



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

B. Die Scheiben

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

B. Die Scheiben.

74. Die Scheiben.

Um die allgemeine Problemstellung der Elastizitätstheorie zu vereinfachen, wird entweder der in y -Richtung unendlich lange Körper mit unveränderlichem Querschnitt und gleichförmiger Belastung $\mathfrak{F}(x, z)$ oder die dünne, durch zwei parallele Ebenen begrenzte Scheibe $\Delta y \cdot F(x, z)$ betrachtet (Abb. 707), deren Mittelebene am Rande durch äußere Kräfte belastet ist. Auf diese Weise entstehen Grenzfälle der allgemeinen Lösung mit ebenem Verzerrungszustand ($v = \text{const}$, $\gamma_{yz} = 0$, $\gamma_{yx} = 0$) oder mit ebenem Spannungszustand ($\sigma_y = 0$, $\tau_{yz} = 0$, $\tau_{yx} = 0$).

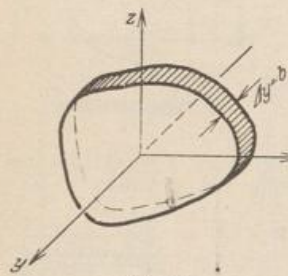


Abb. 707.

Die Spannungen $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$ der Scheibe sind parallel zur Mittelebene und bedeuten bei endlicher Dicke $\Delta y = b$ Mittelwerte, an deren Stelle auch die auf die Scheibendicke b bezogenen Längs- und Schubkräfte N_x, N_z, N_{xz} treten können. Die Beanspruchung und die Verzerrung der Scheibe infolge der Querdehnung des Baustoffs senkrecht zur Mittelebene werden vernachlässigt. Die begrenzenden Ebenen der Scheibe sind also auch nach der Formänderung eben und parallel.

Die inneren Kräfte der Scheibe bilden in jedem Punkte einen Tensor mit der aus (920) bekannten Komponententransformation. Danach ist die Summe s der beiden Längsspannungen ebenso wie die Momentensumme M der Plattenbiegung unabhängig vom Koordinatensystem und eine skalare Funktion in x und z . Mit $\psi \rightarrow \psi_0$ oder $\psi \rightarrow \psi'_0$ nach (921) entstehen die Hauptlängsspannungen σ_1, σ_2 und die Hauptschubspannungen $\tau_{12} = \tau_{21}$, die sich zu Isoklinen, Trajektorien und Linien mit gleichgroßer Hauptlängsspannung und gleichgroßer Hauptschubspannung zusammenfassen lassen. Von diesen besitzt das Feld der Hauptlängsspannungen für die bauliche Ausgestaltung der Scheiben besondere Bedeutung. Es besteht aus den Zug- und Druckkraftlinien und enthält meist auch noch singuläre Punkte, deren Existenz, deren Lage und deren Eigenschaften für das Bild des Kraftfeldes und damit für die Übertragung der Kräfte Bedeutung besitzen.

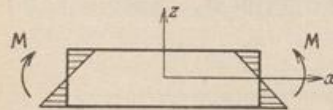


Abb. 708.

Man unterscheidet singuläre Nullpunkte, singuläre Punkte mit endlicher Kraftwirkung und singuläre Unendlichkeitspunkte als Folge der Scheibenbegrenzung oder als Folge von Einzellasten.

Um die Spannungen allein aus den Gleichgewichtsbedingungen (910) und damit statisch bestimmt zu berechnen, wird die Normalspannung σ_x nach Navier linear in z angenommen. Die Lösung gilt streng für einen ebenen Streifen, an dessen Enden Kräftepaare wirken (Abb. 708), und genügt mit der bei technischen Aufgaben notwendigen Genauigkeit auch bei anderen Belastungen von Scheiben, deren Höhe gegenüber der Länge zwischen den Stützpunkten klein ist, wenn der Bereich neben Einzellasten oder neben Unstetigkeiten der Begrenzung ausscheidet. Die statisch bestimmte Beschreibung des Spannungszustandes ist daher bei hohen Trägern mit kleiner Stützweite und im Bereich von Ecken, Knickstellen und Verzweigungen des Streifens unzureichend.

Der statisch unbestimmte Spannungszustand. 1. Annahmen und Abkürzungen nach S. 643. Der Spannungszustand ist eben und durch $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$ bestimmt. $\sigma_y = \tau_{yz} = \tau_{yx} = 0$. Die Komponenten $\varepsilon_y, \gamma_{yz}, \gamma_{yx}$ der Verzerrung sind

klein im Vergleich zu den übrigen Komponenten $\varepsilon_x, \varepsilon_z, \gamma_{xz}$ und werden daher vernachlässigt ($\varepsilon_y = \gamma_{yz} = \gamma_{yx} = 0$).

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}, \quad \mu = \frac{1}{m}, \quad \varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z, \quad s = \sigma_x + \sigma_z, \quad \Delta = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right].$$

s ist gegenüber einer Drehung des Koordinatensystems invariant.

Z bedeutet die auf die Einheit bezogene konstante Massenkraft (Eigengewicht).

2. Gleichgewichtsbedingungen nach S. 643.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + Z = 0, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}. \quad (1049)$$

3. Elastizitätsgesetz nach S. 643.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{2G} \left(\sigma_x - \frac{s}{m+1} \right), & \varepsilon_z &= \frac{1}{2G} \left(\sigma_z - \frac{s}{m+1} \right), & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G}, \\ \sigma_x &= 2G \left(\varepsilon_x + \frac{e}{m-2} \right), & \sigma_z &= 2G \left(\varepsilon_z + \frac{e}{m-2} \right), & e &= \frac{1}{2G} s \frac{m-2}{m+1}. \end{aligned} \right\} \quad (1050)$$

4. Verträglichkeitsbedingungen nach S. 18.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (1051)$$

Die Verwendung der Beziehungen 3. und 4. in 2. liefert folgende Gleichgewichtsbedingungen:

$$G \left(\Delta u + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial x} \right) = 0, \quad G \left(\Delta w + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial z} \right) + Z = 0. \quad (1052)$$

Aus der Addition der beiden nach x und z differenzierten Gleichungen entsteht mit $\partial Z / \partial z = 0$ die Bedingung

$$\Delta e = 0 \quad \text{oder} \quad \Delta s = 0, \quad \text{also} \quad -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = 0. \quad (1053)$$

Soll diese allgemeine Differentialbeziehung des Spannungszustandes durch eine Veränderliche F beschrieben werden, so muß diese die Gleichgewichtsbedingungen (1049) erfüllen. Dies geschieht nach G. B. Airy mit

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}, \quad \sigma_z = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} - Zx, \quad (1054a)$$

bei fehlenden Massenkraften auch mit

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}, \quad \sigma_z = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}, \quad (1054b)$$

so daß der ebene Spannungszustand nach (1053) und (1054) durch folgende Bedingung bestimmt ist:

$$\Delta s = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right) = \Delta \Delta F = \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial z^4} = 0. \quad (1055)$$

Die Gleichung kann ebenso wie auf S. 646 in zwei partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung zerlegt und nach (935) in Polarkoordinaten angeschrieben werden.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = s, \quad \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = 0, \quad s = \sigma_x + \sigma_z. \quad (1056)$$

$$\Delta \Delta F = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right)^2 F = 0 \quad (1057)$$

mit

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}, \quad \sigma_t = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad \tau_{rt} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right). \quad (1058)$$

Die Funktion F ist unter dem Namen Airysche Spannungsfunktion bekannt. Sie genügt nach (929) der Differentialgleichung einer an der Oberfläche kräftefreien Platte, so daß die Ordinaten F mit den Verschiebungen w einer elastischen, durch Randkräfte erzeugten Biegefläche mit den durch (1061) vorgeschriebenen Randbedingungen verglichen werden können. Die Fläche wird Airysche Fläche oder Spannungsfläche genannt, da ihre Krümmungen nach (1054b) die Längsspannungen der Scheibe beschreiben. Diese Erkenntnis ist von K. Wieghardt verwendet worden, um die Spannungen der Scheibe an der Formänderung eines dünnen Bleches auszumessen.

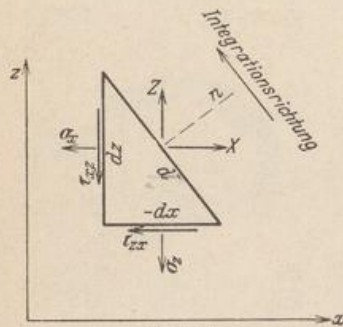


Abb. 709.

Die Randbedingungen. Die analytische Untersuchung des Spannungszustandes besteht in der Ermittlung einer Funktion $F(x, z)$, welche die partielle Differentialgleichung (1055) und die von Randkräften $X(x, z)$, $Z(x, z)$ vorgeschriebenen Bedingungen für σ_n und τ_{nl} erfüllt. Um diese auch bei einer allgemeinen Begrenzung der Scheibe in einfacher Form auszusprechen, wird das Gleichgewicht der Kräfte an einem Randabschnitt der Scheibe betrachtet. Nach Abb. 709 ist

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{zx} \cos(n, z) &= X, \\ \tau_{xz} \cos(n, x) + \sigma_z \cos(n, z) &= Z \end{aligned} \right\} \quad (1059)$$

und mit (1054b) und

$$\left. \begin{aligned} \cos(n, x) &= \frac{dz}{dl}, & \cos(n, z) &= -\frac{dx}{dl}, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \frac{dz}{dl} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \frac{dx}{dl} &= X, & -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \frac{dz}{dl} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{dx}{dl} &= Z, \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= \int_0^k X dl = R_x, & \frac{\partial F}{\partial x} &= -\int_0^k Z dl = -R_z. \end{aligned} \right\} \quad (1060)$$

Danach lassen sich die Randbedingungen der Spannungsfunktion bei beliebiger Begrenzung und Belastung der Scheibe in folgender Weise anschreiben:

$$\int \left(\frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial x} dx \right) = F = \int (R_x dz - R_z dx),$$

$$F_k = \int_0^k [X(z_k - z) - Z(x_k - x)] dl. \quad (1061a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial n} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dn} = -R_z \cos(l, z) + R_x \cos(l, x) = -R_l. \quad (1061b)$$

Die Spannungsfunktion F und ihre Normalableitung $\partial F/\partial n$ sind daher in einem beliebigen Punkte K des Randes bis auf die in (1061a) und (1061b) nicht enthaltenen Integrationskonstanten durch das Moment und die Tangentialkomponente R_l der Resultierenden der Randbelastung im Punkte k des Scheibenrandes bestimmt. Der Anfangspunkt der Integration ist beliebig. Durch seine Wahl würden nur die Integrationskonstanten in (1061a) und (1061b) festgelegt werden, welche auf die Spannungen und Verschiebungen ohne Einfluß sind, da diese nur von zweiten und höheren Differentialquotienten abhängen. Die Ableitung der Spannungsfunktion nach der Tangente des Scheibenrandes ist an einspringenden Ecken und an den Angriffspunkten von Einzellasten unstetig. Die Krümmung der Spannungsfläche wird daher hier unendlich. Dasselbe gilt von der Längsspannung.

Die formale Lösung der Aufgabe ist nur in einzelnen Fällen möglich. Zwar lassen sich ebenso wie bei der Integration der Plattengleichung (929) leicht Funktionen anschreiben, welche die Differentialgleichung (1055) erfüllen, dagegen gelingt

die Befriedigung der Randbedingungen durch eine rechnerisch brauchbare Reihenentwicklung nur bei denjenigen Scheiben, die nach drei und vier Seiten unbegrenzt sind oder parallele Ränder besitzen. Das sind die Ebene und geradlinig, keilförmig oder kreisförmig begrenzte Abschnitte der Ebene. Aus diesem Grunde ist auch die Umordnung der Belastung bei symmetrisch ausgebildeten Scheiben nützlich. Die Randbedingungen werden auf diese Weise symmetrisch oder antimetrisch. Die Anzahl der in einem Ansatz zu befriedigenden Randbedingungen ist dann kleiner und der Ansatz selbst kürzer. Er muß die Differentialgleichung und nach (1060) oder (1061) differenziert die vorgeschriebenen Randbedingungen erfüllen.

Spannungszustand in einer Halbscheibe. Randbedingungen für $z = 0$: $\sigma_z = 0$, $\tau_{xz} = 0$ oder vorgeschrieben.

a) Belastung durch die Einzellast P_1 winkelrecht zur Begrenzung (Abb. 710).

$$F = \frac{P_1}{\pi} r \alpha \sin \alpha, \quad \sigma_r = \frac{2 P_1}{\pi} \frac{\cos \alpha}{r}, \quad \sigma_t = 0, \quad \tau_{rt} = 0, \quad (1062a)$$

$$\sigma_z = \sigma_r \cos^2 \alpha, \quad \sigma_x = \sigma_r \sin^2 \alpha, \quad \tau_{xz} = -\sigma_r \sin \alpha \cos \alpha. \quad (1062b)$$

In rechtwinkligen Koordinaten lauten die Gleichungen (1062b) mit $\xi = x/a$, $\zeta = z/a$

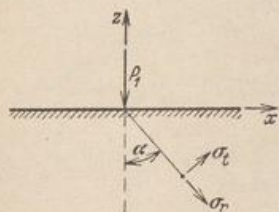


Abb. 710.

