Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

73. Die Pilzdecke

2. Eingespannte Platte.

$$\lambda = 4/3 = 1{,}333\,,$$

$$p_x = 0{,}759\,p\,, \qquad p_y = 0{,}241\,p\,,$$

$$\nu = 1 - \frac{5}{18} \cdot \frac{1{,}778}{4{,}160} = 0{,}881\,,$$

$$M_{x,\max} = \frac{0{,}759}{24} \cdot 0{,}881\,p\,l_x^2 = 0{,}028\,p\,l_x^2\,,$$

$$M_{y,\max} = \frac{0{,}241}{24} \cdot 0{,}881\,p\,l_y^2 = 0{,}00885\,p\,l_y^2 = 0{,}016\,p\,l_x^2\,,$$

$$M_{x,r} = -\frac{0{,}759}{12}\,p\,l_x^2 = -0{,}063\,p\,l_x^2\,,$$

$$M_{y,r} = -\frac{p\,l_x^2}{24} = -0{,}042\,p\,l_x^2\,,$$

$$N\,w_{\max} = \frac{0{,}759}{192} \cdot \frac{0{,}881}{1 + 0{,}881^2}\,p\,l_x^4 = 0{,}00196\,p\,l_x^4\,.$$

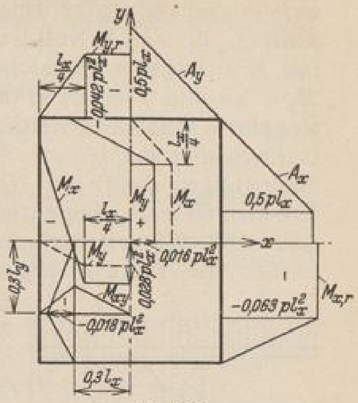


Abb. 686.

Nach (1028) ist

$$\frac{1}{3}\,M_{xy,0}\,\frac{l_x}{2}\,\frac{l_y}{2} = -0{,}00196\,p l_x^4\,, \qquad M_{xy,0} = -0{,}018\,p\,l_x^2\,.$$

Klagas: Auswertung der Marcusschen Formeln für vierseitig gelagerte Platten. Bauing. 1927 S. 251. — Marcus, H.: Die vereinfachte Berechnung biegsamer Platten, 2. Aufl. Berlin 1929.

73. Die Pilzdecke.

Die Platten mit Zwischenstützung in Punkten oder Flächen sind von A. Nadai, V. Lewe, H. Marcus und N. J. Nielsen untersucht worden. Dabei wurden zunächst gleichförmige Belastung und unbegrenzte Ausdehnung nach beiden Seiten angenommen, um die Aufgabe durch Symmetriebetrachtungen zu vereinfachen. Die äußeren Kräfte und die Randbedingungen für den Spannungs- und Verschiebungszustand eines Feldes sind in diesem Falle bekannt. Die Lösung kann daher ebenso wie für eine rechteckige Platte nach S. 674 angegeben werden.

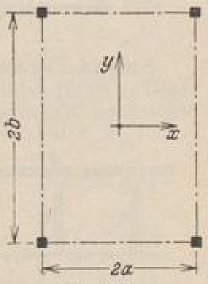


Abb. 687.

A. Nadai betrachtet den Abschnitt Abb. 687 der gleichförmig belasteten Pilzdecke mit den Randbedingungen $\partial w/\partial x = 0$, $Q_{xz} = 0$ und $P = 4abp$ in den Schnitten $x = \pm a$ und den Randbedingungen $\partial w/\partial y = 0$, $Q_{yz} = 0$ und $P = 4abp$ in den Schnitten $y = \pm b$. Die Randkräfte $P/4$, Q_{xz}, $P/4$ am Rande $x = \pm a$ und die Randkräfte $P/4$, Q_{yz}, $P/4$ am Rande $y = \pm b$ können durch eine Fouriersche Reihe als stetige Funktion angegeben werden. Die Verschiebungen bestehen wiederum aus einer Teillösung w^* für den Plattenstreifen mit $\partial w/\partial y = 0$ in $y = \pm b$ und aus einer zweiten Teillösung w^{**}, welche zusammen mit w^* die vorgeschriebenen Randbedingungen des Abschnitts erfüllt. A. Nadai bemerkt auf Grund des Ergebnisses, daß um jeder Stütze eine geschlossene Linie vorhanden ist, auf der das Biegungsmoment M_r um die Tangente verschwindet. Sie schneidet die Diagonale des quadratischen Feldes mit der Seitenlänge $2a$ in einer Entfernung von $0{,}46a$, die Verbindungslinie der Stützen in einer Entfernung $0{,}42a$ vom Stützpunkt und läßt sich durch einen Kreis mit dem Halbmesser $0{,}44a$ ersetzen. Der Spannungs- und Verschiebungszustand kann daher in dem Bereiche der Pilzdecke um den Stützpunkt mit guter Annäherung für eine frei drehbar angeschlossene Kreisplatte angeschrieben werden, die neben der gleichförmigen Belastung p in O eine Einzellast $P = -4\,a^2 p$ trägt, deren Querkraft an der Begrenzung $r = 0{,}44a$ bekannt und deren Verschiebung w_0 Null ist.

Eine ähnliche Näherungslösung ist von V. Lewe formuliert worden. Sie wird auf eine ringsum beweglich eingespannte Kreisplatte vom Radius R bezogen, deren Querkraft Q_{rz} für $r = R$ Null ist (Abb. 688). Daher ist R aus der Bedingung $\pi R^2 = 4a^2$ mit $R = 1{,}1286\,a$ vorgeschrieben. Die Platte liegt auf einem kreisförmigen Pilz mit $R_1 = \alpha a$ und $J = \infty$, so daß die Pilzdecke im Bereich der Stütze mit einer Kreisringplatte verglichen werden kann, deren Formänderung in $r = R_1$ durch die Randbedingungen $dw/dr = 0$, $Q_{rz} = -p(R^2 - R_1^2)/2\,R_1$, in $r = R$ durch die Randbedingungen $dw/dr = 0$, $Q_{rz} = 0$ bestimmt ist. Beide Lösungen können mit den Tabellen 63 u. 64 angeschrieben und auch für zwischengeschaltete kreisrunde Platten nach Abb. 689 erweitert werden.

