Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Zahlenbeispiele

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

sind bei Antimetrie der Belastung nach I und II Null. Die Rechnung wird dadurch vereinfacht. Sind mehrere Belastungsfälle, also auch die Einflußflächen von Verschiebungen oder Schnittkräften zu untersuchen, so wird nach Abschn. 29 die konjugierte Matrix zu den Differenzengleichungen (1000) oder (1001), (1002) gebildet.

Flächenlasten, die nicht mit der Teilung des Gitters in Beziehung stehen, werden maschenweise zu Einzellasten zusammengefaßt und nach dem Hebelgesetz auf die Maschenknoten verteilt.

Der Umfang der Zahlenrechnung nimmt wesentlich zu, wenn die Symmetrieeigenschaften der Stützung ganz oder teilweise wegfallen. Die Art der Untersuchung nach S. 684 wird jedoch nicht geändert. Der Spannungszustand an kräftefreien Ecken k liefert stets 5 Bedingungen. Neben denjenigen des kräftefreien Randes mit

$$M_{x,k} = 0, \qquad M_{y,k} = 0, \qquad A_{xz,k} = 0, \qquad A_{yz,k} = 0$$

ist nach den Bemerkungen auf S. 648 auch $M_{xy,k} = M_{yx,k} = 0$, also

$$(\partial^2 w/\partial x\, \partial y)_k = 0\,.$$

Berechnung der rechteckigen Platte $b/a = 4/3$ mit frei aufliegenden Rändern für gleichmäßige Belastung p.

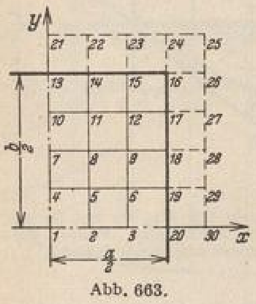


Abb. 663.

1. Gitterteilung (Abb. 663)
$$s = \frac{a}{6} = \frac{b}{8}\,.$$
2. Randwerte nach (938) und (1014).
$$M_{13} \text{ bis } M_{20} = 0\,, \qquad w_{13} \text{ bis } w_{20} = 0\,.$$
$$w_{21} = -w_{10} \text{ usw.}, \qquad w_{30} = -w_3 \text{ usw.}$$
$$w_{24} = w_{26} = 0\,, \qquad w_{25} = w_{12}\,.$$
3. Differenzengleichungen (1001), (1002) für die 12 Gitterpunkte.
$$p_k s^2 = \frac{10^4}{36}\cdot\frac{p a^2}{10^4}\,, \qquad \frac{M_k s^2}{N} = \frac{M_k}{10^{-4} p a^2}\cdot\frac{10}{36}\cdot\frac{p a^4}{10^5 N}\,.$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\frac{p a^2}{10^4}$	$\frac{p a^4}{10^5 N}$
4	−2		−2									277,8	256,3
−1	4	−1		−2								277,8	229,7
	−1	4			−2							277,8	147,2
−1			4	−2		−1						277,8	244,1
	−1		−1	4	−1		−1					277,8	219,1
		−1		−1	4			−1				277,8	140,8
			−1			4	−2		−1			277,8	204,7
				−1		−1	4	−1		−1		277,8	184,4
					−1		−1	4			−1	277,8	120,0
						−1			4	−2		277,8	128,8
							−1		−1	4	−1	277,8	117,2
								−1		−1	4	277,8	78,3

4. Die Iteration einer Näherungslösung liefert

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
M_k	923	827	530	879	789	507	737	664	432	464	422	282	$10^{-4}\, p\, a^2$
w_k	661	577	339	617	539	317	486	425	251	273	239	142	$10^{-5}\, p\, a^4/N$