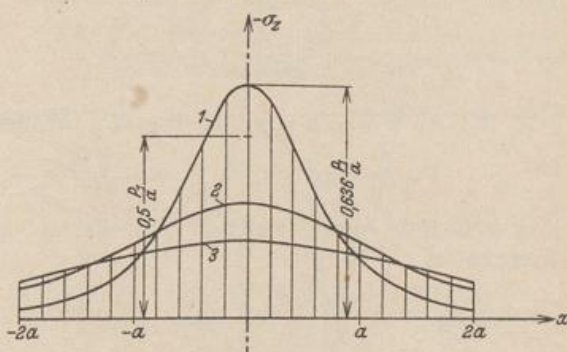


Abb. 711 a. Spannungen σ_z in den Schnitten $z = -a$ (Kurve 1), $z = -2a$ (Kurve 2), $z = -3a$ (Kurve 3).

$$\sigma_x = \frac{2 P_1}{\pi a} \frac{\xi^2 \zeta}{(\xi^2 + \zeta^2)^2},$$

$$\sigma_z = \frac{2 P_1}{\pi a} \frac{\zeta^3}{(\xi^2 + \zeta^2)^2}, \quad -\tau_{xz} = \frac{2 P_1}{\pi a} \frac{\xi \zeta^2}{(\xi^2 + \zeta^2)^2}.$$

Die Abb. 711a enthält die Spannung σ_z für mehrere Schnitte $z = \text{const}$, die Abb. 711b, c die Spannungen σ_x , τ_{xz} für mehrere Schnitte $x = \text{const}$. Die Span-

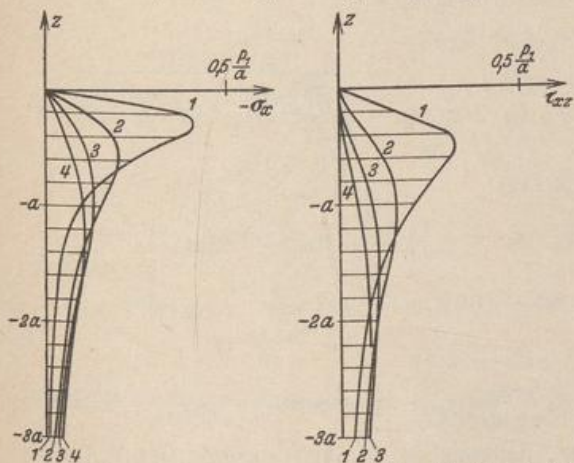


Abb. 711 b, c. Spannungen σ_x und τ_{xz} in den Schnitten $x = a/2$ (Kurve 1), $x = a$ (Kurve 2), $x = 3a/2$ (Kurve 3), $x = 2a$ (Kurve 4).

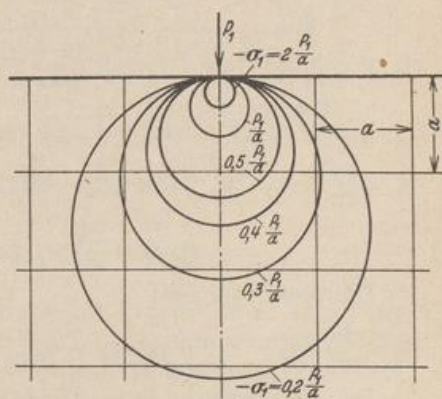


Abb. 712. Linien gleicher Hauptspannung σ_1 .

nung σ_x wechselt in diesen Schnitten nicht ihr Vorzeichen, so daß $\int_{-\infty}^0 \sigma_x dz$ einen von x unabhängigen endlichen Wert besitzen muß, der zu $-P_1/\pi$ gefunden wird.

Die Linien gleicher Hauptspannung σ_1 sind Kreise durch den Koordinatenanfangspunkt mit der Gleichung

$$\xi^2 + \left(\zeta - \frac{1}{n}\right)^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2, \quad n = \sigma_1 / \frac{P_1}{\pi a}.$$

Die Spannung σ_2 ist überall gleich Null (Abb. 712).

Die Längsspannungstrajektorien sind Kreise um den Koordinatenanfangspunkt oder die von dort ausgehenden Radien (Abb. 713).

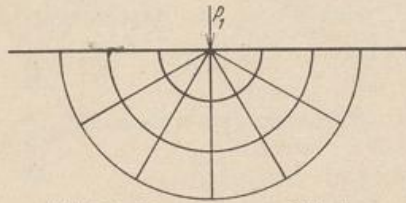


Abb. 713. Längsspannungstrajektorien.

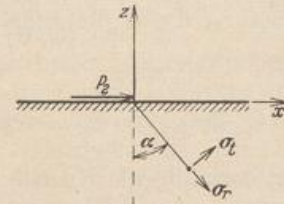


Abb. 714.

b) Belastung durch die Einzellast P_2 parallel zur Begrenzung (Abb. 714).

$$F = \frac{P_2}{\pi} r \alpha \cos \alpha, \quad \sigma_r = -\frac{2P_2}{\pi} \frac{\sin \alpha}{r}, \quad \sigma_t = 0, \quad \tau_{rt} = 0. \quad (1063)$$

c) Belastung durch mehrere Einzellasten P_k (Abb. 715). Superposition der Lösungen a).

$$\sigma_z = \frac{2}{\pi} \sum \frac{P_k \cos^3 \alpha_k}{r_k}, \quad \sigma_x = \frac{2}{\pi} \sum \frac{P_k \cos \alpha_k \sin^2 \alpha_k}{r_k}, \quad \tau_{xz} = -\frac{2}{\pi} \sum \frac{P_k \sin \alpha_k \cos^2 \alpha_k}{r_k}. \quad (1064)$$

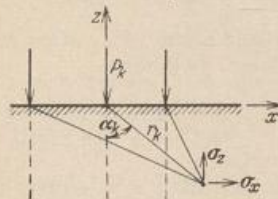


Abb. 715.

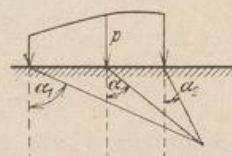


Abb. 716.

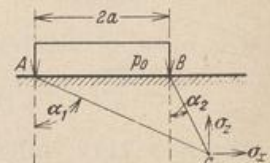


Abb. 717.

d) Stetige Streckenlast $dP = p dx$ (Abb. 716).

$$\sigma_z = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} p \cos^2 \alpha d\alpha, \quad \sigma_x = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} p \sin^2 \alpha d\alpha, \quad \tau_{xz} = -\frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} p \sin \alpha \cos \alpha d\alpha. \quad (1065)$$

Sonderfall $p = p_0 = \text{const}$ (Abb. 717):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \frac{p_0}{2\pi} [2(\alpha_2 - \alpha_1) + \sin 2\alpha_2 - \sin 2\alpha_1], & \tau_{xz} &= +\frac{p_0}{2\pi} [\cos 2\alpha_2 - \cos 2\alpha_1], \\ \sigma_x &= +\frac{p_0}{2\pi} [2(\alpha_2 - \alpha_1) - (\sin 2\alpha_2 - \sin 2\alpha_1)]. \end{aligned} \right\} \quad (1066a)$$

Hauptspannungen:

$$\sigma_1 = \frac{p_0}{\pi} [(\alpha_2 - \alpha_1) + \sin(\alpha_2 - \alpha_1)], \quad \sigma_2 = \frac{p_0}{\pi} [(\alpha_2 - \alpha_1) - \sin(\alpha_2 - \alpha_1)]. \quad (1066b)$$

Die Hauptspannung σ_1 fällt in die Richtung der Halbierungslinie des Winkels ACB (Abb. 717).

Spannungen σ_z in Schnitten $z=\text{const}$: Abb. 718 a
 „ σ_x „ „ $x=\text{const}$: „ 718 b
 „ τ_{xz} „ „ $x=\text{const}$: „ 718 c

Auch hier ist $\int_{-\infty}^0 \sigma_x dz$ von Null verschieden und gleich $-2 p_0 a / \pi$. Die Linien gleicher Hauptspannungen σ_1 oder σ_2 (Abb. 719 a) sind Kreise durch die Endpunkte der Belastung, da beide Hauptspannungen nur von der Differenz der Winkel α_1 und α_2 abhängen. Die Längsspannungstrajektorien sind in Abb. 719 b dargestellt.

Keilförmig begrenzte Scheiben mit einer Einzellast an der Spitze (Abb. 720). Die Normalspannungen σ_t und die Schubspannungen τ_{rt} der Halbscheibe in

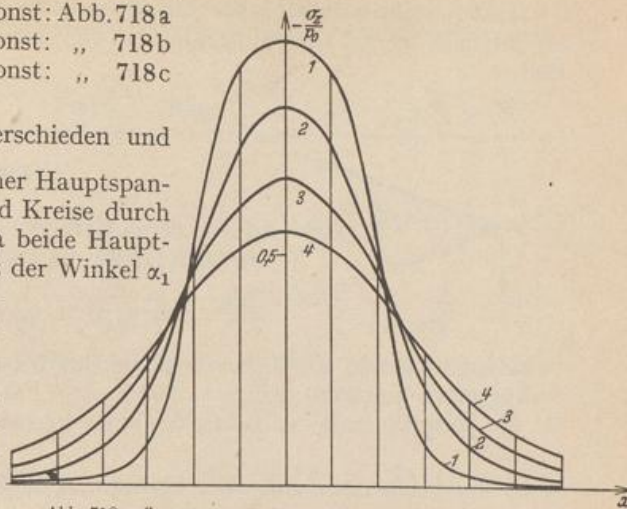


Abb. 718 a. Spannungen σ_z in den Schnitten $z = -0,5a$ (Kurve 1), $z = -a$ (Kurve 2), $z = -1,5a$ (Kurve 3), $z = -2a$ (Kurve 4).

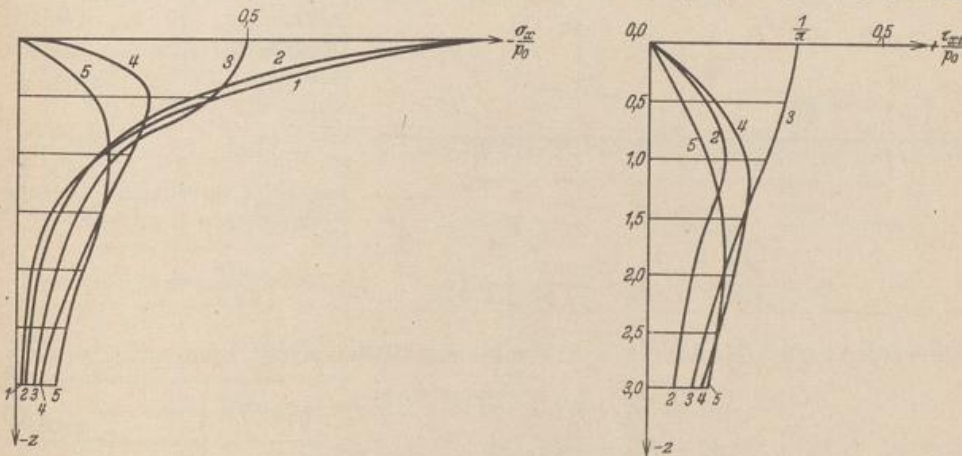


Abb. 718 b, c. Spannungen σ_x und τ_{xz} in den Schnitten $x = 0$ (Kurve 1), $x = 0,5a$ (Kurve 2), $x = a$ (Kurve 3), $x = 1,5a$ (Kurve 4), $x = 2a$ (Kurve 5).

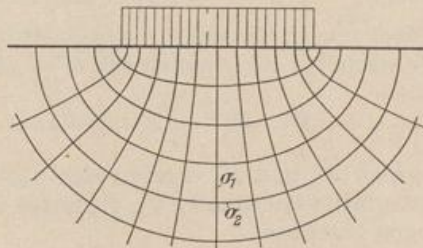
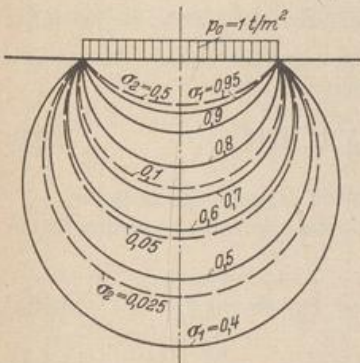


Abb. 719 b. Längsspannungstrajektorien.

Abb. 719 a. Linien gleicher Hauptspannung σ_1 oder σ_2 .

