieben werden, wenn diese bekannt sind. Das gilt auch von den singulären Stützkkräften bei Pilzdecken. Daher ist die Lösung mit Differenzen nur dann möglich, wenn an diesen Punkten die Randwerte der Unbekannten Null oder vorgeschrieben sind. Beim frei aufliegenden Rand ist  $M_k = 0$  und  $w_k = 0$ , die Lösung also nach (1001), (1002) in zwei Stufen durchführbar. Beim eingespannten Rand ist  $M_k \neq 0$ ,  $w_k = 0$ , so daß nur der allgemeine Ansatz (1000) verwendet werden kann. Bei Pilzdecken ist über den Stützen  $w_k = 0$ , also ebenfalls nur der allgemeine Ansatz anwendbar, doch ist es zweckmäßig, den Stützendruck als statisch überzählige Größe zu berechnen.



Momentensumme  $M$  Durchbiegung  $w$   
 Abb. 661.  $a$  frei aufliegender,  $b$  starr eingespannter,  $c$  freier Rand.

Werden die Randbedingungen durch Bedingungen über die Antimetrie oder Symmetrie der Formänderung ersetzt, so lassen sich die Stützkkräfte  $A_{xz}, A_{yz}$  nicht mehr nach (1005) ermitteln. Sind aber die Verschiebungen  $w_k$  bekannt, so können die Differenzengleichungen für die singulären Punkte nunmehr zur Bestimmung der singulären Stützkkräfte dienen. Z. B. ist für die starr eingespannte Platte am Randknoten  $k$  nach (1000) mit

$$w_i = w_k = w_l = 0, \quad w_{k+1} = w_{k-1}, \quad w_{k+2} = w_{k-2},$$

$$2w_{k-2} + 4(w_{i-1} + w_{l-1}) - 16w_{k-1} = \bar{p}_k \frac{s^4}{N},$$

wobei  $\bar{p}_k$  die Belastungsintensität unter Berücksichtigung der Stützkraft bedeutet. Nach Abb. 662 ist

$$\bar{p}_k s^2 = -2A_{xz,k} s + p_k s^2,$$

womit wiederum wie in (1012)

$$A_{xz,k} = \frac{N}{2s^3} \left[ 16w_{k-1} - 2w_{k-2} - 4(w_{i-1} + w_{l-1}) + \frac{p_k s^4}{N} \right].$$

Den Verlauf von  $M_k$  und  $w_k$  für einen Schnitt  $y = \text{const}$  am Rande bei Ersatz der Randbedingungen durch Bedingungen über die Antimetrie oder Symmetrie der Formänderung zeigt Abb. 662. Die Belastungsfunktion  $p$  ist dabei konstant angenommen worden. Sie hat im Randknoten beim eingespannten Rand eine Singularität, beim frei aufliegenden Rand einen Sprung.

1. Freie Auflagerung der Ränder. Die Verschiebungen  $w_{10}$  bis  $w_{25}$  und die Momentensummen  $M_{10}$  bis  $M_{25}$  in den Randpunkten sind nach S. 647 Null (Abb. 660). Daher werden zunächst die Momentensummen  $M_1$  bis  $M_9$  der Hauptknoten nach (1001) und daraus die Verschiebungen  $w_1$  bis  $w_9$  des Gitters nach

(1002) berechnet. Damit sind nach (1003) auch die Biegemomente  $M_{x,1}$  bis  $M_{x,9}$ ,  $M_{y,1}$  bis  $M_{y,9}$  bekannt. Um die Drillungsmomente für alle Maschenknoten nach (1003) zu berechnen, sind auch die Verschiebungen der dem Rande benachbarten Nebenknoten notwendig. Diese ergeben sich aus der Bedingung (938) für die Momentensummen am Rande.

$$w_{27} = -w_1 \text{ usw.}, \quad w_{33} = -w_3 \text{ usw.}, \quad \text{an der Ecke } w_{31} = w_3 \text{ usw.} \quad (1014)$$