5. Schnittkräfte nach (1003) ff. und (1008), z. B.

$$M_{x,1} = \frac{36\,N}{a^2} \cdot \frac{10^{-5}\, p\, a^4}{N} \left[-577 + 2 \cdot 661 - 577 + \frac{1}{6}(-617 + 2 \cdot 661 - 617)\right] = 0{,}066\, p\, a^2,$$

$$M_{y,1} = \frac{36\,N}{a^2} \cdot \frac{10^{-5}\, p\, a^4}{N} \left[\frac{1}{6}(-577 + 2 \cdot 661 - 577) - 617 + 2 \cdot 661 - 617\right] = 0{,}042\, p\, a^2,$$

$$M_{xy,16} = \frac{36\,N}{4\,a^2}\left(1 - \frac{1}{6}\right) \frac{10^{-5}\, p\, a^4}{N} [-142 - 142 - 142 - 142] = -\,0{,}043\, p\, a^2,$$

$$A_{x,20} = \frac{216\,N}{2\,a^3} \cdot \frac{10^{-5}\, p\, a^4}{N} \left[4 \cdot \left(3 - \frac{1}{6}\right) 339 - 2 \cdot 577 - 2\left(2 - \frac{1}{6}\right)(317 + 317)\right] + \frac{p\, a}{12} = 0{,}475\, p\, a.$$

Die Schnittkräfte sind in Abb. 664 dargestellt. Sie stimmen gut mit den genauen Werten S. 677 überein. Der Auflagerdruck ergibt sich nach der gestrichelten Linie und ist an den Ecken nicht Null wie bei der strengen Lösung. Der Fehler nimmt mit der Gitterteilung ab. Der Auflagerdruck ist daher nach den Ecken zu kleiner als die Zahlenrechnung angibt und verläuft etwa nach der ausgezogenen Linie.

Um die Abhängigkeit des Ergebnisses der Differenzenmethode von der Gitterteilung zu zeigen, ist eine quadratische, frei aufliegende, gleichmäßig belastete Platte für $s = a/4$ und $a/8$ berechnet worden. Die Ergebnisse weichen nur wenig voneinander ab (Abb. 665).

In Abb. 666 sind die Ergebnisse für eine Einzellast in Plattenmitte mit $s = a/4$, $a/8$, $a/12$ dargestellt. Sie weichen nur in geringer Umgebung der Last voneinander ab. Daher genügt es, die Berechnung für ein grobes Gitter durchzuführen und nur im Lastbereich ein feineres Gitter einzuschalten. Für das grobe Gitter $s = a/4$ (Abb. 665a) lauten die Differenzengleichungen (1001)

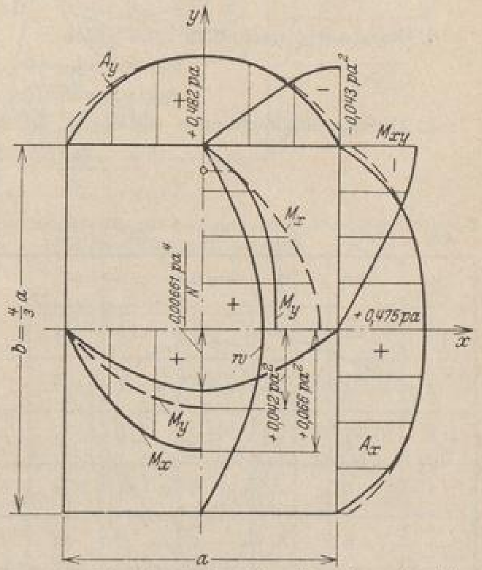
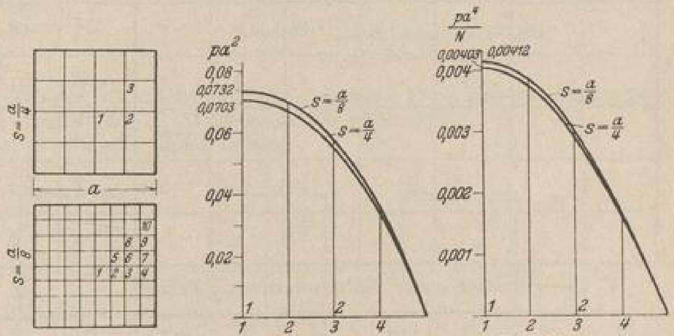


Abb. 664. Schnittkräfte der frei aufliegenden rechteckigen Platte mit gleichmäßiger Belastung p.