Querschnitten durch den Angriffspunkt der Lasten P_1, P_2 sind Null. Der Spannungszustand bleibt daher in einem danach abgetrennten Keil unverändert.

$$\sigma_r = \frac{2 P_1 \cos \alpha}{r(2 \beta + \sin 2 \beta)} + \frac{2 P_2 \sin \alpha}{r(2 \beta - \sin 2 \beta)}, \quad \sigma_t = 0, \quad \tau_{rt} = 0. \quad (1067)$$

Halbscheibe mit periodischer Belastung des Randes (Abb. 721). Die Differentialgleichung der Spannungsfunktion wird gliedweise durch eine trigonometrische Reihe

$$F' = \sum_0^{\infty} F'_n = F'_0 + \sum_1^{\infty} Z'_n \cos \xi_n \quad \text{oder} \quad F'' = \sum_0^{\infty} F''_n = \sum_1^{\infty} Z''_n \sin \xi_n \quad (1068a)$$

$$\text{mit } \xi_n = n\pi \frac{x}{l}$$

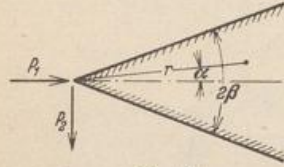


Abb. 720.

erfüllt, deren Beiwerte Z_n Funktionen von z sind und daher nach (1055) die Differentialgleichung

$$\frac{d^4 Z_n}{dz^4} - \frac{2}{l_n^2} \frac{d^2 Z_n}{dz^2} + \frac{1}{l_n^4} Z_n = 0 \quad \text{mit } l_n = \frac{l}{n\pi} \quad (1068b)$$

befriedigen müssen. Die Spannungsfunktion F ist außerdem noch durch vier Randbedingungen bestimmt. Für $z = 0$ ist $\sigma_z = \partial^2 F / \partial x^2 = -p$, $\tau_{xz} = -\partial^2 F / \partial x \partial z = 0$. Ist die Resultierende der Belastung einer Periode $2l$ von Null verschieden, so ent-

steht durch Überlagerung einer konstanten Zugbelastung $p_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{+l} p dx$ eine Belastung $p^* = p - p_0$ mit der Resultierenden Null. Für p^* ist also im negativ Un-

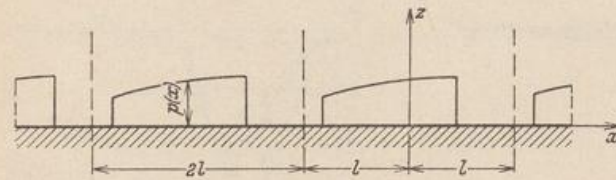


Abb. 721.

endlichen $\sigma_z = 0$, $\tau_{xz} = 0$. Die Druckbelastung p_0 erzeugt eine gleichförmige Beanspruchung der Scheibe mit

$\sigma_z = -p_0$, $\tau_{xz} = 0$, $\sigma_x = 0$,
so daß für $p = p^* + p_0$ im negativ Unendlichen folgende Bedingungen bestehen:

$$\sigma_z = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -p_0 = -\frac{1}{2l} \int_{-l}^{+l} p dx, \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = 0.$$

Sie werden nach A. N. d. ai durch die Funktionen (1068a) erfüllt, wenn mit $\zeta_n = n\pi \frac{z}{l}$

$$\left. \begin{aligned} Z'_n &= (C'_n + D'_n \zeta_n) e^{\zeta_n}, & F'_0 &= -p_0 x^2 / 2 \\ Z''_n &= (C''_n + D''_n \zeta_n) e^{\zeta_n} \end{aligned} \right\} \quad (1068c)$$

und

gesetzt wird. Die Vorzahlen C, D hängen von den Bedingungen am Rande ($z = 0$) ab. Um hier $\sigma_z = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -p$ vorzuschreiben, wird auch die periodische Belastung p in eine trigonometrische Reihe mit geraden (cos) oder ungeraden (sin) Funktionen zerlegt, je nachdem sie symmetrisch oder antisymmetrisch ist.

$$p' = A_0 + \sum_1^{\infty} A_n \cos \xi_n, \quad p'' = \sum_1^{\infty} B_n \sin \xi_n. \quad (1069)$$

Die Vorzahlen A_n und B_n ergeben sich nach bekannten Regeln (Tabelle 66).

Die Integrationskonstanten C_n, D_n lassen sich nunmehr gliedweise aus den Randbedingungen berechnen.

$$F' = -\frac{p_0 x^2}{2} + \sum_1^{\infty} A_n l_n^2 (1 - \zeta_n) e^{\zeta_n} \cos \xi_n \quad (1070a)$$

oder

$$F'' = \sum_1^{\infty} B_n l_n^2 (1 - \zeta_n) e^{\zeta_n} \sin \xi_n \quad (1070b)$$

mit $l_n = \frac{l}{n\pi}$ und $\zeta_n = \frac{n\pi z}{l}$.

Tabelle 66. Fourierkoeffizienten für einfache Belastungen.

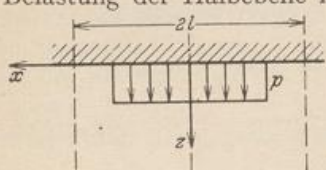
$$\gamma_n = n\pi \frac{c}{l} = \frac{c}{l} n\pi, \quad p_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{+l} p dx.$$

	$A_0 = p_0 = p \frac{c}{l}, \quad A_n = 2 p_0 \frac{\sin \gamma_n}{\gamma_n}$
	<p>Belastung mit der Resultierenden Null</p> $[p_1 c = p_2 (l - c)].$ $p_2 = p_1 \frac{c}{l - c}, \quad A_0 = p_0 = 0, \quad A_n = 2 p_2 \frac{\sin \gamma_n}{\gamma_n}$
	$A_0 = p_0 = \frac{P}{2l}, \quad A_n = \frac{P}{l}$
	$A_0 = p_0 = 2 p \frac{a}{l}, \quad A_n = 2 p_0 \frac{c}{a} \frac{\cos \gamma_n}{\gamma_n} \sin n\pi \frac{a}{l}$
	$A_0 = p_0 = \frac{P}{l}, \quad A_n = 2 \frac{P}{l} \cos \gamma_n$
	$\bar{p} = 2 p \frac{a}{l}, \quad -B_n = 2 \bar{p} \frac{c}{a} \frac{\sin \gamma_n}{\gamma_n} \sin n\pi \frac{a}{l}$
	$-B_n = 2 \frac{P}{l} \sin \gamma_n$
	$B_n = -\frac{4 p}{\pi n} \quad n = 1, 3, 5, \dots$

Bei Belastung der Halbebene nach Tabelle 66, a entsteht daher folgender Spannungszustand:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = -2 p_0 \sum_1^{\infty} \frac{\sin \gamma_n}{\gamma_n} (1 + \zeta_n) e^{\zeta_n} \cos \xi_n, \\ \tau_{xz} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = -2 p_0 \sum_1^{\infty} \frac{\sin \gamma_n}{\gamma_n} \zeta_n e^{\zeta_n} \sin \xi_n, \\ \sigma_z &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -p_0 - 2 p_0 \sum_1^{\infty} \frac{\sin \gamma_n}{\gamma_n} (1 - \zeta_n) e^{\zeta_n} \cos \xi_n. \end{aligned} \right\} (1071)$$

Die Randbedingungen für $z=0$ und $z=\infty$ lassen sich leicht nachprüfen. Bei Belastung der Halbebene nach Abb. 722 erhält p_0 das negative Vorzeichen.



Für die Spannungen am Rande ($z=0$) folgt aus

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\sum_1^{\infty} (1 + \zeta_n) e^{\zeta_n} A_n \cos \xi_n = -\sum_1^{\infty} (1 + \zeta_n) e^{\zeta_n} p_n \\ &\text{mit } \zeta_n = 0 \\ \sigma_x &= -\sum_1^{\infty} p_n = -(p - p_0). \end{aligned} \quad (1072)$$

Abb. 722.

Spannungszustand im Mittelfeld einer hohen Silowand auf mehreren Stützen.

1. Abmessungen und äußere Kräfte. Feldweite $2l = 8,00$ m, Stützenbreite $2c = 2,00$ m (Abb. 723a). Die x -Achse fällt mit dem unteren Rand, die z -Achse mit der Feldmitte zusammen. Die gleichförmig verteilte Zugbelastung $-p'$ in t/m liefert auf die Wandstärke b bezogen die Belastung $-p = -p'/b$ in t/m². Die Untersuchung wird für $p = -1$ t/m² durchgeführt. Stützkraft: $q = p \cdot l/c = 4p$. Durch Superposition von Belastung und Stützkraften entsteht das Belastungsbild Abb. 723b. Die Entwicklung nach Fourier (S. 719) liefert

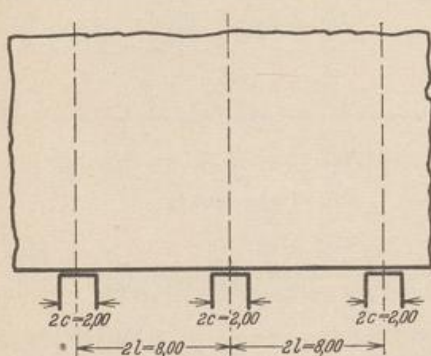


Abb. 723a.

$$A_0 = 0 \text{ und mit } p_2 = p \frac{l-c}{c} \quad A_n = 2 p_2 \frac{\sin n \pi \frac{l-c}{l}}{n \pi \frac{l-c}{l}}$$

also

$$A_n = 6p \frac{\sin n \pi \frac{3}{4}}{n \pi \frac{3}{4}} = -\frac{8}{n \pi} \sin \frac{3}{4} n \pi.$$

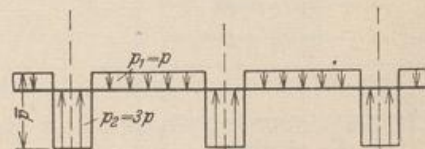


Abb. 723b.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
A_n	-1,800633	+1,273240	-0,600211	0	+0,360127	-0,424413	+0,257233	0

Die ersten fünf Fourierglieder ergeben als Annäherung der Belastungsfunktion 1 die Kurve 2 der Abb. 724, die ersten acht Glieder die Kurve 3. Wird die Berechnung der Spannungen auf die ersten fünf Glieder beschränkt, so entsteht die strenge Lösung für die Belastung nach Kurve 2.

2. Ermittlung von $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$. Nach (1054b) und (1070) ist

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\sum_1^5 (1 + \zeta_n) e^{\zeta_n} \cdot A_n \cos \xi_n = -\sum_1^5 \psi_n(\zeta) \cdot E_n(\xi), \\ \sigma_z &= -\sum_1^5 (1 - \zeta_n) e^{\zeta_n} \cdot A_n \cos \xi_n = -\sum_1^5 \varphi_n(\zeta) \cdot E_n(\xi), \\ \tau_{xz} &= -\sum_1^5 \zeta_n \cdot e^{\zeta_n} \cdot A_n \sin \xi_n = -\sum_1^5 \chi_n(\zeta) \cdot F_n(\xi). \end{aligned}$$

Die Spannungen werden für einzelne Schnitte $z = \text{const}$ berechnet. Dabei ergeben sich z. B. für $z = -0,25 l$ die folgenden Werte der Funktionen ψ, φ, χ :

n	1	2	3	5
ξ_n	-0,785398	-1,570796	-2,356194	-3,926991
$\psi_n(\xi)$	+0,09788	-0,11866	-0,12854	-0,05767
$\varphi_n(\xi)$	+0,81436	+0,53441	+0,31810	+0,09708
$\chi_n(\xi)$	-0,35824	-0,32654	-0,22332	-0,07737

Damit lassen sich die Spannungen für diesen Schnitt folgendermaßen anschreiben:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -0,09788 E_1(\xi) + 0,11866 E_2(\xi) + 0,12854 E_3(\xi) + 0,05767 E_5(\xi), \\ \sigma_z &= -0,81436 E_1(\xi) - 0,53441 E_2(\xi) - 0,31810 E_3(\xi) - 0,09708 E_5(\xi), \\ \tau_{xz} &= +0,35824 F_1(\xi) + 0,32654 F_2(\xi) + 0,22332 F_3(\xi) + 0,07737 F_5(\xi). \end{aligned}$$

Die Funktionen E, F sind für Achtelteilung der Strecke l in folgender Tabelle enthalten:

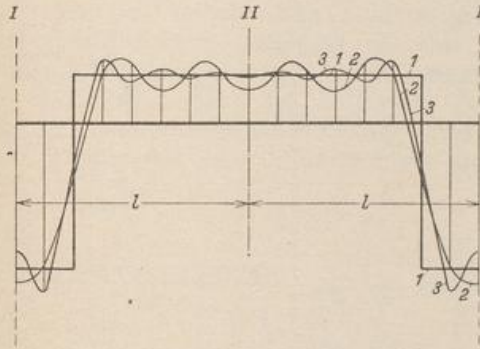


Abb. 724. Linienzug I: Gegebene Belastung, Kurve 2: Annäherung durch fünf Fourierglieder, Kurve 3: Annäherung durch acht Fourierglieder.

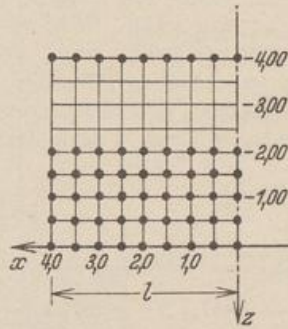


Abb. 725.