Die Berechnung der Querkräfte  $Q_{10}$  bis  $Q_{25}$  und der Stützkkräfte  $A_{10}$  bis  $A_{25}$  nach (1004), (1005) setzt außerdem noch die Kenntnis über die Größe der Momentensummen  $M_{26}$  bis  $M_{49}$  in denselben Nebenknoten voraus. Sie ergeben sich aus den Differenzgleichungen (1001) für die Randpunkte.

$$M_1 + M_{27} = -p_{10} s^2 \text{ usw.}, \quad M_3 + M_{33} = -p_{14} s^2 \text{ usw.}$$

Eine andere Lösung mit Hilfe der Verschiebungen ist bereits auf S. 683 angegeben worden.

2. Starre Einspannung der Ränder. Die Verschiebungen  $w_{10}$  bis  $w_{25}$  sind Null, dagegen die Momentensummen  $M_{10}$  bis  $M_{25}$  von Null verschieden (Abb. 660). Daher werden die Verschiebungen  $w_1$  bis  $w_9$  der Hauptknoten mit dem allgemeinen Ansatz (1000) in einer Stufe berechnet.

Hierbei gehen die Verschiebungen der am Rande benachbarten Nebenknoten in die Gleichungen ein. Diese sind durch die Randbedingungen (942) bestimmt, da mit

$$\partial w / \partial y = 0: \quad w_{27} = w_1 \text{ usw.}, \quad \partial w / \partial x = 0: \quad w_{33} = w_3 \text{ usw.} \quad (1015)$$

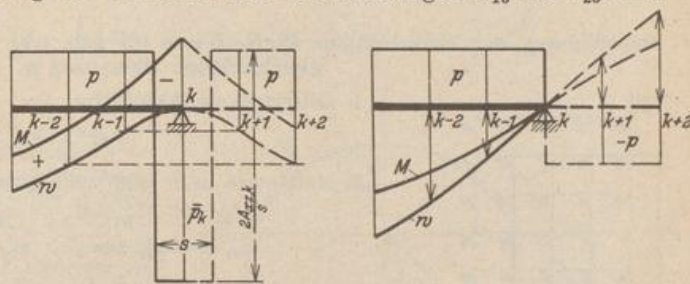
Mit den Wurzelwerten  $w_k$  sind nach (1003) alle Biege- und Drillungsmomente in den Knoten 1 bis 25 bestimmt. Die Drillungsmomente in den Randpunkten ergeben sich nach Vorschrift zu Null. Die Berechnung der Auflagerkraft ist bereits auf S. 683 abgeleitet worden.

3. Zwei anschließende Ränder (10 bis 17) der Platte sind kräftefrei, die beiden anderen (18 bis 25) frei aufgelagert (Abb. 660). Die Verschiebungen und Momentensummen in den Randknoten 17 bis 25 sind Null, so daß damit auch die Verschiebungen der Nebenknoten 38 bis 48 als antimetrisch zu den Verschiebungen der symmetrisch liegenden Hauptknoten bekannt sind. Damit können die Differenzgleichungen für die Punkte 1 bis 16 angeschrieben werden. Als Wurzeln erscheinen nur noch die unbekanntenen Verschiebungen der Nebenknoten 26 bis 36 und 51 bis 58. Diese müssen durch die Bedingungen  $M_{y,25}$  bis  $M_{y,13} = 0$ ,  $M_{x,13}$  bis  $M_{x,17} = 0$ ,  $A_{y,10}$  bis  $A_{y,13} = 0$ ,  $A_{x,13}$  bis  $A_{x,16} = 0$  und  $C_{13} = 0$  eliminiert werden.