Die von V. Lewe angegebene strenge Lösung für die beiderseits unbegrenzte gleichförmig belastete und regelmäßig unterstützte Pilzdecke beruht, wie bereits auf S. 674 bemerkt, in der Entwicklung einer bekannten, aus der Belastung p und dem Flächendruck $\bar{p}$ bestehenden periodischen Funktion in eine doppelte trigonometrische Reihe. Damit kann die Lösung für das Feld Abb. 687 ebenso wie bei der rechteckigen Platte (983) nach Navier angeschrieben werden. Leider konvergieren die Reihen vor allem für die Schnittkräfte schlecht, so daß die Zahlenrechnung mühsam und umfangreich ist. Sie wird durch eine Anzahl von Tabellen erleichtert, die Lewe seinem mehrfach erwähnten Buche beigegeben hat. Diese enthalten auch Angaben für zweiseitig und allseitig begrenzte Pilzdecken mit Streifen- und Schachbrettbelastung. Die Anwendung der Differenzenrechnung auf die Untersuchung des Spannungs- und Verschiebungszustandes von Pilzdecken ist von H. Marcus und N. J. Nielsen gezeigt worden.

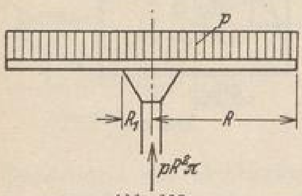


Abb. 688.

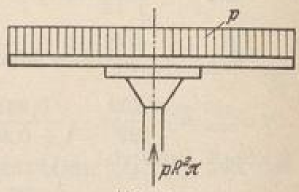


Abb. 689.

Die Berechnung einer nach zwei Seiten unendlich langen Pilzdecke mit einer Stützenreihe und frei aufliegenden Rändern.

Ansatz. Die Aufgabe kann mit Differenzen in einer Stufe nach (1000) oder in zwei Stufen nach (1001), (1002) gelöst werden. Da die Iteration einer Anfangslösung in beiden Fällen infolge der schlechten Konvergenz versagt, bleibt nur die algebraische Auflösung der Gleichungen nach C. F. Gauß übrig, um die Ausbiegung w so genau angeben zu können, daß die Schnittkräfte trotz der Fehlerempfindlichkeit der Rechnung nach (1003) ff. brauchbar sind. Die algebraische Auflösung in zwei Stufen ist naturgemäß einfacher, obwohl dann für die Stützpunkte wegen ihrer singulären Eigenschaften keine Differenzengleichungen angeschrieben werden können, solange die Stützkräfte unbekannt sind. Deshalb werden diese als statisch unbestimmte Größen eines Hauptsystems, des frei aufliegenden Plattenstreifens, berechnet.

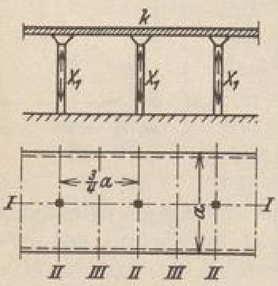


Abb. 690.

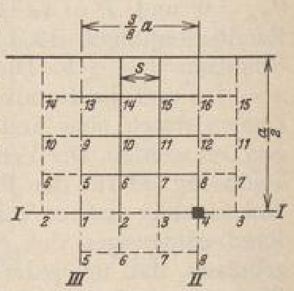


Abb. 691.

Bezeichnet w_1 die senkrechte Verschiebung eines Punktes des Streifens infolge $-X_1 = 1$, w_0 diejenige infolge der Belastung, so ist

$$w = w_0 - X_1 w_1, \tag{1033}$$

an der Stütze k: $w_k = 0 = w_{k0} - X_1 w_{k1}$,

$$X_1 = w_{k0}/w_{k1}. \tag{1034}$$

Belastung. Die Schnittkräfte werden für gleichmäßig verteilte Last, Schachbrettlast und Streifenlast angegeben. Bei gleichmäßig verteilter Last ist der Spannungs- und Formänderungszustand durch die Symmetrieachsen I, II, III Abb. 690 ausgezeichnet, so daß es genügt, einen von diesen Achsen begrenzten Abschnitt zu untersuchen (Abb. 691). Durch Belastungsumordnung ergeben sich daraus auch die Schnittkräfte für Schachbrettlast und Streifenlast.

I. Berechnung für gleichmäßig verteilte Last p t/m².

A. Belastung des Hauptsystems durch $-X_1 = 1$ in allen Angriffspunkten der Zwischenstützen.

1. Gitterteilung. $s = a/8$.
2. Randwerte. M und w sind zu den Achsen I, II, III symmetrisch; am Rande Null.
3. Differenzengleichungen (1001), (1002) für 16 Gitterpunkte (Abb. 691).

Die Belastungszahlen $p_k s^2$ der ersten Stufe sind bis auf diejenige für den Angriffspunkt (4) der Zwischenstütze Null, dagegen ist $p_4 s^2 = 1$. Die Belastungszahlen der zweiten Stufe sind

$$\frac{M_k s^2}{N} = \frac{M_k}{64} \frac{a^2}{N}.$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16		a^2/N
4	−2			−2												0	$M_1/64$
−1	4	−1			−2											0	$M_2/64$
	−1	4	−1			−2										0	$M_3/64$
		−2	4				−2									1	$M_4/64$
−1				4	−2			−1								0	$M_5/64$
	−1			−1	4	−1			−1							0	$M_6/64$
		−1			−1	4	−1			−1						0	$M_7/64$
			−1			−2	4				−1					0	$M_8/64$
				−1				4	−2			−1				0	$M_9/64$
					−1			−1	4	−1			−1			0	$M_{10}/64$
						−1			−1	4	−1			−1		0	$M_{11}/64$
							−1			−2	4				−1	0	$M_{12}/64$
								−1				4	−2			0	$M_{13}/64$
									−1			−1	4	−1		0	$M_{14}/64$
										−1			−1	4	−1	0	$M_{15}/64$
											−1			−2	4	0	$M_{16}/64$

4. Auflösung. Um den Ansatz für die Anwendung des Gaußschen Algorithmus zu vereinfachen, wird das System partieller Differenzengleichungen zweiter Ordnung in simultane Gruppen totaler Differenzengleichungen verwandelt. Das Verfahren ist von H. Marcus allgemein gezeigt worden. Die partielle Differenzengleichung jeder der beiden Stufen enthält neben drei Wurzeln M oder w mit den Fußziffern $(k-1)$, k, $(k+1)$ einer Zeile k noch zwei Vorzahlen mit den Fußziffern i, l der benachbarten Zeilen. Daher besteht der Sinn der Transformation darin, die Wurzeln einer Zeile k derart durch ebenso viele unabhängige neue Unbekannte zu ersetzen, daß in den transformierten Gleichungen nur die Fußziffern dreier aufeinanderfolgender Zeilen erscheinen. Auf diese Weise entstehen hier vier voneinander unabhängige Gruppen von totalen Differenzengleichungen, von denen jede soviel dreigliedrige Gleichungen und Unbekannte enthält, als Gitterpunkte auf einer Zeile liegen.