ξ	0	0,125	0,250	0,375	0,500	0,625	0,750	0,875	1
$E_1(\xi)$	-1,80063	-1,66360	-1,27324	-0,68906	0	+0,68906	+1,27324	+1,66360	+1,80063
$F_1(\xi)$	0	-0,68906	-1,27324	-1,66360	-1,80063	-1,66360	-1,27324	-0,68906	0
$E_2(\xi)$	+1,27324	+0,90032	0	-0,90032	-1,27324	-0,90032	0	+0,90032	+1,27324
$F_2(\xi)$	0	+0,90032	+1,27324	+0,90032	0	-0,90032	-1,27324	-0,90032	0
$E_3(\xi)$	-0,60021	-0,22968	+0,42442	+0,55454	0	-0,55454	-0,42442	+0,22968	+0,60021
$F_3(\xi)$	0	-0,55454	-0,42442	+0,22968	+0,60021	+0,22968	-0,42442	-0,55454	0
$E_5(\xi)$	+0,36013	-0,13782	-0,25466	+0,33272	0	-0,33272	+0,25466	+0,13782	-0,36013
$F_5(\xi)$	0	+0,33272	-0,25466	-0,13782	+0,36013	-0,13782	-0,25466	+0,33272	0

Die Auswertung der allgemeinen Ansätze liefert demnach für $z = -0,25 l$ folgende Spannungen in t/m^2 :

ξ	0	0,125	0,250	0,375	0,500	0,625	0,750	0,875	1
σ_x	+0,273	+0,234	+0,166	+0,052	-0,151	-0,266	-0,166	-0,021	+0,029
σ_z	+0,922	+0,959	+0,925	+0,834	+0,680	+0,129	-0,925	-1,921	-2,303
τ_{xz}	0	-0,051	-0,154	-0,261	-0,483	-0,849	-0,986	-0,639	0

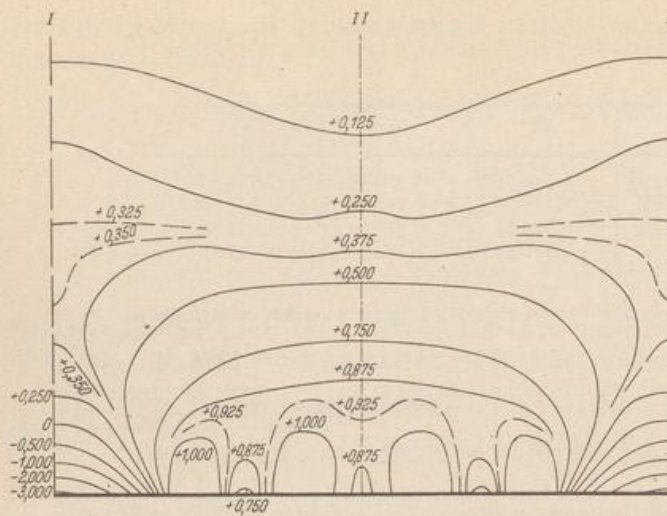
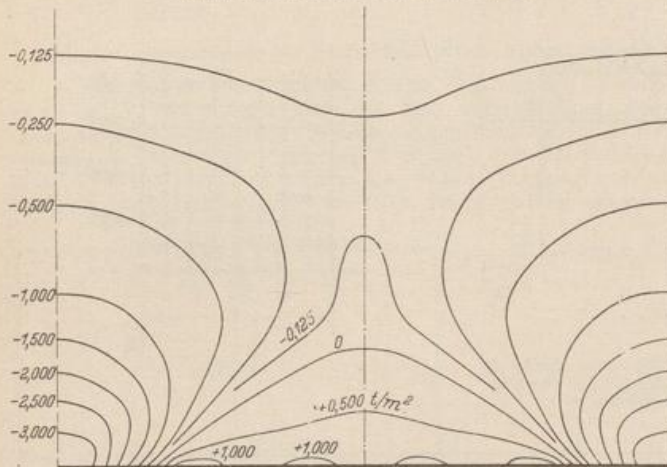
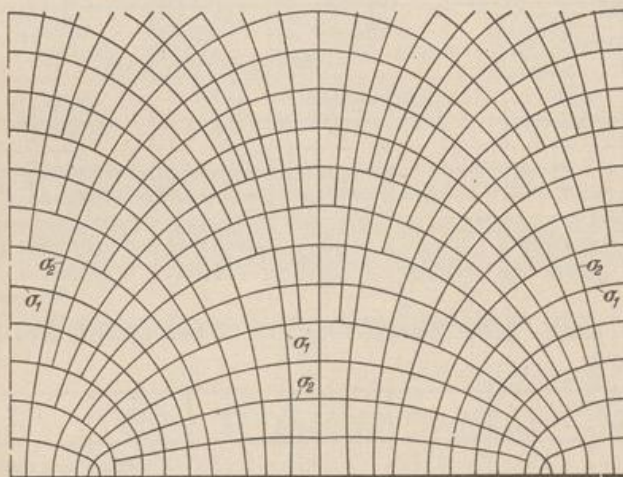
Abb. 726. Linien gleicher Hauptspannung σ_1 .Abb. 727. Linien gleicher Hauptspannung σ_2 .

Abb. 728. Längsspannungstrajektorien.

3. Hauptspannungen.
Die Hauptspannungen und ihre Richtungen werden nach (40) ermittelt. Mit den Spannungen an den in Abb. 725 eingetragenen Punkten sind die Linien gleicher Spannung σ_1 (Abbild. 726), die Linien gleicher Spannung σ_2 (Abb. 727) und die Hauptlängsspannungstrajektorien (Abb. 728) gezeichnet worden.

Föppl, A. u. L.: Drang und Zwang. Berlin u. München 1920. — Nadai, A.: Die elastischen Platten. Berlin 1925. — Wyß, Th.: Die Kraftfelder in festen elastischen Körpern. Berlin 1926. — Miura, A.: Spannungskurven in rechteckigen und keilförmigen Trägern. Berlin 1928. — Trefftz, E.: Mathematische Elastizitätstheorie, Kap. 2 im Handb. d. Physik Bd. II: Mechanik der elastischen Körper. Berlin 1928. — Flügge, W.: Spannungsermittlung in Scheiben und Schalen aus Eisenbeton. J. A. 1930 S. 481. — Hager, K.: Der ebene Spannungszustand. Z. A. M. 1932 S. 137.

75. Der Streifen mit periodischer Belastung der Ränder.

Der Spannungszustand in hohen Wänden ($H = 2h$) läßt sich am einfachsten an durchlaufenden Tragwerken nachweisen, die auf unendlich vielen, gleichweit entfernten Stützen ruhen ($L = 2l$) und als Streifen mit periodischer Belastung der Ränder idealisiert werden (Abb. 729). Das Eigengewicht des Streifens ist mit $g \text{ t/m}^3$ gleichförmig über die Fläche verteilt. Die Belastung aus Einzelkräften P und gleichförmig verteilten Streckenlasten p an den Rändern wird auf die Einheit der Scheibendicke bezogen.

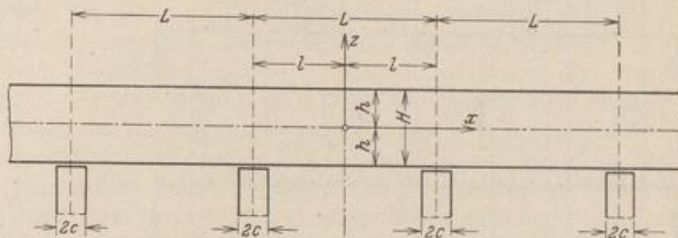


Abb. 729.

Die Belastung.

Zur allgemeinen Beurteilung des Spannungszustandes genügen die Belastungsannahmen

nach Abb. 730a bis c am oberen oder unteren Rande. Bei einem Wechsel von belasteten mit unbelasteten Feldern (Abb. 731a) werden die Spannungen aus einer gleichförmigen Belastung $p/2$ über alle Felder (Abb. 731b) mit den Spannungen aus feldweise wechselnder Belastung $\pm p/2$ (Abb. 731c) überlagert. Ist der Spannungszustand bei gestützter Belastung (Abb. 732b) bekannt, so läßt sich der Spannungszustand für die angehängte Last p (Abb. 732a) daraus durch Überlagerung mit einer gleichförmigen Querbeanspruchung $\sigma_z = +p$ (Abb. 732c)

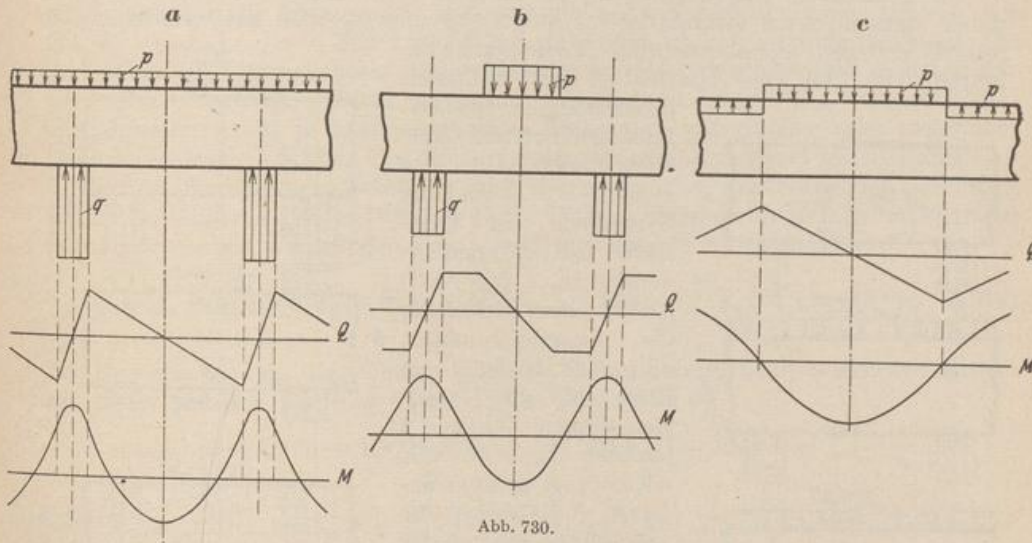


Abb. 730.

entwickeln. Die Spannungen σ_{xx} , σ_{zz} , τ_{xxz} aus dem Eigengewicht $g \text{ t/m}^3$ (Abb. 733a) der Scheibe lassen sich aus den Spannungen σ_x , σ_z , τ_{xz} einer gleichförmig verteilten Randbelastung $p = 2gh$ (Abb. 733b) bestimmen, da die vorgeschriebene Belastung g durch Überlagerung der Randbelastung mit Kräften der Abb. 733c hervorgeht. Diesen sind die Spannungen $\bar{\sigma}_z = g(h+z)$, $\bar{\sigma}_x = 0$, $\bar{\tau}_{xz} = 0$ zugeordnet.

Die Belastung an einer Periode $2l$ des Streifens steht im Gleichgewicht.

$$P = \int_{-l}^{+l} p(x) dx = \int_{-l}^{+l} q(x) dx = Q.$$

Ist sie außerdem in jedem Felde $2l$ zur senkrechten Mittellinie symmetrisch, so enthält die Reihenentwicklung der Belastung p und der Stützenkräfte q nach Fourier allein eine Folge von geraden trigonometrischen Funktionen.

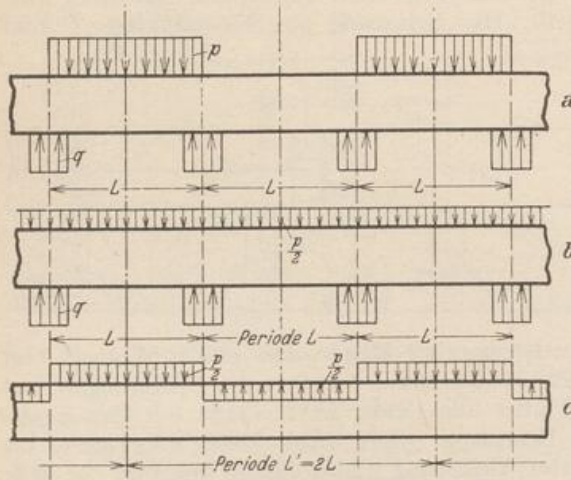


Abb. 731. Wechsel von belasteten und unbelasteten Feldern.

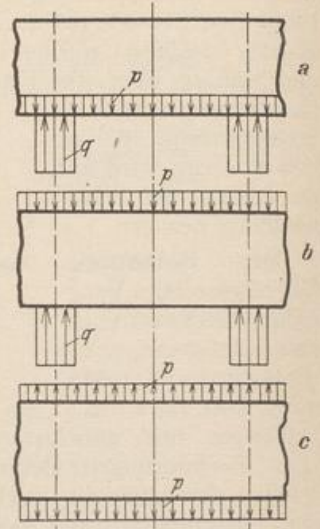


Abb. 732. Angehängte Belastung.

Die x -Achse ist Symmetrieachse des Streifens. Die äußeren Kräfte lassen sich daher stets in einen symmetrischen Anteil $^{(1)}p$ und in einen antimetrischen Anteil $^{(2)}p$ zerlegen, um übersichtliche Lösungen zu erhalten (Abb. 734). Das Kraftfeld ist dann mit allen

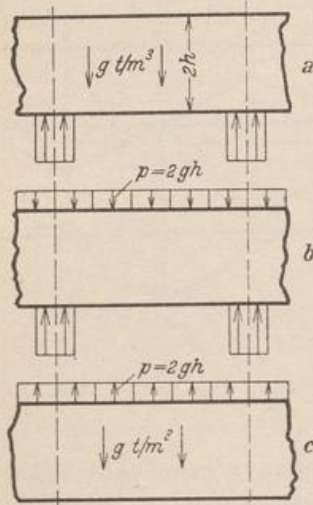


Abb. 733. Eigengewicht.

Randbedingungen ebenfalls symmetrisch oder antimetrisch. In der x -Achse ($z=0$) sind bei Symmetrie der Belastung die Schubspannungen τ_{xz} , bei Antimetrie der Belastung die Längsspannungen σ_x, σ_y Null. In dem einen Falle sind die Hauptspannungen für $z=0$ parallel zur x - und z -Richtung, in dem anderen Falle wird die x -Achse von ihnen unter 45° geschnitten.

Der Ansatz. Spannungsfunktionen F des Streifens sind von L.N.G.Filon, A.Timpe.