M_1	M_2	M_3	P
4	−4		1
−1	4	−2	0
	−2	4	0

mit dem Ergebnis

$$M_1 = 0{,}374\, P,$$
$$M_2 = 0{,}125\, P,$$
$$M_3 = 0{,}0624\, P.$$



a) Gitterteilung. b) Momentensumme M. c) Durchbiegung w.
Abb. 665.

Für das eingeschaltete feinere Gitter mit $s = a/8$ (Abb. 667) lauten die Gleichungen (1001)

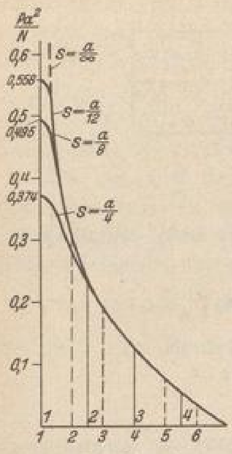


Abb. 666. Momentensumme M.

M_1	M_4	M_5	
4	-4		1
-1	4	-2	$0 + M_2$
	-2	4	$0 + 2\,M_6$

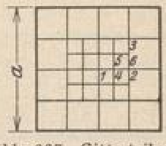


Abb. 667. Gitterteilung mit eingeschaltetem feinerem Gitter.

Mit $M_2 = 0{,}125\,P$ und $M_6 = M_2 - \frac{1}{4}(M_2 - M_3) = 0{,}112\,P$ aus einer quadratischen Interpolation ergibt sich $M_4 = 0{,}243\,P$, $M_1 = 0{,}493\,P$. Die Werte stimmen nach Abb. 666 mit dem Ergebnis für das 8teilige Gitter gut überein.

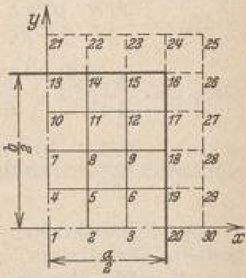


Abb. 668.

Berechnung der rechteckigen Platte $b/a = 4/3$ mit eingespannten Rändern und gleichmäßiger Belastung p.

1. Gitterteilung (Abb. 668).

$$s = \frac{a}{6} = \frac{b}{8}.$$

2. Randwerte nach (942) und (1015).

$$w_{13} \text{ bis } w_{20} = 0\,, \qquad w_{21} = w_{10} \text{ usw.}\,,$$
$$w_{30} = w_3 \text{ usw.}\,, \qquad w_{25} = w_{12}\,.$$

3. Differenzengleichungen (1000) für die 12 Gitterpunkte.

$$\frac{p_k\, s^4}{N} = \frac{10^5}{6^4} \cdot \frac{p\, a^4}{10^5\, N}\,.$$

w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	$\frac{p\,a^4}{10^5\,N}$
20	-16	2	-16	8		2						77,17
-8	21	-8	4	-16	4		2					77,17
1	4	21	-16	2	-8	4		2				77,17
-8	4		21	-16	2	-8	4		1			77,17
2	-8	2	-8	22	-8	2	-8	2		1		77,17
	2	-8	1	-8	22		2	-8			1	77,17
1			-8	4		20	-16	2	-8	4		77,17
	1		2	-8	2	-8	21	-8	2	-8	2	77,17
		1		2	-8	1	-8	21		2	-8	77,17
			1			-8	4		21	-16	2	77,17
				1		2	-8	2	-8	22	-8	77,17
					1		2	-8	1	-8	22	77,17

4. Die Iteration einer Näherungslösung liefert

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
w_k	227	187	86	207	171	79	149	124	59	67	56	27	$10^{-5}\,p\,a^4/N$

5. Schnittkräfte nach (1003 ff.) und (1012), z. B.

$$M_{x,1} = \frac{36\,N}{a^2} \cdot \frac{10^{-5}\,p\,a^4}{N}\left[-187 + 2\cdot 227 - 187 + \frac{1}{6}(-207 + 2\cdot 227 - 207)\right] = 0\,032\,p\,a^2\,,$$

$$M_{x,20} = \frac{36\,N}{a^2} \cdot \frac{10^{-5}\,p\,a^4}{N}\left[-86 + 2\cdot 0 - 86 + \frac{1}{6}\cdot 0\right] = -0\,062\,p\,a^2\,.$$

$$A_{x,20} = \frac{216\,N}{2\,a^3} \cdot \frac{10^{-5}\,p\,a^4}{N}\,[16\cdot 86 - 2\cdot 187 - 4\,(79 + 79)] + \frac{p\,a}{12} = 0.49\,p\,a\,.$$

Die Schnittkräfte sind in Abb. 669 dargestellt. Da der Auflagerdruck nach der strengen Lösung an der Ecke Null ist, wird das Ergebnis der Rechnung berichtigt (ausgezogene Linie). Der Fehler nimmt mit der Gitterteilung ab.