Das Gitter Abb. 691 zur Berechnung der Pilzdecke besteht aus vier Zeilen und vier Normalen, die sich in 16 Gitterpunkten schneiden. Daher lassen sich in der Matrix unter 3 vier Gruppen von je 4 Differenzengleichungen unterscheiden. Von diesen wird eine mittlere mit den Gitterpunkten $5 \equiv k$ bis $8 \equiv k + 3$ herausgegriffen, um an einem Beispiel die Transformation zu zeigen. Die dieser Gruppe zugeordneten Gitterzeilen werden mit $i \equiv 1$, $k \equiv 5$, $l \equiv 9$ unterschieden.

M_i	M_{i+1}	M_{i+2}	M_{i+3}	M_k	M_{k+1}	M_{k+2}	M_{k+3}	M_l	M_{l+1}	M_{l+2}	M_{l+3}	
-1				4	-2			-1				g_k
	-1			-1	4	-1			-1			g_{k+1}
		1 —			-1	4	-1			-1		g_{k+2}
			-1			-2	4				-1	g_{k+3}

Die Gleichungen werden mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ multipliziert und darauf addiert. Das Ergebnis lautet:

$$\begin{aligned} &-\alpha_1 M_i - \alpha_2 M_{i+1} - \alpha_3 M_{i+2} - \alpha_4 M_{i+3} + (4\alpha_1 - \alpha_2) M_k + (-2\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_3) M_{k+1} \\ &+ (-\alpha_2 + 4\alpha_3 - 2\alpha_4) M_{k+2} + (-\alpha_3 + 4\alpha_4) M_{k+3} - \alpha_1 M_l - \alpha_2 M_{l+1} - \alpha_3 M_{l+2} - \alpha_4 M_{l+3} \\ &= \alpha_1 g_k + \alpha_2 g_{k+1} + \alpha_3 g_{k+2} + \alpha_4 g_{k+3}; \end{aligned} \tag{1035}$$

es wiederholt sich nach Eintauschung der zugeordneten Fußziffern bei jeder der vier Gruppen. Um unabhängige Wurzeln totaler Differenzengleichungen zu erhalten, werden die Vorzahlen derart bestimmt, daß

$$\frac{4\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1} = \frac{-2\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_3}{\alpha_2} = \frac{-\alpha_2 + 4\alpha_3 - 2\alpha_4}{\alpha_3} = \frac{-\alpha_3 + 4\alpha_4}{\alpha_4} = c \tag{1036}$$

ist. Damit geht Gl. (1035) über in

$$\begin{aligned} &-(\alpha_1 M_i + \alpha_2 M_{i+1} + \alpha_3 M_{i+2} + \alpha_4 M_{i+3}) + c(\alpha_1 M_k + \alpha_2 M_{k+1} + \alpha_3 M_{k+2} + \alpha_4 M_{k+3}) \\ &-(\alpha_1 M_l + \alpha_2 M_{l+1} + \alpha_3 M_{l+2} + \alpha_4 M_{l+3}) = \alpha_1 g_k + \alpha_2 g_{k+1} + \alpha_3 g_{k+2} + \alpha_4 g_{k+3}, \end{aligned} \tag{1037}$$

und mit der Substitution

$$\alpha_1 M_i + \alpha_2 M_{i+1} + \alpha_3 M_{i+2} + \alpha_4 M_{i+3} = T_i \tag{1038}$$

wird daraus

$$-T_i + c\,T_k - T_l = \alpha_1 g_k + \alpha_2 g_{k+1} + \alpha_3 g_{k+2} + \alpha_4 g_{k+3}. \tag{1039}$$

Die Gl. (1036) läßt sich folgendermaßen umformen

$$-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = -2\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - \frac{\alpha_3}{\alpha_2} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_3} - 2\frac{\alpha_4}{\alpha_3} = -\frac{\alpha_3}{\alpha_4} = c - 4 = \mu.$$

Daraus entsteht das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1\mu + \alpha_2 &= 0, \\ 2\alpha_1 + \alpha_2\mu + \alpha_3 &= 0, \\ \alpha_2 + \alpha_3\mu + 2\alpha_4 &= 0, \\ \alpha_3 + \alpha_4\mu &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{1040}$$

Mit $\alpha_1 = 1$ liefern die ersten drei Gleichungen

$$\alpha_2 = -\mu, \qquad \alpha_3 = \mu^2 - 2, \qquad \alpha_4 = \frac{\mu}{2}(3 - \mu^2) \tag{1041}$$

und aus der letzten folgt die algebraische Gleichung 4ten Grades für μ:

$$\mu^4 - 5\mu^2 + 4 = 0 \tag{1042}$$

mit den vier Wurzeln $\mu_{1,2} = \pm 1$, $\mu_{3,4} = \pm 2$, so daß mit (1040) vier Systeme von α Vorzahlen bestimmt sind.

μ	$+1$	-1	$+2$	-2
α_1	1	1	1	1
α_2	-1	1	-2	2
α_3	-1	-1	2	2
α_4	1	-1	-1	1

(1043)

Sie werden nach (1038) zu der folgenden Substitution verwendet.

$$\left.\begin{array}{lll} \mu = 1: & M_k - M_{k+1} - M_{k+2} + M_{k+3} = T_k\,, & c = 5\,, \\ \mu = -1: & M_k + M_{k+1} - M_{k+2} - M_{k+3} = U_k\,, & c = 3\,, \\ \mu = 2: & M_k - 2\,M_{k+1} + 2\,M_{k+2} - M_{k+3} = V_k\,, & c = 6\,, \\ \mu = -2: & M_k + 2\,M_{k+1} + 2\,M_{k+2} + M_{k+3} = W_k\,, & c = 2\,. \end{array}\right\} \qquad (1044)$$

Die Gl. (1035) geht damit in vier neue, voneinander unabhängige Gleichungen über.