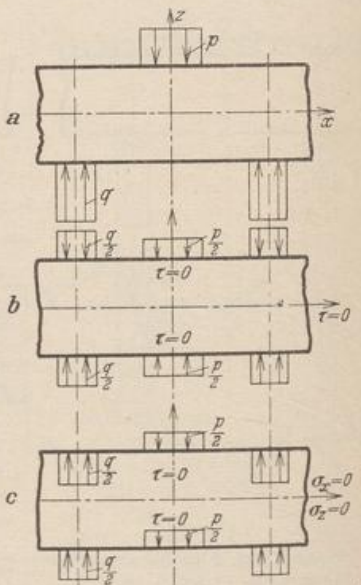


Abb. 734. Umordnung der Belastung (a) in den symmetrischen Anteil $^{(1)}p$ (b) und den antimetrischen Anteil $^{(2)}p$ (c).

F. Bleich, Th. v. Kármán und F. Seewald mit verschiedenen mathematischen Hilfsmitteln bestimmt und in jüngster Zeit durch H. Crámer, F. Di-schinger und H. Bay zur Berechnung von Tragwänden aus Eisenbeton verwendet worden.

Die Lösung erscheint in jedem Falle als Reihenentwicklung. Sie ist um so brauchbarer, je besser die Reihen konvergieren und je einfacher sich dabei das allgemeine Spannungsbild abspalten und in den singulären Abschnitten des Streifens zum vollständigen Ergebnis ergänzen läßt.

Die Belastung des Streifens besteht bei L. N. G. Filon aus zwei gleichgroßen, entgegengesetzt gerichteten Einzellasten. Das Ergebnis der Untersuchung dient auch zur Beurteilung der Spannungszustände aus anderen Belastungen. Th. v. Kármán und F. Seewald behandeln die Biegung des Balkenträgers auf zwei Stützen mit den Einflußfunktionen der Spannungen und verwenden dabei ebenso wie Filon ein Fouriersches Integral als Spannungsfunktion. F. Bleich untersucht den Streifen für periodische Belastungen der Ränder und entwickelt die allgemeine Lösung für (1055) aus Partikularlösungen der homogenen biharmonischen Differentialgleichung. Dabei entsteht ein ähnlicher Ansatz wie auf S. 718 bei der Untersuchung der Halbebene, dem Grenzfall des unendlich hohen Streifens. Bei Symmetrie der Belastung zur z -Achse enthält der Ansatz ebenso wie (1070a) neben hyperbolischen Funktionen von z nur gerade trigonometrische Funktionen von x .

$$F = \sum_{n=0}^{n=\infty} F_n = F_0 + \sum_1^{\infty} Z_n \cos \xi_n \quad \text{mit} \quad \frac{l}{n\pi} = l_n \quad \text{und} \quad n\pi \frac{x}{l} = \frac{x}{l_n} = \xi_n. \quad (1073a)$$

Z_n ist dabei wiederum eine Funktion, die allein die Veränderliche z enthält und die Differentialgleichung, also die Bedingung

$$\frac{d^4 Z_n}{dz^4} - \frac{2}{l_n^2} \frac{d^2 Z_n}{dz^2} + \frac{1}{l_n^4} Z_n = 0, \quad (1073b)$$

erfüllt, nur daß die Lösungen Z_n in diesem Falle die Randbedingungen für $z = +h$ mit $\sigma_z = -p_0$, $\tau_{xz} = 0$, für $z = -h$ mit $\sigma_z = -p_u$, $\tau_{xz} = 0$ erfüllen müssen. Sie sind daher bei symmetrischer und antisymmetrischer Belastung ebenfalls symmetrisch oder antisymmetrisch zur x -Achse, so daß die allgemeine Lösung $^{(1)}Z_n$, $^{(2)}Z_n$ der Differentialgleichung aus je zwei partikulären Integralen mit geraden oder ungeraden Funktionen von z besteht. Um die Integrationskonstanten derart festzusetzen, daß Z_n die Randbedingungen erfüllt, werden die zur x -Achse symmetrischen oder antisymmetrischen äußeren Kräfte $^{(1)}p$, $^{(2)}p$ (Abb. 734b, c) ebenfalls in Reihen mit geraden trigonometrischen Funktionen von x und der Periode $2l$ entwickelt.

$$^{(1)}p(x) = A_0 + \sum_1^{\infty} A_n \cos \xi_n = ^{(1)}p_0 + \sum_1^{\infty} ^{(1)}p_n, \quad ^{(2)}p(x) = \sum_1^{\infty} A'_n \cos \xi_n = \sum_1^{\infty} ^{(2)}p_n. \quad (1074)$$

Die Beiwerte A_0 , A_n , A'_n können für jeden Belastungsfall nach bekannten Regeln berechnet werden. Die Ergebnisse stehen in Tabelle 66.

Lösung bei symmetrischer Belastung $^{(1)}p$ nach Abb. 734b mit $\zeta_n = \frac{z}{l_n}$.

$$\left. \begin{aligned} ^{(1)}F &= ^{(1)}F_0 + \sum_1^{\infty} ^{(1)}Z_n \cos \xi_n = -A_0 \frac{x^2}{2} - \sum_1^{\infty} A_n l_n^2 (C_n \mathfrak{C}o\int \zeta_n + D_n \zeta_n \mathfrak{S}in \zeta_n) \cos \xi_n, \\ ^{(1)}\sigma_z &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \sum_0^{\infty} ^{(1)}\sigma_{z,n} = -A_0 + \sum_1^{\infty} A_n (C_n \mathfrak{C}o\int \zeta_n + D_n \zeta_n \mathfrak{S}in \zeta_n) \cos \xi_n, \\ ^{(1)}\sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \sum_0^{\infty} ^{(1)}\sigma_{x,n} = -\sum_1^{\infty} A_n [(C_n + 2D_n) \mathfrak{C}o\int \zeta_n + D_n \zeta_n \mathfrak{S}in \zeta_n] \cos \xi_n, \\ ^{(1)}\tau_{xz} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = \sum_0^{\infty} ^{(1)}\tau_{xz,n} = -\sum_1^{\infty} A_n [(C_n + D_n) \mathfrak{S}in \zeta_n + D_n \zeta_n \mathfrak{C}o\int \zeta_n] \sin \xi_n. \end{aligned} \right\} (1075a)$$

Die Bedingungen $-(1)\sigma_{z,n} = (1)p_n = A_n \cos \xi_n$ und $(1)\tau_{xz} = 0$ an den Rändern $z = \pm h$ oder $\zeta_n = \pm h/l_n = \pm \lambda_n$ liefern:

$$\left. \begin{aligned} C_n &= -\frac{2(\sin \lambda_n + \lambda_n \operatorname{Coj} \lambda_n)}{2\lambda_n + \sin 2\lambda_n}, & D_n &= \frac{2\sin \lambda_n}{2\lambda_n + \sin 2\lambda_n}, \\ C_n + D_n &= -\frac{2\lambda_n \operatorname{Coj} \lambda_n}{2\lambda_n + \sin 2\lambda_n}, & C_n + 2D_n &= \frac{2(\sin \lambda_n - \lambda_n \operatorname{Coj} \lambda_n)}{2\lambda_n + \sin 2\lambda_n}. \end{aligned} \right\} \quad (1075b)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Für } z = \pm h \text{ ist } \sigma_z &= \sum (1)p_n \frac{2\lambda_n - \sin 2\lambda_n}{2\lambda_n + \sin 2\lambda_n}, \\ \text{für } z = 0 \text{ ist } \sigma_z &= - (1)p_0 - \sum (1)p_n \frac{2(\sin \lambda_n + \lambda_n \operatorname{Coj} \lambda_n)}{2\lambda_n + \sin 2\lambda_n}. \end{aligned} \right\} \quad (1076)$$

Lösung bei antimetrischer Belastung $(2)p$ nach Abb. 734c.

$$\left. \begin{aligned} (2)F &= \sum_1^\infty (2)Z_n \cos \xi_n = - \sum_1^\infty A'_n l_n^2 (C'_n \sin \zeta_n + D'_n \zeta_n \operatorname{Coj} \zeta_n) \cos \xi_n, \\ (2)\sigma_z &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \sum_1^\infty (2)\sigma_{z,n} = \sum_1^\infty A'_n (C'_n \sin \zeta_n + D'_n \zeta_n \operatorname{Coj} \zeta_n) \cos \xi_n, \\ (2)\sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \sum_1^\infty (2)\sigma_{x,n} = - \sum_1^\infty A'_n [(C'_n + 2D'_n) \sin \zeta_n + D'_n \zeta_n \operatorname{Coj} \zeta_n] \cos \xi_n, \\ (2)\tau_{xz} &= - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = \sum_1^\infty (2)\tau_{xz,n} = - \sum_1^\infty A'_n [(C'_n + D'_n) \operatorname{Coj} \zeta_n + D'_n \zeta_n \sin \zeta_n] \sin \xi_n. \end{aligned} \right\} \quad (1077a)$$

Die Bedingungen $-(2)\sigma_{z,n} = \pm (2)p_n = \pm A'_n \cos \xi_n$ und $(2)\tau_{xz} = 0$ an den Rändern $z = \pm h$ oder $\zeta_n = \pm h/l_n = \pm \lambda_n$ liefern:

$$\left. \begin{aligned} C'_n &= \frac{2(\operatorname{Coj} \lambda_n + \lambda_n \sin \lambda_n)}{2\lambda_n - \sin 2\lambda_n}, & D'_n &= \frac{-2\operatorname{Coj} \lambda_n}{2\lambda_n - \sin 2\lambda_n}, \\ C'_n + D'_n &= \frac{2\lambda_n \sin \lambda_n}{2\lambda_n - \sin 2\lambda_n}, & C'_n + 2D'_n &= -\frac{2(\operatorname{Coj} \lambda_n - \lambda_n \sin \lambda_n)}{2\lambda_n - \sin 2\lambda_n}. \end{aligned} \right\} \quad (1077b)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Für } z = \pm h \text{ ist } (2)\sigma_x &= \pm \sum_1^\infty (2)p_n \frac{2\lambda_n + \sin 2\lambda_n}{2\lambda_n - \sin 2\lambda_n}, \\ \text{für } z = 0 \text{ ist } \tau_{xz} &= \sum_1^\infty A'_n \frac{2\lambda_n \sin \lambda_n}{2\lambda_n - \sin 2\lambda_n} \sin \xi_n. \end{aligned} \right\} \quad (1078)$$

Das Kraftfeld ist darnach durch die Belastung und deren Reihenentwicklung nach Fourier (Tab. 66) und durch die Abmessungen $L = 2l$, $H = 2h$, $2c$ und die davon abhängigen Verhältniszahlen ξ_n , ζ_n , λ_n bestimmt. Es wird durch die Isoklinen und die Trajektorien der Hauptlängsspannungen und durch die Linien gleicher Hauptlängs- und gleicher Hauptschubspannung beschrieben. Sie zeigen den Ausgleich der äußeren Kräfte zwischen den Rändern des Streifens. In der Regel begnügt man sich jedoch mit den Komponenten σ_x , σ_z , τ_{xz} in einzelnen ausgezeichneten Schnitten $x = \text{const}$ oder $z = \text{const}$, insbesondere $x = 0$ (Feldmitte), $x = \pm l$ (Stützenquerschnitt), $z = 0$ (waagerechte Symmetrieachse) und $z = \pm h$ (Ränder), um auf die Grenzwerte der Spannungen zu schließen. Daneben können auch einzelne ausgezeichnete Spannungen als Funktionen von h oder c bestimmt werden. Leider ist die Konvergenz der Reihen für die Untersuchung in der Nähe der Ränder ungünstig. Bei hohen Streifen ($h \gg l$) genügen auch die Spannungen der Halbebene nach (1072), so daß angenähert

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{(o)} &= -(\dot{p}^{(o)} - \dot{p}_0^{(o)}), & \sigma_x^{(u)} &= -(\dot{p}^{(u)} - \dot{p}_0^{(u)}) \\ \dot{p}_0^{(o)} &= \frac{1}{l} \int_0^l \dot{p}^{(o)} dx, & \dot{p}_0^{(u)} &= \frac{1}{l} \int_0^l \dot{p}^{(u)} dx \end{aligned} \right\} \quad (1079)$$

gesetzt werden kann.

Die Längsspannungen σ_x sind in der Nähe des belasteten Randes größer, in der Nähe des unbelasteten Randes kleiner als beim Geradliniengesetz. Im Grenzfall $H \gg L$ wird der Streifen zur Halbebene mit $-\sigma_x = \pm p$ am belasteten Rande. Daher ist σ_x am Rande des Streifens stets größer als p , konvergiert jedoch gegen die Mitte schnell gegen Null. Für $L \geq 2H$ kann nach dem Geradliniengesetz gerechnet werden.

Die Ergebnisse der Zahlenrechnung müssen die Randbedingungen und die Gleichgewichtsbedingungen zwischen den inneren und äußeren Kräften erfüllen. In jedem Querschnitt ist daher

$$\int_{-h}^{+h} \sigma_x dz = 0, \quad \int_{-h}^{+h} \sigma_x z dz = M, \quad \int_{-h}^{+h} \tau_{xz} dz = -R_z.$$

Die Schnittkräfte M und R_z der periodischen Belastung sind bekannt.