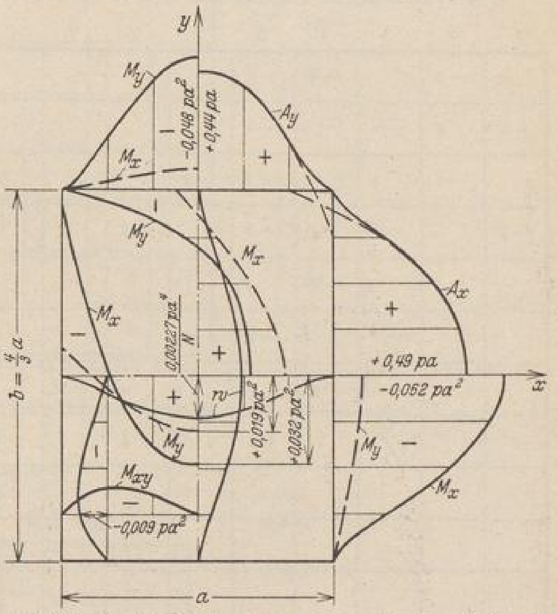


Abb. 669. Schnittkräfte der eingespannten rechteckigen Platte mit gleichmäßiger Belastung p.

Berechnung der rechteckigen Platte $b/a = 4/3$ mit frei aufliegenden Rändern und einer Einzellast.

1. Gitterteilung (Abb. 670).

$$s = \frac{a}{6} = \frac{b}{8}\,.$$

2. Randwerte nach (938) und (1014). Am ganzen Rand ist

$M = 0$ und $w = 0$, $w_{21} = -w_{10}$ usw.

3. Belastungsumordnung. Zur Berechnung der Durchbiegung nach (1002) sind 35 Differenzengleichungen aufzulösen. Es ist daher zweckmäßiger, die Belastung nach Abschn. 27 in die symmetrischen und antimetrischen Anteile zu den Achsen I, II umzuordnen (Abb. 672).

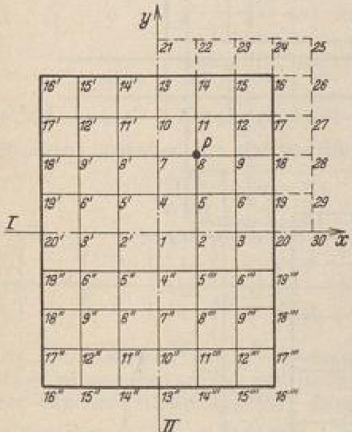


Abb. 670. Gitterteilung.

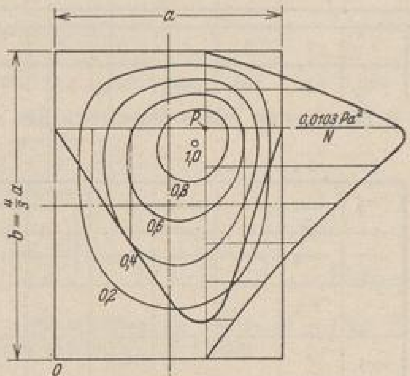


Abb. 671. Linien gleicher Durchbiegung.
$w_{max} = 0{,}0107\,Pa^2/N$.

In den Antimetrieachsen ist $w = 0$ und daher bekannt.

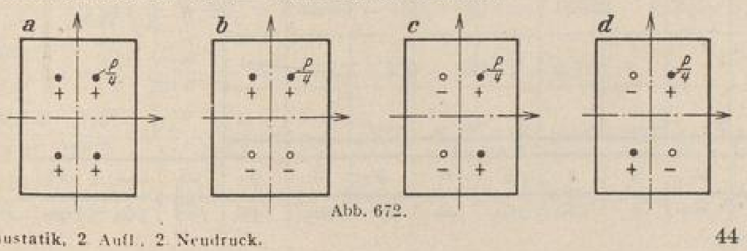


Abb. 672.