$$\left.\begin{array}{l} -T_i + 5\,T_k - T_l = g_k - g_{k+1} - g_{k+2} + g_{k+3} = \lambda_T\,, \\ -U_i + 3\,U_k - U_l = g_k + g_{k+1} - g_{k+2} - g_{k+3} = \lambda_U\,, \\ -V_i + 6\,V_k - V_l = g_k - 2\,g_{k+1} + 2\,g_{k+2} - g_{k+3} = \lambda_V\,, \\ -W_i + 2\,W_k - W_l = g_k + 2\,g_{k+1} + 2\,g_{k+2} + g_{k+3} = \lambda_W\,. \end{array}\right\} \qquad (1045)$$

Sind die neuen Unbekannten T, U, V, W dieser Gleichungen berechnet, so folgt aus (1044)

$$\left.\begin{array}{l} M_k = \tfrac{1}{6}\,(2\,T_k + 2\,U_k + V_k + W_k)\,, \\ M_{k+1} = \tfrac{1}{6}\,(-T_k + U_k - V_k + W_k)\,, \\ M_{k+2} = \tfrac{1}{6}\,(-T_k - U_k + V_k + W_k)\,, \\ M_{k+3} = \tfrac{1}{6}\,(2\,T_k - 2\,U_k - V_k + W_k)\,. \end{array}\right\} \qquad (1046)$$

Die Anwendung der Substitution (1044) auf die Matrix S. 703 liefert die vier folgenden, voneinander unabhängigen Gleichungssysteme.

Zur bequemeren Superposition werden gleich die Werte $T/6$, $U/6$, $V/6$, $W/6$ ausgerechnet und jeweils die erste der Gleichungen durch 2 dividiert, um symmetrische Matrizen zu erhalten.

$T_1/6$	$T_5/6$	$T_9/6$	$T_{13}/6$		a^2/N
2,5	−1			1/12	$\lambda_{T,1}/12$
−1	5	−1		0	$\lambda_{T,2}/6$
	−1	5	−1	0	$\lambda_{T,3}/6$
		−1	5	0	$\lambda_{T,4}/6$

$U_1/6$	$U_5/6$	$U_9/6$	$U_{13}/6$		a^2/N
1,5	−1			−1/12	$\lambda_{U,1}/12$
−1	3	−1		0	$\lambda_{U,2}/6$
	−1	3	−1	0	$\lambda_{U,3}/6$
		−1	3	0	$\lambda_{U,4}/6$

$V_1/6$	$V_5/6$	$V_9/6$	$V_{13}/6$		a^2/N
3	−1			−1/12	$\lambda_{V,1}/12$
−1	6	−1		0	$\lambda_{V,2}/6$
	−1	6	−1	0	$\lambda_{V,3}/6$
		−1	6	0	$\lambda_{V,4}/6$

$W_1/6$	$W_5/6$	$W_9/6$	$W_{13}/6$		a^2/N
1	−1			1/12	$\lambda_{W,1}/12$
−1	2	−1		0	$\lambda_{W,2}/6$
	−1	2	−1	0	$\lambda_{W,3}/6$
		−1	2	0	$\lambda_{W,4}/6$

Die λ-Zahlen beziehen sich auf die zweite Stufe des Ansatzes.

Die Auflösung dieser Gleichungen für die erste Stufe liefert

$T_1/6$	0,036369	$U_1/6$	− 0,074468	$V_1/6$	− 0,029463	$W_1/6$	0,333332
$T_5/6$	0,007590	$U_5/6$	− 0,028369	$V_5/6$	− 0,005055	$W_5/6$	0,249999
$T_9/6$	0,001581	$U_9/6$	− 0,010638	$V_9/6$	− 0,008666	$W_9/6$	0,166666
$T_{13}/6$	0,000316	$U_{10}/6$	− 0,003546	$V_{13}/6$	− 0,000144	$W_{13}/6$	0,083333

Die Superposition nach (1046) ergibt die Momentensummen

M_1	0,227672	M_5	0,203388	M_9	0,147686	M_{13}	0,076729
M_2	0,251957	M_6	0,219096	M_{10}	0,155314	M_{14}	0,079615
M_3	0,341968	M_7	0,265724	M_{11}	0,174857	M_{15}	0,086419
M_4	0,584470	M_8	0,326973	M_{12}	0,191972	M_{16}	0,091202

die, durch 64 dividiert, nach S. 703 die Absolutglieder der zweiten Stufe sind. Aus diesen werden nach (1045) die Absolutglieder der transformierten Gleichungen gebildet.

$\lambda_{T,1}/12$	0,000284136	$\lambda_{U,1}/12$	−0,000581782	$\lambda_{V,1}/12$	−0,000230178	$\lambda_{W,1}/12$	0,002604156
$\lambda_{T,2}/6$	0,000118596	$\lambda_{U,2}/6$	−0,000443262	$\lambda_{V,2}/6$	−0,000078982	$\lambda_{W,2}/6$	0,003906250
$\lambda_{T,3}/6$	0,000024708	$\lambda_{U,3}/6$	−0,000166223	$\lambda_{V,3}/6$	−0,000013540	$\lambda_{W,3}/6$	0,002604167
$\lambda_{T,4}/6$	0,000004942	$\lambda_{U,4}/6$	−0,000055408	$\lambda_{V,4}/6$	−0,000002257	$\lambda_{W,4}/6$	0,001302083

Die Auflösung für die zweite Stufe liefert

$T_1/6$	0,000135	$U_1/6$	−0,000694	$V_1/6$	−0,000086	$W_1/6$	0,028645
$T_5/6$	0,000054	$U_5/6$	−0,000460	$V_5/6$	−0,000029	$W_5/6$	0,026042
$T_9/6$	0,000017	$U_9/6$	−0,000242	$V_9/6$	−0,000007	$W_9/6$	0,019531
$T_{13}/6$	0,000004	$U_{13}/6$	−0,000099	$V_{13}/6$	−0,000002	$W_{13}/6$	0,010417

Die Superposition nach (1046) ergibt die Durchbiegung w_1.