Der Verschiebungszustand wird ebenso wie beim biegesteifen Stab durch die Krümmung $1/\varrho_x$ von ausgezeichneten Linien $z = \text{const}$, also $z = 0, z = \pm h$ beim Streifen, $z = 0, z = h, z = 2h \dots$ bei der Halbebene beschrieben. Bei kleinen Verschiebungen ist $1/\varrho_x = \partial^2 w / \partial x^2$. Da außerdem nach (1050) und (1051)

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_z) = \frac{\partial u}{\partial x}$$

ist, wird

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varrho_x} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \\ &= -\frac{1}{E} \frac{\partial \sigma_x}{\partial z} + \frac{1}{G} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\mu}{E} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1080a)$$

Die Summanden beschreiben einzeln den Anteil der Komponenten des Spannungszustandes an der Krümmung. Sie kann mit (1054b) nach

$$\frac{1}{\varrho_x} = -\frac{1}{E} \left[\frac{\partial^3 F}{\partial z^3} - (2 + \mu) \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial z} \right] \quad (1080b)$$

aus (1075a) oder (1077a) berechnet werden.

Gleichförmig verteilte Belastung am oberen Rande. Das Kräftebild Abb. 735a läßt sich in drei Teile zerlegen. Der Anteil I besteht aus einer periodischen, symmetrischen Streckenlast \dot{p} (Abb. 735b) mit Spannungen nach (1075a).

$$A_0 = 0, \quad A_n = \frac{2\dot{p}_2}{\gamma_n} \sin \gamma_n, \quad \dot{p}_2 = -\frac{\dot{p}}{2} \frac{l-c}{c}, \quad \gamma_n = n\pi \frac{l-c}{l}. \quad (1081)$$

Die Schubspannungen sind in den Schnitten $x = 0, x = l, z = 0, z = \pm h$ Null und daher die Längsspannungen σ_x, σ_z dort gleichzeitig Hauptspannungen. Da die

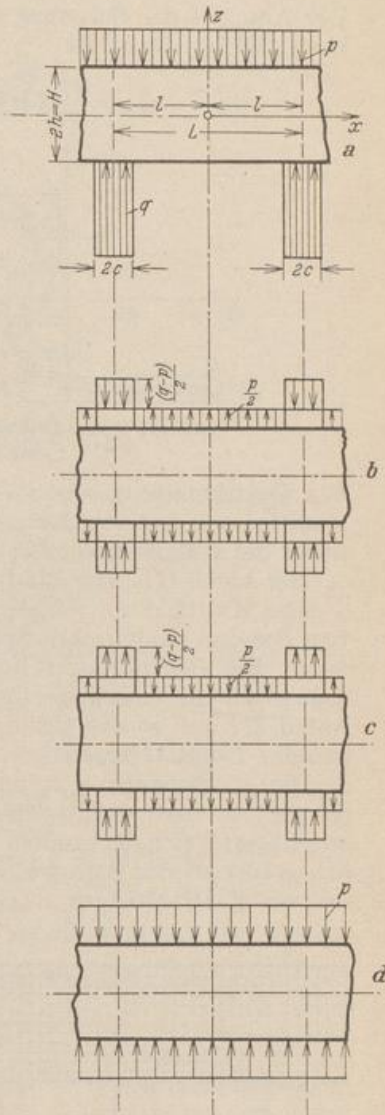


Abb. 735.

Schnittkräfte M, N, Q bei symmetrischem Lastangriff Null werden, ist in jedem Querschnitt

$$\int_{-h}^{+h} \sigma_x dF = 0, \quad \int_{-h}^{+h} \sigma_x z dF = 0, \quad \int_{-h}^{+h} \tau_{xz} dF = 0.$$

Der Anteil II der Belastung (Abb. 735c) ist antimetrisch und erzeugt Spannungen nach (1077a). Dabei ist

$$A'_n = -A_n = \frac{2p_2}{\gamma_n} \sin \gamma_n, \quad p_2 = +\frac{p}{2} \frac{l-c}{c}, \quad \gamma_n = n\pi \frac{l-c}{l}. \quad (1081)$$

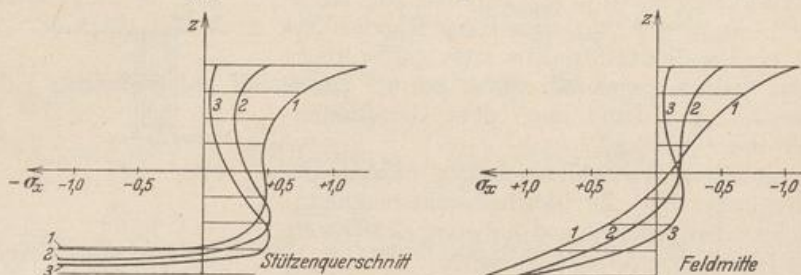


Abb. 736. Verlauf der Funktion $\sigma_x(z)$ bei Balken mit veränderlichem Verhältnis H/L .
Kurven 1: $H/L = 1/2$, Kurven 2: $H/L = 2/3$, Kurven 3: $H/L = 1$.

Die Querschnitte $x = 0, x = l$ sind frei von Schubspannungen τ_{xz} , der Längsschnitt $z = 0$ frei von Längsspannungen σ_x, σ_z . Die Hauptspannungen schneiden daher die x -Achse unter 45° .

Der Anteil III (Abb. 735d) liefert einen einachsigen Spannungszustand $-\sigma_z = p$.

Das Kraftfeld zur vorgeschriebenen Belastung entsteht entweder durch Addition der drei analytischen Spannungsanteile oder durch die Addition ihrer Zahlenwerte. Bei gleichförmiger Belastung p am unteren Rande nach Abb. 732a tritt dazu noch die einachsige Querbeanspruchung $+\sigma_z = p$. Sie hebt sich gegen den Anteil III auf, so daß sich das Ergebnis in diesem Falle allein aus den Spannungsanteilen I und II zusammensetzt.

Die Längsspannung σ_x am unteren (gestützten) Rande eines hohen Streifens ($H \gg L$) ist nach (1079) angenähert gleich der Randbelastung p oder q , also auch angenähert gleich der größten Längsspannung σ_x eines Querschnittes. Sie ist wesentlich größer als der Betrag $\sigma_x = M/W = 6M/h^2$ nach dem Geradliniengesetz. Nach den von F. Dischinger angegebenen Schaulinien (Abb. 736) nähert sich die Funktion $\sigma_x(z)$ eines Querschnittes bei abnehmendem Verhältnis h/l der Navierschen Geraden in Feldmitte schneller als im Stützenquerschnitt.

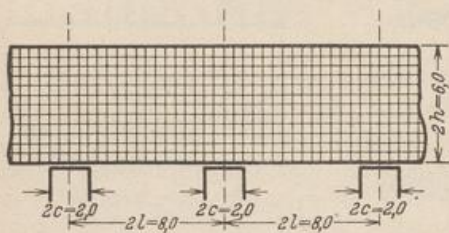


Abb. 737.

Spannungszustand im Mittelfeld einer hohen Silowand ($H/L = 3/4$) auf mehreren Stützen (Abb. 737).

Stützung und Belastung stimmen mit den Angaben in Abb. 723 überein, so daß ein Vergleich mit den Ergebnissen auf S. 722 möglich ist.

Die Belastung wird nach S. 727 in den symmetrischen (Abb. 735b) und den antimetrischen Anteil (Abb. 735c) aufgespalten.

Zusammenstellung der Formeln nach S. 725f.

A. Symmetrischer Anteil.*

$${}^{(1)}p = p_0 + \sum_1^{\infty} A_n \cos \xi_n, \quad \xi_n = n\pi \frac{x}{l}, \quad p_0 = 0, \quad A_n \text{ nach Tabelle 66.}$$

$$C_n = -\frac{2(\sin \lambda_n + \lambda_n \operatorname{Coj} \lambda_n)}{2\lambda_n + \sin 2\lambda_n} = -\frac{\operatorname{Tg} \lambda_n + \lambda_n}{\frac{\lambda_n}{\operatorname{Coj} \lambda_n} + \sin \lambda_n},$$

$$D_n = \frac{2 \sin \lambda_n}{2\lambda_n + \sin 2\lambda_n} = \frac{\operatorname{Tg} \lambda_n}{\frac{\lambda_n}{\operatorname{Coj} \lambda_n} + \sin \lambda_n}, \quad \lambda_n = n\pi \frac{h}{l},$$

$$\varphi_n(\xi) = C_n \operatorname{Coj} \xi_n + D_n \xi_n \sin \xi_n,$$

$$\psi_n(\xi) = (C_n + 2D_n) \operatorname{Coj} \xi_n + D_n \xi_n \sin \xi_n,$$

$$\chi_n(\xi) = (C_n + D_n) \sin \xi_n + D_n \xi_n \operatorname{Coj} \xi_n.$$

B. Antimetrischer Anteil.

$${}^{(2)}p = \sum_1^{\infty} A'_n \cos \xi_n, \quad A'_n = -A_n,$$

$$C'_n = \frac{2(\operatorname{Coj} \lambda_n + \lambda_n \sin \lambda_n)}{2\lambda_n - \sin 2\lambda_n} = \frac{1 + \lambda_n \operatorname{Tg} \lambda_n}{\frac{\lambda_n}{\operatorname{Coj} \lambda_n} - \sin \lambda_n},$$

$$D'_n = -\frac{2 \operatorname{Coj} \lambda_n}{2\lambda_n - \sin 2\lambda_n} = -\frac{1}{\frac{\lambda_n}{\operatorname{Coj} \lambda_n} - \sin \lambda_n},$$

$$\varphi'_n(\xi) = C'_n \sin \xi_n + D'_n \xi_n \operatorname{Coj} \xi_n,$$

$$\psi'_n(\xi) = (C'_n + 2D'_n) \sin \xi_n + D'_n \xi_n \operatorname{Coj} \xi_n,$$

$$\chi'_n(\xi) = (C'_n + D'_n) \operatorname{Coj} \xi_n + D'_n \xi_n \sin \xi_n.$$

C. Superposition der Anteile A und B.

$$\begin{aligned} E_n(\xi) &= A_n \cos \xi_n, & F_n(\xi) &= A_n \sin \xi_n, \\ E'_n(\xi) &= A'_n \cos \xi_n = -E_n(\xi), & F'_n(\xi) &= A'_n \sin \xi_n = -F_n(\xi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= {}^{(1)}\sigma_x + {}^{(2)}\sigma_x = \sum_1^{\infty} \varphi_n(\xi) \cdot E_n(\xi) + \sum_1^{\infty} \varphi'_n(\xi) \cdot E'_n(\xi) \\ &= \sum_1^{\infty} [\varphi_n(\xi) - \varphi'_n(\xi)] E_n(\xi) = \sum_1^{\infty} \bar{\varphi}_n(\xi) \cdot E_n(\xi). \\ \sigma_z &= {}^{(1)}\sigma_z + {}^{(2)}\sigma_z = -\sum_1^{\infty} \psi_n(\xi) \cdot E_n(\xi) - \sum_1^{\infty} \psi'_n(\xi) \cdot E'_n(\xi) \\ &= -\sum_1^{\infty} [\psi_n(\xi) - \psi'_n(\xi)] E_n(\xi) = -\sum_1^{\infty} \bar{\psi}_n(\xi) \cdot E_n(\xi). \\ \tau_{xz} &= {}^{(1)}\tau_{xz} + {}^{(2)}\tau_{xz} = -\sum_1^{\infty} \chi_n(\xi) \cdot F_n(\xi) - \sum_1^{\infty} \chi'_n(\xi) \cdot F'_n(\xi) \\ &= -\sum_1^{\infty} [\chi_n(\xi) - \chi'_n(\xi)] F_n(\xi) = -\sum_1^{\infty} \bar{\chi}_n(\xi) \cdot F_n(\xi). \end{aligned}$$

Auswertung der Formeln.

Wie bei dem Beispiel in Abschn. 74 wird die Rechnung auf die ersten fünf Fourierglieder beschränkt.