4. Differenzengleichungen (1001), (1002) für die 12 Gitterpunkte im 1. Quadranten. Im Punkt 8 ist

$$p_k\, s^2 = \frac{P}{4}, \qquad \frac{M_k}{N}\, s^2 = \frac{4\, M_k}{P} \cdot \frac{10^5}{144} \cdot \frac{P\, a^2}{10^5\, N}.$$

In allen anderen Punkten sind die Belastungsglieder Null.

a) 4 symmetrische Einzellasten $P/4$ (Abb. 672a).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$P/4$	$\frac{Pa^2}{10^5 N}$
4	−2		−2									0	228
−1	4	−1		−2								0	205
	−1	4			−2							0	113
−1			4	−2		−1						0	249
	−1		−1	4	−1		−1					0	239
		−1		−1	4			−1				0	124
			−1			4	−2		−1			0	287
				−1		−1	4	−1		−1		1	380
					−1		−1	4			−1	0	144
						−1			4	−2		0	147
							−1		−1	4	−1	0	150
								−1		−1	4	0	73

$k =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
$w^I =$	729	637	365	709	624	355	613	557	307	343	305	172	$Pa^2/10^5 N$

b) 4 Einzellasten $P/4$, symmetrisch zur y-Achse, antimetrisch zur x-Achse (Abb. 672b).

4	5	6	7	8	9	10	11	12	$P/4$	$\frac{Pa^2}{10^5 N}$
4	−2		−1						0	114
−1	4	−1		−1					0	121
	−1	4			−1				0	57
−1			4	−2		−1			0	214
	−1		−1	4	−1		−1		1	315
		−1		−1	4			−1	0	107
			−1			4	−2		0	114
				−1		−1	4	−1	0	121
					−1		−1	4	0	57

$k =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
$w^{II} =$	0	0	0	180	164	90	277	265	138	180	164	90	$Pa^2/10^5 N$

c) 4 Einzellasten $P/4$, symmetrisch zur x-Achse, antimetrisch zur y-Achse (Abb. 672c).

2	3	5	6	8	9	11	12	$P/4$	$\frac{Pa^2}{10^5 N}$
4	−1	−2						0	50,7
−1	4		−2					0	37,6
−1		4	−1	−1				0	82,8
	−1	−1	4		−1			0	49,8
		−1		4	−1	−1		1	230,8
			−1	−1	4		−1	0	79,3
				−1		4	−1	0	66,8
					−1	−1	4	0	36,5

$k =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
$w^{III} =$	0	69	60	0	82	67	0	111	75	0	55	41	$Pa^2/10^5 N$

d) 4 antimetrische Einzellasten (Abb. 672d).

5	6	8	9	11	12	$\frac{P}{4}$	$\frac{Pa^2}{10^5 N}$
4	−1	−1				0	64,6
−1	4		−1			0	34,4
−1		4	−1	−1		1	224,2
	−1	−1	4		−1	0	73,2
		−1		4	−1	0	64,6
			−1	−1	4	0	34,4

$k =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
$w^{IV} =$	0	0	0	0	49	36	0	96	60	0	49	36	$Pa^2/10^5 N$

Die Superposition der Einzelergebnisse liefert die Ausbiegung infolge $P = 1$ im Punkt 8 mit $w_k = w_k^I + w_k^{II} + w_k^{III} + w_k^{IV}$ nach der Zusammenstellung auf S. 692.
Das Ergebnis ist in Abb. 671 dargestellt.