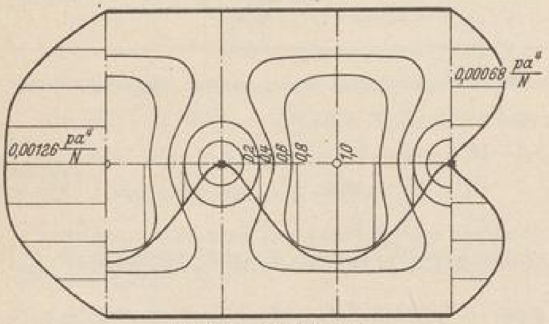


Abb. 692. Durchbiegung.

	a^2/N		a^2/N
$w_{1,1}$	0,027441	$w_{5,1}$	0,025202
$w_{2,1}$	0,027903	$w_{6,1}$	0,025557
$w_{3,1}$	0,029119	$w_{7,1}$	0,026419
$w_{4,1}$	0,030392	$w_{8,1}$	0,027098

	a^2/N		a^2/N
$w_{9,1}$	0,019074	$w_{13,1}$	0,010226
$w_{10,1}$	0,019280	$w_{14,1}$	0,010315
$w_{11,1}$	0,019749	$w_{15,1}$	0,010510
$w_{12,1}$	0,020055	$w_{16,1}$	0,010625

B. Gleichmäßig verteilte Belastung des Hauptsystems mit p t/m². Die Lösung (981) für den gleichmäßig belasteten Halbstreifen liefert

$$w_{1,0} = 0{,}013021\, p\, a^4/N\,, \qquad w_{5,0} = 0{,}012055\, p\, a^4/N\,,$$
$$w_{9,0} = 0{,}009277\, p\, a^4/N\,, \qquad w_{13,0} = 0{,}005056\, p\, a^4/N\,.$$

Die Durchbiegungen der Punkte einer waagerechten Zeile des Gitters sind gleich.

C. Der Stützendruck der gleichmäßig belasteten Pilzdecke.

Nach (1034) ist

$$X_1 = P = \frac{w_{4,0}}{w_{4,1}} = \frac{0{,}013021}{0{,}030392}\,\frac{p\,a^4\,N}{N\,a^2} = 0{,}428436\, p\, a^2.$$

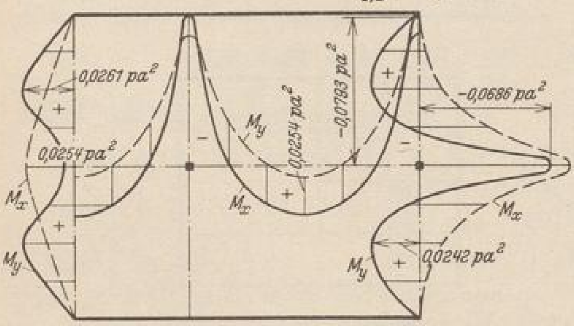


Abb. 693. Biegungsmomente.

D. Die Formänderung der Pilzdecke.

Die Superposition nach (1033) ergibt

	$p\,a^4/N$		pa^4/N
w_1	0,0012639	w_5	0,0012572
w_2	0,0010664	w_6	0,0011051
w_3	0,0005453	w_7	0,0007358
w_4	0	w_8	0,0004447

	$p\,a^4/N$		$p\,a^4/N$
w_9	0,0011054	w_{13}	0,0006748
w_{10}	0,0010170	w_{14}	0,0006365
w_{11}	0,0008162	w_{15}	0,0005530
w_{12}	0,0006850	w_{16}	0,0005037

Die Durchbiegung ist in Abb. 692 dargestellt.

E. Die Schnittkräfte.

Die Schnittkräfte ergeben sich aus der Durchbiegung nach (1003) ff. Die Biegungsmomente M_x und M_y sind in Abb. 693 für die drei Symmetrieachsen eingetragen.

II. Berechnung für Schachbrettlast (Abb. 694).

Die Belastung wird umgeordnet in eine gleichmäßig verteilte Last $+\, p/2$ und eine abwechselnde Belastung $\pm\, p/2$. Formänderung und Schnittkräfte der Pilzdecke für die verteilte Last sind aus I bekannt. Die abwechselnde Belastung bewirkt, daß sich jedes gleichartig belastete Feld wie eine ringsum frei aufliegende Platte verhält, die nach Abschn. 70 oder 71 berechnet wird. Formänderungen und Schnittkräfte sind in Abb. 695 dargestellt.

III. **Berechnung für die halbseitige Streifenlast** (Abb. 696).

Die Belastung wird umgeordnet in eine gleichmäßig verteilte Last $+ p/2$ und zwei abwechselnde Streifenlasten $\pm p/2$ nach Abb. 696. Diese bewirkt, daß sich jeder gleichartig belastete Streifen wie ein beiderseits frei aufliegender Plattenstreifen verhält, der nach (981) berechnet wird. Formänderungen und Schnittkräfte sind in Abb. 697 dargestellt.

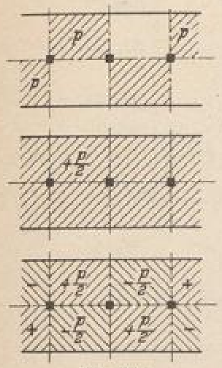
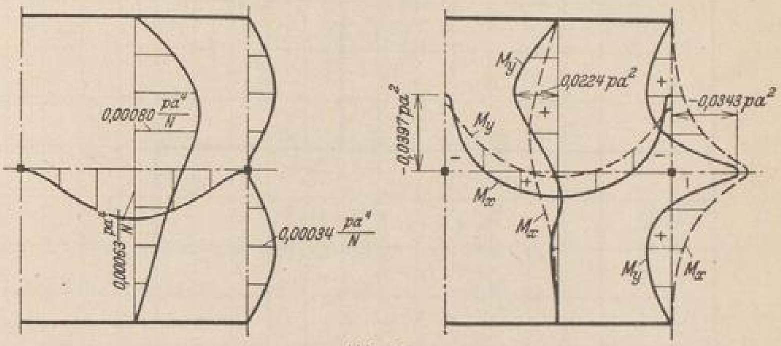


Abb. 694.



a) Durchbiegung. Abb. 695. b) Biegungsmomente.

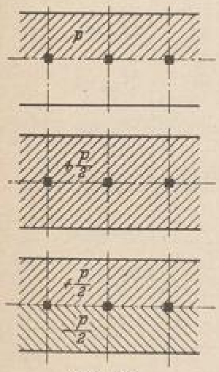
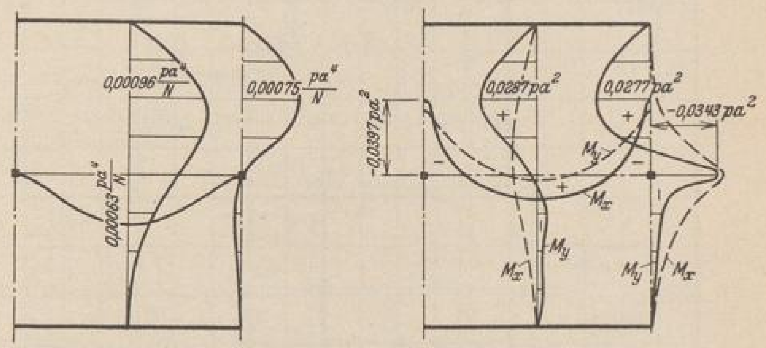


Abb. 696.