1. Fourierkonstanten $A_n = -A'_n$. Die Konstanten A_n sind halb so groß wie die entsprechenden Werte auf S. 720.

n	1	2	3	4	5
A_n	-0,900 316	+0,636 620	-0,300 106	0	+0,180 064

2. Integrationskonstanten C_n, D_n, C'_n, D'_n .

n	1	2	3	5
C_n	-0,588 71	-102,4816 · 10 ⁻³	-13,73953 · 10 ⁻³	-195,5161 · 10 ⁻⁶
D_n	+0,173 21	+17,9378 · 10 ⁻³	+1,70284 · 10 ⁻³	+15,2974 · 10 ⁻⁶
$C_n + D_n$	-0,415 50	-84,5438 · 10 ⁻³	-12,03669 · 10 ⁻³	-180,2187 · 10 ⁻⁶
$C_n + 2D_n$	-0,242 29	-66,6060 · 10 ⁻³	-10,33385 · 10 ⁻³	-164,9213 · 10 ⁻⁶
C'_n	-0,692 59	-102,7831 · 10 ⁻³	-13,74007 · 10 ⁻³	-195,5162 · 10 ⁻⁶
D'_n	+0,208 97	+17,9954 · 10 ⁻³	+1,70291 · 10 ⁻³	+15,2974 · 10 ⁻⁶
$C'_n + D'_n$	-0,483 61	-84,7877 · 10 ⁻³	-12,03716 · 10 ⁻³	-180,2188 · 10 ⁻⁶
$C'_n + 2D'_n$	-0,274 64	-66,7923 · 10 ⁻³	-10,33424 · 10 ⁻³	-164,9213 · 10 ⁻⁶

3. Funktionen φ, ψ, χ für $z = -0,5l$ ($\zeta = -0,5$).

n	1	2	3	5
φ_n	-0,85105	-0,53715	-0,31819	-0,09707
φ'_n	+0,77020	+0,53168	+0,31801	+0,09707
$\overline{\varphi}_n$	-1,62125	-1,06883	-0,63620	-0,19414
ψ_n	+0,01818	-0,12128	-0,12861	-0,05767
ψ'_n	-0,19162	+0,11603	+0,12846	+0,05767
$\overline{\psi}_n$	+0,20980	-0,23731	-0,25707	-0,11534
χ_n	+0,27350	+0,32313	+0,22322	+0,07737
χ'_n	-0,45806	-0,32995	-0,22342	-0,07737
$\overline{\chi}_n$	+0,73156	+0,65306	+0,44664	+0,15474

4. Spannungen im Schnitt $z = -0,5l$.

$$\sigma_x = -0,20980 E_1(\xi) + 0,23731 E_2(\xi) + 0,25707 E_3(\xi) + 0,11534 E_5(\xi),$$

$$\sigma_z = -1,62125 E_1(\xi) - 1,06883 E_2(\xi) - 0,63620 E_3(\xi) - 0,19414 E_5(\xi),$$

$$\tau_{xz} = -0,73156 F_1(\xi) - 0,65306 F_2(\xi) - 0,44664 F_3(\xi) - 0,15474 F_5(\xi).$$

Die Funktionen $E_n(\xi), F_n(\xi)$ können von S. 721 übernommen werden, sind jedoch wegen der Aufteilung der Belastung in den symmetrischen und den antisymmetrischen Anteil durch 2 zu dividieren. Damit erhält man die folgenden Spannungen in t/m^2 :

ξ	0	0,125	0,250	0,375	0,500	0,625	0,750	0,875	1
σ_x	+0,283	+0,244	+0,176	+0,056	-0,151	-0,270	-0,176	-0,030	+0,019
σ_z	+0,935	+0,954	+0,922	+0,831	+0,680	+0,131	-0,922	-1,916	-2,296
τ_{xz}	0	+0,056	+0,164	+0,274	+0,497	+0,862	+0,996	+0,644	0

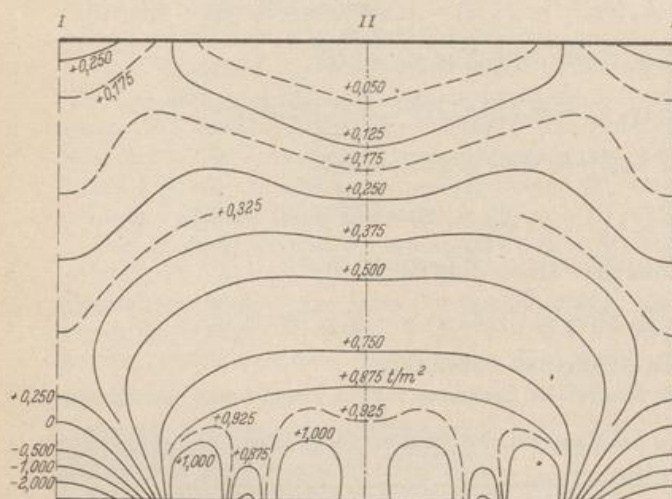


Abb. 738. Linien gleicher Hauptspannung σ_1 .

5. Hauptspannungen. Die Spannungen werden für die Knoten des quadratischen Netzes Abb. 737 berechnet. Sie liefern die Linien gleicher Hauptspannung σ_1 (Abb. 738), gleicher Hauptspannung σ_2 (Abb. 739) und die Längsspannungstrajektorien (Abb. 740).

Feldweise wechselnde Belastung $\pm p$ am oberen Rande (Abb. 741a u. 731c).

Die Belastung dient nur dazu, die Spannungen bei abwechselnd belasteten und unbelasteten Feldern (Abb. 731a) aus der Lösung für gleichförmige Belastung aller Felder (Abb. 731b) herzuleiten. Ihre Periodenlänge L' ist gleich der doppelten

Stützenentfernung L . Bei der Superposition nach Abb. 731 ist die Phasenverschiebung der Perioden zu beachten.

Die Stützkkräfte sind Null, da die Belastung Abb. 741a innerhalb einer Periode L' im Gleichgewicht ist. Sie wird nach Abb. 741b, c in den symmetrischen und den antisymmetrischen Anteil zerlegt. Die Konstanten der nach Fourier entwickelten Randbelastung jedes Anteils stimmen miteinander überein und werden nach Tab. 66 mit

$$A_n = A'_n = p \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \tag{1082}$$

angeschrieben. Die Spannungen lassen sich damit nach (1075a) und (1077a) unter Beachtung der doppelten Periode L' berechnen.

Ist der Spannungszustand aus einer Belastung $\pm p$ am oberen Rande bekannt, so lassen sich die Spannungen bei Eintragung am unteren Rande am einfachsten durch Überlagerung der Spannungen einer symmetrischen Belastung anschreiben.

Symmetrische Gruppen von Streckenlasten $P = 2cp$ (Abb. 742). Die Belastung ist symmetrisch und wird nach Tab. 66 in eine Fouriersche Reihe mit den Koeffizienten

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= p_0 = p \frac{c}{l} = \frac{P}{2l}, \\ A_n &= 2p_0 \frac{\sin \gamma_n}{\gamma_n} \\ &= \frac{P}{l} \frac{\sin \gamma_n}{\gamma_n}, \\ \gamma_n &= n\pi \frac{c}{l} \end{aligned} \right\} (1083)$$

entwickelt. Die Schnittkräfte M, N, Q sind in jedem Querschnitt Null, die Längsspannungen σ_x im Längsschnitt $z = 0$ von Streifen mit Randabständen $h \geq 2l$ angenähert konstant $-pc/l$. Dies wird durch Zahlenrechnung für die Längsschnitte $z_1 = 0$ und $z_2 = h - 2l$, eines Streifens mit $H/L = 3$ und $l/c = 4$ (Abb. 743) nachgewiesen.

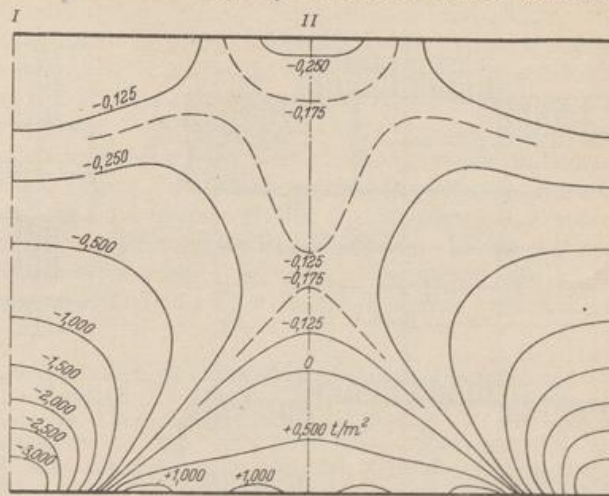
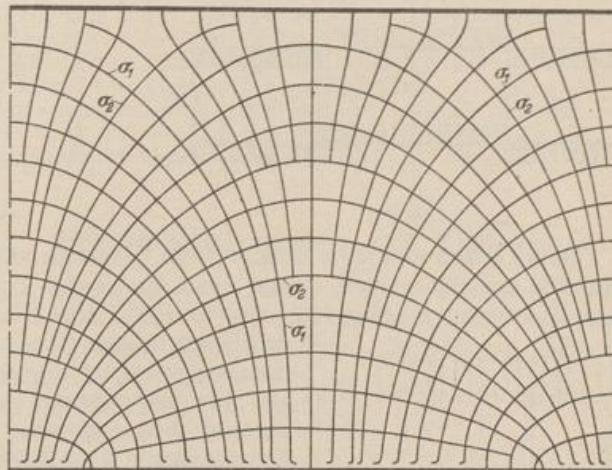
Abb. 739. Linien gleicher Hauptspannung σ_2 .

Abb. 740. Längsspannungstrajektorien.

$\xi = x/l$		0	0,25	0,50	0,75	1
$z_1 = 0$	σ_x/p	-0,251	-0,251	-0,250	-0,249	-0,249
	τ_{xz}/p	0	0	0	0	0
$z_2 = h - 2l$	σ_x/p	-0,256	-0,254	-0,250	-0,246	-0,244
	τ_{xz}/p	0	+0,004	+0,005	+0,004	0

Da der Längsschnitt $z_1 = 0$ frei von Schubspannungen ist, kann hier der Streifen ohne Störung des Spannungszustandes in zwei Teile zerlegt werden, wenn dabei die Längsspannungen $\sigma_x \approx -pc/l$ an den Schnittändern als äußere Kräfte mitwirken. Nach den Ergebnissen der Zahlenrechnung sind die Schubspannungen auch

noch in Längsschnitten $z_2 \leq h - 2l$ nahezu Null, so daß die Zerlegung des Streifens in drei parallele Abschnitte mit den Längsspannungen $\sigma_z \approx -pc/l$ als äußeren Kräften keine wesentliche Änderung des Spannungszustandes bedeutet.

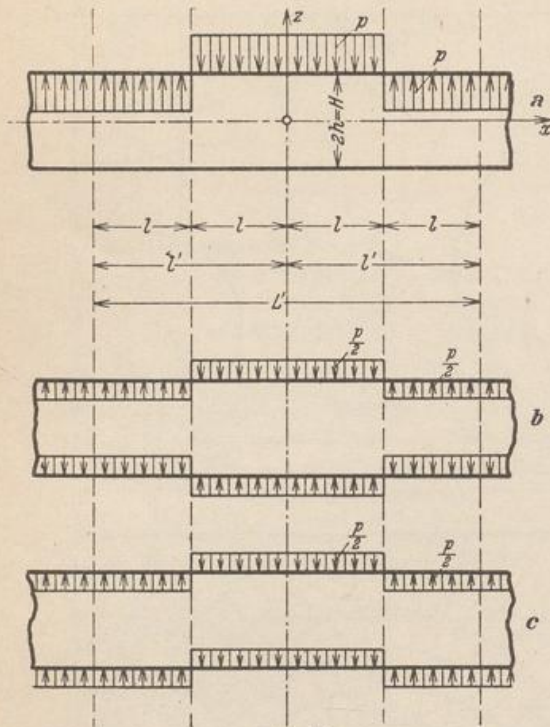


Abb. 741.

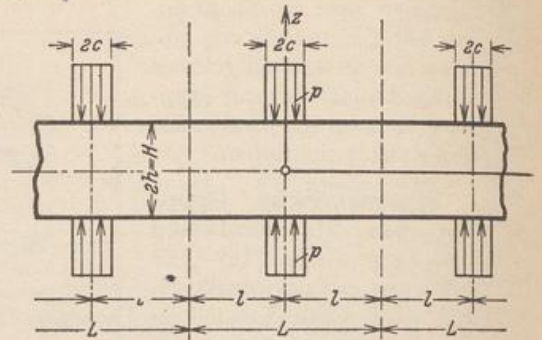


Abb. 742.

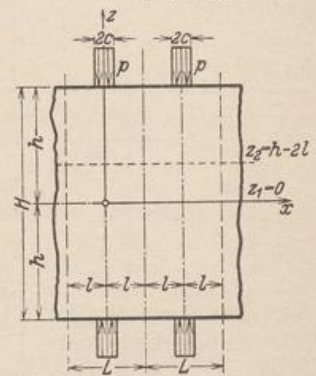


Abb. 743. $H/L = 3, l/c = 4.$

Daher lassen sich hohe Wände ($H \gg L$) mit gleichförmiger Belastung des oberen Randes angenähert auf Grund einer Zerlegung in die Abschnitte $h_1 = H - L$, $h_2 = L$ berechnen (Abb. 744). Der Abschnitt $H - L$ unterliegt im wesentlichen nur dem einachsigen Spannungszustand $-\sigma_z = p$. Der Spannungszustand des Abschnitts h_2 wird genau genug als Spannungszustand eines Streifens mit dem Randabstand $2h_2$ und einer symmetrischen Gruppe von Streckenlasten $2qc$ berechnet.

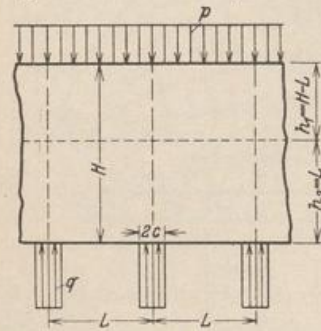


Abb. 744.

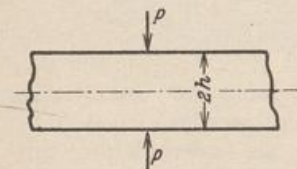


Abb. 745.

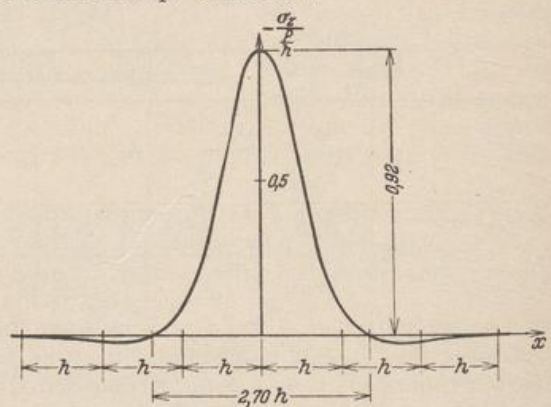


Abb. 746.