5. Schnittkräfte nach (1003) ff. und (1008), z. B.

$$M_{x,8} = \frac{36\,N}{a^2} \cdot \frac{P a^2}{10^5 N} \left[-890 + 2 \cdot 1029 - 580 + \frac{1}{6}(-919 + 2 \cdot 1029 - 573)\right] = 0{,}246\,P,$$

$$M_{y,8} = \frac{36\,N}{a^2} \cdot \frac{P a^2}{10^5 N} \left[\frac{1}{6}(-890 + 2 \cdot 1029 - 580) - 919 + 2 \cdot 1029 - 573\right] = 0{,}239\,P,$$

$$M_{xy,16} = \frac{36\,N}{4\,a^2}\left(1 - \frac{1}{6}\right)\frac{P a^2}{10^5 N}\,[-339 - 339 - 339 - 339] = -0{,}102\,P,$$

$$A_{x,18} = \frac{216\,N}{2\,a^3}\,\frac{P a^2}{10^5 N}\left[4\left(3 - \frac{1}{6}\right)580 - 2 \cdot 1029 - 2\left(2 - \frac{1}{6}\right)(548 + 339)\right] = 1{,}36\,P/a,$$

$$A_{y,13} = \frac{216\,N}{2\,a^3} \cdot \frac{P a^2}{10^5 N}\left[4\left(3 - \frac{1}{6}\right)523 - 2 \cdot 890 - 2\left(2 - \frac{1}{6}\right)(573 + 365)\right] = 1{,}38\,P/a.$$

Die Schnittkräfte sind in Abb. 673 dargestellt. Der Auflagerdruck ergibt sich etwas zu groß, da das Integral längs des ganzen Randes etwa 1,4 P wird. Der Fehler nimmt mit der Gitterteilung ab.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
w_k	0,00729	0,00706	0,00425	0,00889	0,00919	0,00548	0,00890	0,01029	0,00580	0,00523	0,00573	0,00339	$P a^2/N$
$w_{k'}$		0,00568	0,00305		0,00657	0,00342		0,00615	0,00310		0,00365	0,00185	$P a^2/N$
$w_{k''}$				0,00529	0,00427	0,00234	0,00336	0,00277	0,00154	0,00163	0,00135	0,00077	$P a^2/N$
$w_{k'''}$					0,00493	0,00296	0,00307	0,00307	0,00184		0,00147	0,00087	$P a^2/N$

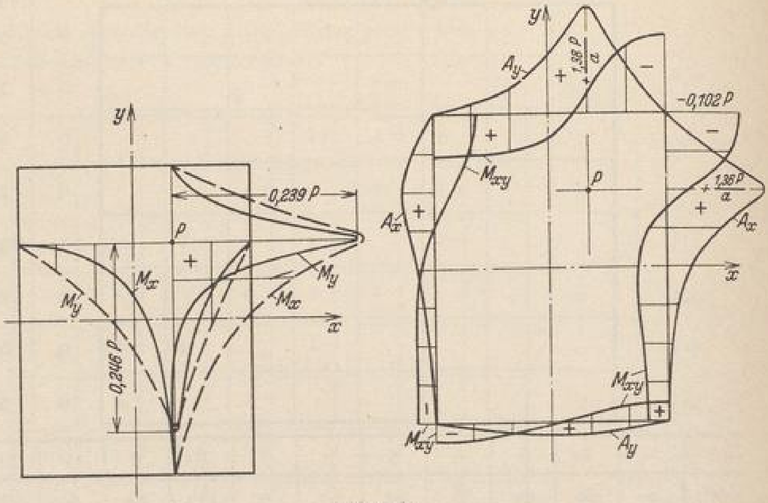


Abb. 673.

a) Biegungsmomente der frei aufliegenden rechteckigen Platte mit einer Einzellast P. b) Randkräfte der frei aufliegenden rechteckigen Platte mit einer Einzellast P.

Die Aufgabe kann auch mit einem Ansatz gelöst werden, wenn ein gröberes Gitter gewählt wird. Für das Gitter nach Abb. 674 lauten z. B. die Differenzengleichungen mit $s = a/3$

8''	8'''	2'	2	8'	8	$\frac{P}{4}$	$\frac{P a^2}{10^5 N}$
4	−1	−1				0	218
−1	4		−1			0	313
−1		4	−1	−1		0	552
	−1	−1	4		−1	0	1035
		−1		4	−1	0	958
			−1	−1	4	4	3275

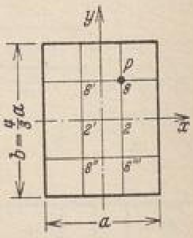


Abb. 674.