Durchbiegung. Abb. 697. Biegungsmomente.

Die Berechnung einer nach einer Seite unendlich langen Pilzdecke mit einer Stützenreihe und frei aufliegenden Rändern.

Die Berechnung wird auf das Endstück mit der Länge $b = \frac{3}{4} a$ beschränkt (Abb. 698). Da die Randwerte M und w auf der Geraden II unbekannt sind, werden hier in erster Annäherung die Formänderungen und Schnittkräfte der nach zwei Seiten unendlich langen Pilzdecken zugrunde gelegt. Der Fehler ist um so kleiner, je größer b gewählt wird. Die Rechnung wird in zwei Stufen durchgeführt und der Stützendruck als überzählige Größe berechnet. Das Hauptsystem ist ein Plattenhalbstreifen. Die Belastung sei gleichmäßig verteilt.

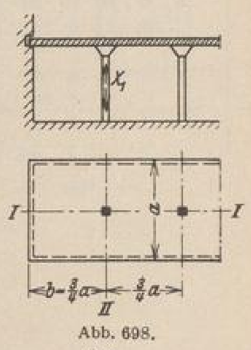


Abb. 698.

A. Belastung des Hauptsystems mit $-X_1 = 1$.

1. Gitterteilung (Abb. 699). $s = a/8$.

2. Randwerte. M und w sind an den aufliegenden Rändern Null, zur Achse I symmetrisch und auf der Geraden II vorgeschrieben.

$M_{21,1}$	0,091 202	$w_{21,1}$	0,010 625 a^2/N
$M_{22,1}$	0,191 972	$w_{22,1}$	0,020 055 ,,
$M_{23,1}$	0,326 973	$w_{23,1}$	0,027 098 ,,
$M_{24,1}$	0,584 470	$w_{24,1}$	0,030 392 ,,

3. Differenzengleichungen (1001), (1002) für die 20 Gitterpunkte (Abb. 699).

M_1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20		a^2/N
4	−1				−2															0	$M_1/64$
−1	4	−1				−2														0	$M_2/64$
	−1	4	−1				−2													0	$M_3/64$
		−1	4	−1				−2												0	$M_4/64$
			−1	4					−2											$M_{24,1}$	$M_5/64+w_{24,1}$
−1					4	−1				−1										0	$M_6/64$
	−1				−1	4	−1				−1									0	$M_7/64$
		−1				−1	4	−1				−1								0	$M_8/64$
			−1				−1	4	−1				−1							0	$M_9/64$
				−1				−1	4					−1						$M_{23,1}$	$M_{10}/64+w_{23,1}$
					−1					4	−1				−1					0	$M_{11}/64$
						−1				−1	4	−1				−1				0	$M_{12}/64$
							−1				−1	4	−1				−1			0	$M_{13}/64$
								−1				−1	4	−1				−1		0	$M_{14}/64$
									−1				−1	4					−1	$M_{22,1}$	$M_{15}/64+w_{22,1}$
										−1					4	−1				0	$M_{16}/64$
											−1				−1	4	−1			0	$M_{17}/64$
												−1				−1	4	−1		0	$M_{18}/64$
													−1				−1	4	−1	0	$M_{19}/64$
														−1				−1	4	$M_{21,1}$	$M_{20}/64+w_{21,1}$

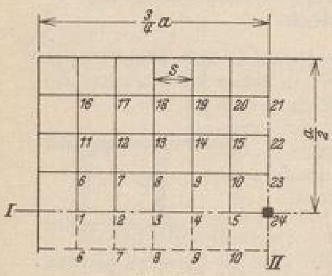


Abb. 699.

4. Auflösung. Die Auflösung wird wieder nach S. 704ff. durchgeführt. Mit $c-4=\mu$ lauten die Gleichungen für die α Vorzahlen

$$\alpha_1\mu+\alpha_2=0\,,$$
$$\alpha_1+\alpha_2\mu+\alpha_3=0\,,$$
$$\alpha_2+\alpha_3\mu+\alpha_4=0\,,$$
$$\alpha_3+\alpha_4\mu+\alpha_5=0\,,$$
$$\alpha_4+\alpha_5\mu\qquad=0\,.$$

Ihre Lösung ist

$$\alpha_1=1\,,\quad \alpha_2=-\mu\,,\quad \alpha_3=-(1-\mu^2)\,,\quad \alpha_4=\mu(2-\mu^2)\,,\quad \alpha_5=1-3\mu^2+\mu^4\,,$$

$$\mu^5-4\mu^3+3\mu=0\,,$$

$$\mu_{1,2}=\pm 1\,,\quad \mu_3=0\,,\quad \mu_{4,5}=\pm\sqrt{3}\,.$$

Die 5 Systeme α-Vorzahlen sind daher

μ	1	-1	0	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
α_1	1	1	1	1	1
α_2	-1	1	0	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
α_3	0	0	-1	2	2
α_4	1	-1	0	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
α_5	-1	-1	1	1	1

Sie führen zu der Substitution

$$\left.\begin{array}{lll}
\mu = 1: & M_k - M_{k+1} \qquad\qquad + M_{k+3} - M_{k+4} = S_k\,, & c = 5\,,\\
\mu = -1: & M_k + M_{k+1} \qquad\qquad - M_{k+3} - M_{k+4} = T_k\,, & c = 3\,,\\
\mu = 0: & M_k \qquad\qquad - M_{k+2} \qquad\qquad + M_{k+4} = U_k\,, & c = 4\,,\\
\mu = \sqrt{3}: & M_k - \sqrt{3}\,M_{k+1} + 2\,M_{k+2} - \sqrt{3}\,M_{k+3} + M_{k+4} = V_k\,, & c = 4 + \sqrt{3}\,,\\
\mu = -\sqrt{3}: & M_k + \sqrt{3}\,M_{k+1} + 2\,M_{k+2} + \sqrt{3}\,M_{k+3} + M_{k+4} = W_k\,, & c = 4 - \sqrt{3}\,,
\end{array}\right\} \tag{1047}$$

aus der sich rückwärts ergibt

$$\left.\begin{array}{l}
M_k \;\;\;= \tfrac{1}{12}\,(\;\;\,3\,S_k + 3\,T_k + 4\,U_k + \quad V_k + \quad W_k)\,,\\
M_{k+1} = \tfrac{1}{12}\,(-3\,S_k + 3\,T_k \qquad\quad - \sqrt{3}\,V_k + \sqrt{3}\,W_k)\,,\\
M_{k+2} = \tfrac{1}{12}\,(\qquad\qquad\qquad - 4\,U_k + \;2\,V_k + 2\,W_k)\,,\\
M_{k+3} = \tfrac{1}{12}\,(\;\;\,3\,S_k - 3\,T_k \qquad\quad - \sqrt{3}\,V_k + \sqrt{3}\,W_k)\,,\\
M_{k+4} = \tfrac{1}{12}\,(-3\,S_k - 3\,T_k + 4\,U_k + \quad V_k + \quad W_k)\,.
\end{array}\right\} \tag{1048}$$