Die beliebige Belastung von achsensymmetrischen Platten (freie Auflagerung oder starre Einspannung aller vier Ränder) wird durch die Umordnung der Belastung nach den beiden Achsen im Sinne von Abschn. 27 in vier unabhängige Teile zerlegt, so daß in (1001), (1002) nur die Momentensummen  $^{(1)}M_k \dots ^{(4)}M_k$  und die Verschiebungen  $^{(1)}w_k \dots ^{(4)}w_k$  eines Quadranten als Wurzeln auftreten.

$$M_k = ^{(1)}M_k + \dots + ^{(4)}M_k, \quad w_k = ^{(1)}w_k + \dots + ^{(4)}w_k. \quad (1016)$$

Die Momentensummen und Verschiebungen in Punkten der Symmetrieachsen  $I, II$



Symmetrie von  $M_k, w_k$  am Rande der eingespannten Platte (Belastungsfunktion mit Singularität).

Antimetrie von  $M_k, w_k$  am Rande der frei aufliegenden Platte (Belastungsfunktion mit Sprung).

Abb. 662.

sind bei Antimetrie der Belastung nach I und II Null. Die Rechnung wird dadurch vereinfacht. Sind mehrere Belastungsfälle, also auch die Einflußflächen von Verschiebungen oder Schnittkräften zu untersuchen, so wird nach Abschn. 29 die konjugierte Matrix zu den Differenzgleichungen (1000) oder (1001), (4002) gebildet.

Flächenlasten, die nicht mit der Teilung des Gitters in Beziehung stehen, werden maschenweise zu Einzellasten zusammengefaßt und nach dem Hebelgesetz auf die Maschenknoten verteilt.

Der Umfang der Zahlenrechnung nimmt wesentlich zu, wenn die Symmetrieeigenschaften der Stützung ganz oder teilweise wegfallen. Die Art der Untersuchung nach S. 684 wird jedoch nicht geändert. Der Spannungszustand an kräftefreien Ecken  $k$  liefert stets 5 Bedingungen. Neben denjenigen des kräftefreien Randes mit

$$M_{x,k} = 0, \quad M_{y,k} = 0, \quad A_{xz,k} = 0, \quad A_{yz,k} = 0$$

ist nach den Bemerkungen auf S. 648 auch  $M_{xy,k} = M_{yx,k} = 0$ , also

$$(\partial^2 w / \partial x \partial y)_k = 0.$$

**Berechnung der rechteckigen Platte  $b/a = 4/3$  mit frei aufliegenden Rändern für gleichmäßige Belastung  $p$ .**

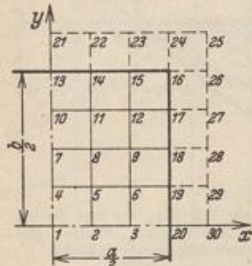


Abb. 663.

1. Gitterteilung (Abb. 663)

$$s = \frac{a}{6} = \frac{b}{8}.$$

2. Randwerte nach (938) und (1014).

$$M_{13} \text{ bis } M_{20} = 0, \quad w_{13} \text{ bis } w_{20} = 0.$$

$$w_{21} = -w_{10} \text{ usw.}, \quad w_{30} = -w_3 \text{ usw.}$$

$$w_{24} = w_{26} = 0, \quad w_{25} = w_{12}.$$

3. Differenzgleichungen (1001), (1002) für die 12 Gitterpunkte.

$$p_k s^2 = \frac{10^4}{36} \cdot \frac{p a^2}{10^4}, \quad \frac{M_k s^2}{N} = \frac{M_k}{10^{-4} p a^2} \cdot \frac{10}{36} \cdot \frac{p a^4}{10^5 N}.$$

I	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\frac{p a^2}{10^4}$	$\frac{p a^4}{10^5 N}$
4	-2		-2									277,8	256,3
-1	4	-1		-2								277,8	229,7
	-1	4			-2							277,8	147,2
-1			4	-2		-1						277,8	244,1
	-1		-1	4	-1		-1					277,8	219,1
		-1		-1	4			-1				277,8	140,8
			-1			4	-2		-1			277,8	204,7
				-1		-1	4	-1		-1		277,8	184,4
					-1		-1	4			-1	277,8	120,0
						-1			4	-2		277,8	128,8
							-1		-1	4	-1	277,8	117,2
								-1		-1	4	277,8	78,3