$k =$	8''	8'''	2'	2	8'	8	
$w_k =$	285	345	575	786	680	1186	$P a^2/10^5 N$

Diese Werte sind als Näherung durchaus noch brauchbar, wie der Vergleich mit der Zahlentafel am Rande der Seite zeigt. Für die Schnittkräfte sind dagegen größere Abweichungen zu erwarten.

So ist z. B. $M_{x,8} = 0{,}176\ P$ gegenüber $0{,}246\ P$. Genauere Werte ergeben sich, wenn die Biegefläche mit den Näherungswerten aufgezeichnet wird und die Ordinaten zur Bestimmung der Momente für eine engere Teilung der Zeichnung entnommen werden. Auf diese Weise wird z. B. $M_{x,8} = 0{,}255\ P$.

Berechnung einer Behälterwand mit hydrostatischer Belastung.

Die rechteckige Seitenwand eines Behälters mit quadratischem Grundriß ist am oberen Rande frei, am unteren elastisch eingespannt und an den Seiten starr eingespannt. Sie kann daher in erster Annäherung als Platte berechnet werden, die an drei Seiten starr eingespannt und an einer Seite kräftefrei ist.

Um die Rechnung abzukürzen, ist $\mu = 0$ angenommen worden.

1. Gitterteilung (Abb. 675).

$$s = \frac{a}{3} = \frac{b}{4}.$$

2. Randwerte nach (938) und (943). An den eingespannten Rändern ist

$$w_k = 0, \qquad w_{18} = w_6 \text{ usw.}, \qquad w_{25} = w_1 \text{ usw.}$$

Am freien Rand ist $M_y = 0$, $A_y = 0$. Mit (1003) folgt daraus

$$w_7 = 2\,w_5 - w_3, \qquad w_8 = 2\,w_6 - w_4, \qquad w_9 = 0.$$

Diese Beziehungen liefern mit (1005)

$$w_{10} = w_1 - 12\,w_3 + 8\,w_4 + 12\,w_5 - 8\,w_6,$$
$$w_{11} = w_2 + 4\,w_3 - 12\,w_4 - 4\,w_5 + 12\,w_6.$$

3. Die Belastungszahlen. Die hydrostatische Belastung wird nach S. 682 über den Plattenrand hinaus stetig fortgesetzt und nach dem Hebelgesetz auf die Gitterpunkte verteilt (Abb. 675).

$$p_5 = p_6 = 0, \qquad p_3 = p_4 = \tfrac{1}{3}\,p_0, \qquad p_1 = p_2 = \tfrac{2}{3}\,p_0, \qquad p_{17} = p_{16} = p_0.$$

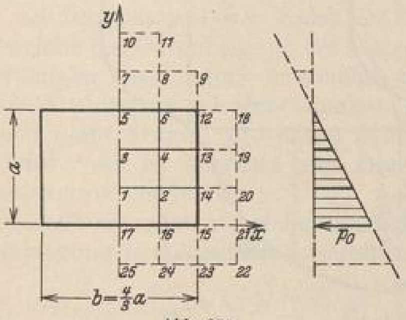


Abb. 675.

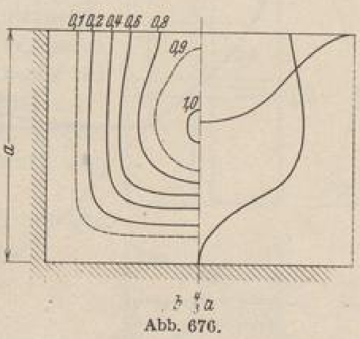


Abb. 676.

4. Differenzengleichungen (1000) für die Gitterpunkte 1 bis 6. Beim Aufstellen der Differenzengleichungen werden die Randbedingungen unter 2 berücksichtigt.

w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	$\frac{p_0\,a^4}{1000\,N}$
21	−16	−8	4	1		8,23
−8	23	2	−8		1	8,23
−8	4	19	−16	−6	4	4,12
2	−8	−8	21	2	−6	4,12
2		−12	8	16	−16	0
	2	4	−12	−8	18	0

5. Die Iteration einer Näherungslösung liefert

$k =$	1	2	3	4	5	6	
$w_k =$	2,003	1,362	2,265	1,728	2,321	1,442	$p_0\,a^4/1000\,N$

Die Biegefläche ist in Abb. 676 dargestellt.