Die Substitution **(1047)** führt zu den fünf unabhängigen Gleichungsgruppen:

$S_1/12$	$S_6/12$	$S_{11}/12$	$S_{16}/12$	
2,5	-1			$-M_{24,1}/24$
-1	5	-1		$-M_{23,1}/12$
	-1	5	-1	$-M_{22,1}/12$
		-1	5	$-M_{21,1}/12$

$T_1/12$	$T_6/12$	$T_{11}/12$	$T_6/12$	
1,5	-1			$-M_{24,1}/24$
-1	3	-1		$-M_{23,1}/12$
	-1	3	-1	$-M_{22,1}/12$
		-1	3	$-M_{21,1}/12$

$U_1/12$	$U_6/12$	$U_{11}/12$	$U_{16}/12$	
2	-1			$M_{24,1}/24$
-1	4	-1		$M_{23,1}/12$
	-1	4	-1	$M_{22,1}/12$
		-1	4	$M_{21,1}/12$

$V_1/12$	$V_6/12$	$V_{11}/12$	$V_{16}/12$	
$2+\sqrt{3}/2$	-1			$M_{24,1}/24$
-1	$4+\sqrt{3}$	-1		$M_{23,1}/12$
	-1	$4+\sqrt{3}$	-1	$M_{22,1}/12$
		-1	$4+\sqrt{3}$	$M_{21,1}/12$

$W_1/12$	$W_6/12$	$W_{11}/12$	$W_{16}/12$	
$2-\sqrt{3}/2$	-1			$M_{24,1}/24$
-1	$4-\sqrt{3}$	-1		$M_{23,1}/12$
	-1	$4-\sqrt{3}$	-1	$M_{22,1}/12$
		-1	$4-\sqrt{3}$	$M_{21,1}/12$

Das Ergebnis der Auflösung lautet:

$w_{1,1}$	0,0043143	$w_{6,1}$	0,0039742	$w_{11,1}$	0,0030156	$w_{16,1}$	0,0015832
$w_{2,1}$	0,0088332	$w_{7,1}$	0,0081319	$w_{12,1}$	0,0061787	$w_{17,1}$	0,0033220
$w_{3,1}$	0,0137215	$w_{8,1}$	0,0126033	$w_{13,1}$	0,0095488	$w_{18,1}$	0,0051605
$w_{4,1}$	0,0190674	$w_{9,1}$	0,0174222	$w_{14,1}$	0,0130990	$w_{19,1}$	0,0069916
$w_{5,1}$	0,0247991	$w_{10,1}$	0,0224350	$w_{15,1}$	0,0167029	$w_{20,1}$	0,0088288

B. Belastung des Hauptsystems mit gleichmäßig verteilter Last p t/m. Die Durchbiegung des Halbstreifens wird nach (995) berechnet.

$w_{1,0}$	0,00249	$w_{6,0}$	0,00231	$w_{11,0}$	0,00180	$w_{16,0}$	0,00099
$w_{2,0}$	0,00473	$w_{7,0}$	0,00439	$w_{12,0}$	0,00340	$w_{17,0}$	0,00187
$w_{3,0}$	0,00663	$w_{8,0}$	0,00615	$w_{13,0}$	0,00475	$w_{18,0}$	0,00260
$w_{4,0}$	0,00817	$w_{9,0}$	0,00757	$w_{14,0}$	0,00585	$w_{19,0}$	0,00320
$w_{5,0}$	0,00938	$w_{10,0}$	0,00869	$w_{15,0}$	0,00671	$w_{20,0}$	0,00366

$$w_{24,0} = 0{,}01032\,.$$

C. Der Stützendruck.

$$X_1 = \frac{w_{24,0}}{w_{24,1}} = \frac{0{,}01032}{0{,}30392} = 0{,}339\,563\, p\, a^2\,.$$

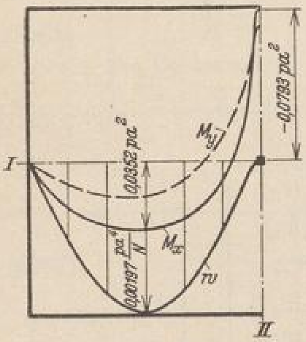


Abb. 700.

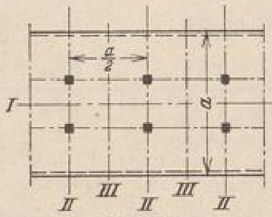


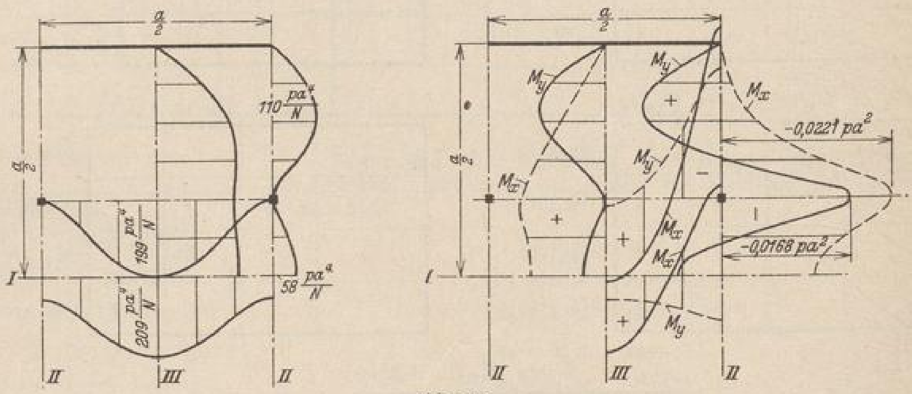
Abb. 701.