6. Schnittkräfte nach (1003) ff. und (1012), z. B.

$$M_{y,17} = \frac{9\,N}{a^2}\,\frac{p_0\,a^4}{1000\,N}\,[-2{,}003 - 2{,}003] = 0{,}036\,p_0 a^2\,,$$

$$M_{x,12} = \frac{9\,N}{a^2}\,\frac{p_0\,a^4}{1000\,N}\,[-1{,}442 - 1{,}442] = 0{,}026\,p_0 a^2\,,$$

$$A_{y,17} = \frac{27\,N}{2\,a^3}\,\frac{p_0\,a^4}{1000\,N}\,[16\cdot 2{,}003 - 2\cdot 2{,}658 - 4\cdot 2{,}724] + \frac{p_0 a}{6} = 0{,}38\,p_0 a.$$

Die Schnittkräfte sind in Abb. 677 eingetragen.

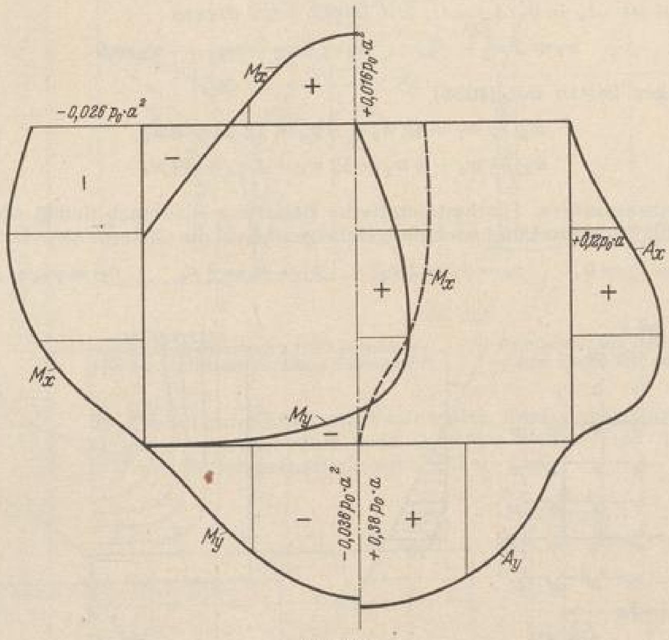


Abb. 677.

Marcus, H.: Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten. Berlin 1924, u. Arm. Beton 1919 S. 107. — Nielsen, N. S.: Bestemmelse af Spoendinger in Plader ved anvendelse af Differensligninger. Kopenhagen 1920. — Kirsten, O.: Beitrag zur Berechnung der rechteckigen Platte mit beliebigen Randbedingungen. Diss. Dresden 1924.

72. Die Abschätzung des Spannungszustandes in rechteckigen Platten nach H. Marcus.

Die Anwendung der Plattenstatik im Bauwesen ist durch die Beschreibung der statischen und geometrischen Zusammenhänge mit Differenzen und Differenzengleichungen aus den Ordinaten w_k der elastischen Fläche wesentlich gefördert worden, da die Aufgaben mit einfachen mathematischen Hilfsmitteln für die Bedürfnisse der Technik hinreichend genau gelöst werden. Da es jedoch in vielen Fällen genügt, das Spannungsbild zur Beurteilung der Sicherheit des Tragwerks in elementarer Weise summarisch zu erfassen, wird die Plattenbiegung in erster Annäherung mit der Formänderung zweier sich rechtwinklig kreuzender Trägerschaaren l_x, l_y verglichen, die sich unabhängig voneinander durchbiegen und die an den Enden unter denselben Bedingungen gelagert sind, wie der Plattenrand. Die Formänderung der Träger l_x entsteht durch eine Belastung $p(x)$, diejenige der Träger l_y aus einer Belastung $p(y)$. Ihre Summe ist an jedem Kreuzungspunkt (x, y) gleich der vorgeschriebenen Belastung $p = p(x) + p(y)$ (Abb. 678). Bilden die Trägerschaaren