D. Formänderung und Schnittkräfte. — Die Durchbiegung beträgt nach (1033)

$$w_k = w_{k,0} - X_1\, w_{k,1}\,.$$

w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	
0,001025	0,001731	0,001971	0,001695	0,000959	$p\, a^4/N$

Schnittkräfte nach (1003) ff. Abb. 700 zeigt Durchbiegung und Schnittkräfte in der Symmetrieachse I.



a) Durchbiegung $10^6\, w$. Abb. 702. b) Biegungsmomente.

Die nach zwei Seiten unendlich lange Pilzdecke mit zwei Stützenreihen und frei aufliegenden Rändern (Abb. 701) ist für die Teilung 3 : 2 bereits von H. Marcus berechnet worden[1]. Das Ergebnis ist zum Vergleich mit den Verschiebungen und mit den Schnittkräften auf S. 706 in der Abb. 702 eingetragen.

[1] Marcus, H.: Die Theorie elastischer Gewebe 2. Aufl. S. 274. Berlin 1932.

H. Marcus hat in seiner bereits mehrfach erwähnten Arbeit auch **das quadratische Mittelfeld einer nach allen Seiten unendlich ausgedehnten Pilzdecke** untersucht. Die Ergebnisse sind in der Abb. 703 enthalten, um sie mit den Schnittkräften zu vergleichen, die im Bereiche der Stützen nach den Bemerkungen auf S. 701 weiter unten als Näherung berechnet worden sind.

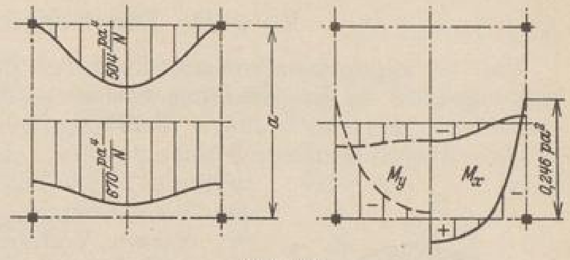


Abb. 703.
a) Durchbiegung $10^5\,w$. b) Biegungsmomente.

Biegungsmomente im Bereich der Stütze für die nach allen Seiten unendlich ausgedehnte Pilzdecke mit quadratischen Feldern.

1. Lösung nach A. Nadai (S. 701).

Stützenabstand $2\,l$. Radius der stellvertretenden Kreisplatte $a = 0{,}44\,l$. $P = 4\,p\,l^2$, $Q = (P - p\,a^2\pi)/2\,a\pi$. Die Lösung wird durch Superposition der Schnittkräfte der frei aufliegenden Kreisplatte bei gleichmäßig verteilter Last p und bei einer Einzellast P gefunden. Nach Tabelle 63 ist mit $\mu = 1/6$ (Abb. 704 u. 706a)

$$M_r = \frac{p\,a^2}{16}(3+\mu)\,\Phi_1 + \frac{P}{4\pi}(1+\mu)\,\Phi_3 = (0{,}0382\,\Phi_1 + 0{,}3761\,\Phi_3)\,p\,l^2,$$

$$M_t = \frac{p\,a^2}{16}[2(1-\mu) + (1+3\mu)\,\Phi_1] - \frac{P}{4\pi}[(1-\mu) - (1+\mu)\,\Phi_3]$$

$$= (-0{,}2452 + 0{,}0182\,\Phi_1 + 0{,}3716\,\Phi_3)\,p\,l^2.$$

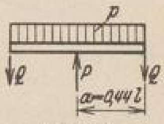


Abb. 704.

2. Lösung nach V. Lewe (S. 702).

Stützenabstand $2\,l$. Radius der stellvertretenden Kreisplatte $a = R = 1{,}1286\,l$, $R_1 = 0$. $P = 4\,p\,l^2$, M aus $dw/dr = 0$ am Rand. Die Lösung ergibt sich durch Superposition der Schnittkräfte der eingespannten Kreisplatte bei gleichmäßig verteilter Last p und bei einer Einzellast P. Nach Tabelle 63 ist (Abb. 705 u. 706b)

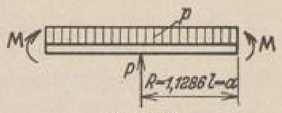


Abb. 705.

$$M_r = \frac{p\,a^2}{16}[(3+\mu)\,\Phi_1 - 2] + \frac{P}{4\pi}[1 + (1+\mu)\,\Phi_3] = (0{,}1593 + 0{,}2521\,\Phi_1 + 0{,}3716\,\Phi_3)\,p\,l^2,$$

$$M_t = \frac{p\,a^2}{16}[(1+3\mu)\,\Phi_1 - 2\mu] + \frac{P}{4\pi}[\mu + (1+\mu)\,\Phi_3] = (0{,}0266 + 0{,}1194\,\Phi_1 + 0{,}3716\,\Phi_3)\,p\,l^2.$$

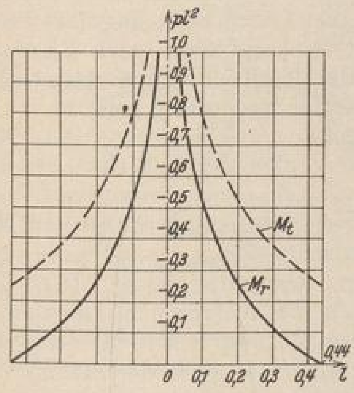


Abb. 706 a.

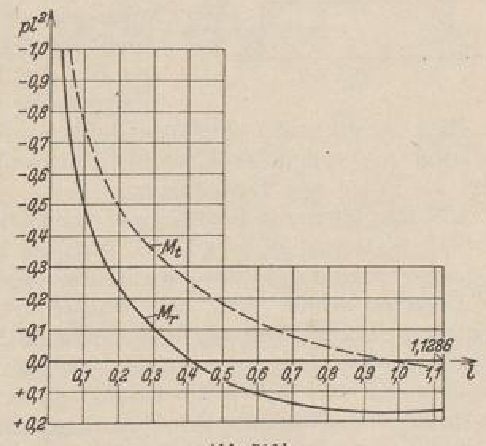


Abb. 706 b.

Nadai, A.: Die elastischen Platten 1925. — Frey, K.: Die gleichförmig belastete, in gleichen Abständen unterstützte Gerade der allseitig unendlichen Platte und deren Anwendung in der strengen Theorie der trägerlosen Decken. Bauing. 1926 S. 21. — Marcus, H.: Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten. Berlin 1928. — Lewe, V.: Pilzdecken und andere trägerlose Eisenbetonplatten. Berlin 1929.