Dasselbe Ergebnis läßt sich auch aus einer Spannungsfunktion ableiten, die von N. L. G. Filon für die Belastung der Ränder eines Streifens mit zwei gleichgroßen entgegengesetzt gerichteten Einzellasten P nach Abb. 745 als Fouriersches Integral angegeben worden ist. Die Zustandslinien σ_x^* , σ_z^* , τ_{xz}^* für $z = \text{const}$ sind gleichzeitig Einflußlinien für eine wandernde Lastengruppe. Die Summe der positiven und negativen Anteile der Flächen σ_x^* , τ_{xz}^* sind in den Längsschnitten $z = \text{const}$ Null, da bei gleichförmiger Belastung der Ränder nur Spannungen σ_z entstehen.

Nach Abb. 746 erzeugt die einzelne Kräftegruppe P (Abb. 745) auf der Breite $2,7h$ der Symmetrieachse Druckspannungen σ_z . Darüber hinaus entstehen unbedeutende Zugspannungen, die schnell gegen Null konvergieren. Einzellasten werden daher durch ein elastisches Mittel auf $2,7h$ Breite verteilt. Die Spannung σ_z erreicht mit $0,92 P/h$ in der Wirkungslinie der Einzelkraft das Maximum. Sie ist nahezu gleich der auf den halben Scheibenquerschnitt bezogenen Spannung. Zwischen Einzellasten mit einem größeren Abstand als $2,7h$ bestehen keine wesentlichen Beziehungen.

Filon, L. N. G.: On an approximate solution of the bending of a beam of rectangular cross section. Philos. Trans. Royal Soc. London 1903 (A.) Bd. 201 S. 63. — Timpe, A.: Problem der Spannungsverteilung in ebenen Systemen. Diss. Göttingen 1905. — Bleich, F.: Der gerade Stab mit Rechteckquerschnitt als ebenes Problem. B. I. 1923 S. 255. — Th. v. Kármán: Über die Grundlagen der Balkentheorie. Abhandlg. aus dem Aerodynamischen Institut d. Techn. Hochschule Aachen. Berlin 1927. — Seewald, F.: Die Spannungen und Formänderungen von Balken mit rechteckigem Querschnitt. Abhandlg. aus dem Aerodynamischen Institut d. Techn. Hochschule Aachen. Berlin 1927. — Crámer, H.: Spannungen in hohen wandartigen Trägern. Bericht über die II Int. Tagung für Brücken- und Hochbau. Wien 1929. — Derselbe: Spannungen in wandartigen Balken bei feldweise wechselnder Belastung. Z. A. M. 1930 S. 205. — Bař, H.: Der wandartige Träger auf unendlich vielen Stützen. J. A. 1931 S. 435. — Cooker, E. G., u. L. N. G. Filon: A Treatise on Photo Elasticity. Cambridge 1931. — Dischinger, F.: Beitrag zur Theorie der Halbscheibe und des wandartigen Balkens. Abhandlungen der Int. Vereinigung für Brücken- und Hochbau. Zürich 1932 und Beton u. Eisen 1933 S. 237. — Crámer, H.: Spannungen in durchlaufenden Scheiben bei Vollbelastung sämtlicher Felder. Beton u. Eisen 1933 S. 233.

76. Die Berechnung der Spannungsfunktion mit Differenzen.

Die Erweiterung der Randbedingungen durch die rechteckige oder polygonale Begrenzung der Scheiben bereitet beim Ansatz und bei der numerischen Lösung der Spannungsfunktion F wesentlich größere Schwierigkeiten. Aus diesem Grunde begnügt man sich bei derartigen Aufgaben ebenso wie bei ähnlichen Problemen der Plattenbiegung mit einer Näherungslösung durch die Entwicklung der Ansätze (1054) in Differenzen. Da die Differentialgleichung des ebenen Spannungszustandes und die Differentialgleichung der Plattenbiegung unter Randkräften miteinander übereinstimmen, kann die Differenzengleichung des ebenen Spannungszustandes in rechtwinkligen Koordinaten nach (999) oder in Polarkoordinaten unmittelbar angeschrieben werden. Die Spannungsfläche erscheint dann ebenso wie die elastische Fläche der Platte als Gitter, dessen Aufriß aus zwei Gruppen von äquidistanten, sich rechtwinklig kreuzenden geraden Linien besteht ($\Delta x \neq \Delta z$). Die Endpunkte der Ordinaten F_k der Gitterknoten k liegen in der Spannungsfläche. Ihre gegenseitigen Beziehungen lassen sich an jedem Gitterknoten durch eine lineare Gleichung ausdrücken. Sie lautet für $\Delta x = \Delta z$ nach (1000) folgendermaßen (Abb. 747):



Abb. 747.

$$20F_k - 8(F_{k-1} + F_l + F_{k+1} + F_i) + 2(F_{l-1} + F_{l+1} + F_{i-1} + F_{i+1}) + (F_{k-2} + F_m + F_{k+2} + F_h) = 0. \quad (1084)$$

Für $\Delta x \neq \Delta z$ wird die Differentialbeziehung $\Delta \Delta F = 0$ nach (999) angeschrieben. Die Gleichungen für die inneren Knoten sind homogen. Außerdem gelten Randbedingungen, die entweder nach (1054) durch die Randkräfte oder nach (1061) durch Funktionen der Randkräfte vorgeschrieben sind. Der Ansatz liefert bei jedem Belastungsfall ein eindeutiges Ergebnis für die Ordinaten F_k . Mit diesen lassen sich dann die Komponenten des ebenen Spannungszustandes nach (998) berechnen.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \approx \frac{F_{k+1} - 2F_k + F_{k-1}}{\Delta x^2}, & \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \approx \frac{F_l - 2F_k + F_l}{\Delta z^2}, \\ \tau_{xz} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \approx -\frac{(F_{l+1} - F_{l-1}) - (F_{l+1} - F_{l-1})}{4 \Delta x \cdot \Delta z}. \end{aligned} \right\} (1085)$$

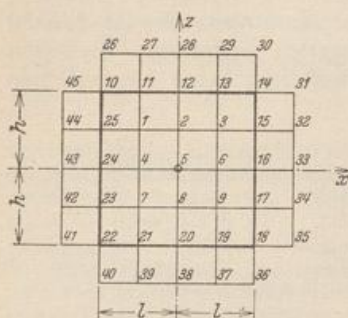


Abb. 748.

wenn zu den 9 linearen Gleichungen für die Gitterknoten 1 bis 9 noch 36 Randbedingungen treten. Diese stehen bei freien Rändern $z = \pm h$ nach (1085) als unmittelbare Beziehung zwischen Randbelastung und Randspannung zur Verfügung.

Die Schubspannungen werden daher am einfachsten für die Mittelpunkte der Maschen berechnet.

Der quadratischen Scheibe Abb. 748 wird ein durch 2 Scharen von äquidistanten Geraden bestimmtes Gitter mit 9 Innenknoten und 16 Randknoten zugeordnet, so daß zunächst ohne Beachtung der Symmetrie 25 Ordinaten F_k der Spannungsfläche in die Rechnung eingehen und 9 Gleichungen angeschrieben werden können. Diese enthalten noch die unbekanntes Ordinaten F_k von 20 Nebenknoten der über den Scheibenrand hinaus erweiterten Spannungsfläche. Die 45 Wurzeln des Ansatzes sind daher nur dann eindeutig bestimmt,

An 10 Randknoten $z = \pm h$ ist $\sigma_z = -p_z$, an 10 Randknoten $x = \pm l$ ist $\sigma_x = -p_x$, an 12 mittleren Randknoten $z = \pm h, x = \pm l$ und an 4 Eckknoten ist $\tau_{xz} = 0$.

Ansatz und Lösung werden an einer Scheibe mit $h/l = 3/4$ gezeigt, welche nach Abb. 749 belastet ist. Wegen der Symmetrie der Belastung zur z -Achse genügt die Berechnung der Spannungsfläche F für eine Hälfte der Scheibe. Nach Abb. 750 sind daher die Ordinaten F_k von 20 Innenknoten zu berechnen ($\Delta x = \Delta z = \Delta$).

Bestimmung der Randordinaten nach (1061a): Als Anfangspunkt wird wegen der Symmetrie der Punkt 21 gewählt.

$$F_{21} = F_{22} = \dots = F_{31} = 0,$$

$$F_{32} = -3p\Delta \cdot \frac{\Delta}{2} = -1,5p\Delta^2,$$

$$F_{33} = -3p\Delta \cdot \frac{3}{2}\Delta + p\Delta \cdot \frac{\Delta}{2} = -4,0p\Delta^2,$$

$$F_{34} = -3p\Delta \cdot \frac{5}{2}\Delta + p2\Delta \cdot \Delta = -5,5p\Delta^2,$$

$$F_{35} = -3p\Delta \cdot \frac{7}{2}\Delta + p3\Delta \cdot \frac{3}{2}\Delta = -6,0p\Delta^2.$$

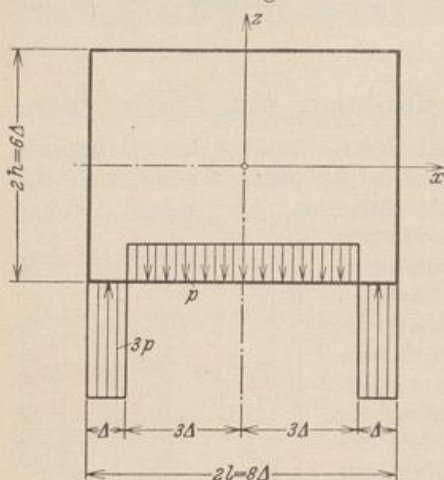


Abb. 749.

Elimination der Ordinaten an den Nebenknoten nach (1061b): Für die Randknoten 21 bis 35 wird $\partial F/\partial n = -R_1$, so daß z. B. für die Knoten 22, 28 und 33 die folgenden Beziehungen entstehen:

$$\frac{F_{37} - F_3}{2\Delta} = 0, \quad \frac{F_{44} - F_9}{2\Delta} = 0, \quad \frac{F_{50} - F_{18}}{2\Delta} = 0.$$

Daher ist $F_{37} = F_3, F_{44} = F_9, F_{50} = F_{18}$. Das vollständige Ergebnis für alle Rand- und Außenknoten ist in Abb. 751 eingetragen.

Aufstellung der Differenzgleichungen nach (1084): Gleichung für den Punkt 3:

$$20F_3 - 8(F_2 + 0 + F_4 + F_7) + 2(F_6 + 0 + 0 + F_8) + (F_1 + F_3 + F_3 + F_{11}) = 0.$$

Gleichung für den Punkt 18:

$$20F_{18} - 8(F_{17} + F_{14} + F_{19} - 4,0 p \Delta^2) + 2(-1,5 p \Delta^2 + F_{13} + F_{15} - 5,5 p \Delta^2) + (0 + F_{10} + F_{20} + F_{18}) = 0.$$

	40	39	38	37	36
41	25	24	23	22	21
42	26	1	2	3	4
43	27	5	6	7	8
44	28	9	10	11	12
45	29	13	14	15	16
46	30	17	18	19	20
47	31	32	33	34	35
48	49	50	51	52	

Abb. 750.

0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
0	0	0	0	0	0
F_1	0	F_7	F_8	F_9	F_{10}
F_2	0	F_7	F_8	F_9	F_{10}
F_3	0	F_7	F_8	F_9	F_{10}
F_4	0	F_7	F_8	F_9	F_{10}
F_5	0	F_7	F_8	F_9	F_{10}
F_6	0	F_7	F_8	F_9	F_{10}
F_7	0	F_7	F_8	F_9	F_{10}
F_8	0	F_7	F_8	F_9	F_{10}
F_9	0	F_7	F_8	F_9	F_{10}
F_{10}	0	F_7	F_8	F_9	F_{10}
$15a$	0	$-15a$	$-40a$	$-55a$	$-80a$
0	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}

$a = p\Delta^2$

Abb. 751.

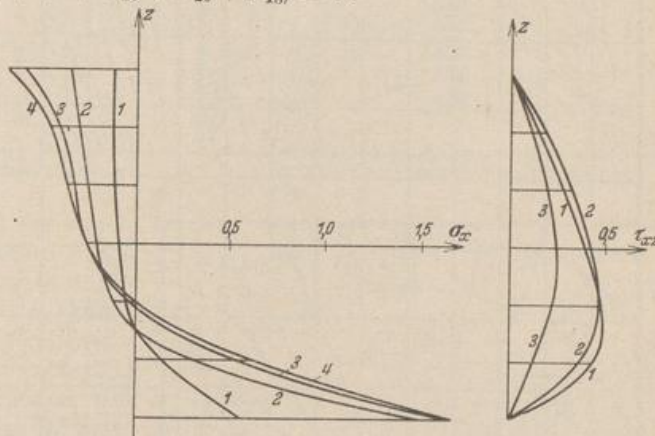


Abb. 752a, b. Spannungen σ_x und τ_{xz} in den Schnitten im Abstand $\Delta, 2\Delta, 3\Delta, 4\Delta$ vom Außenrand (Kurven 1 bis 4).

Das vollständige Gleichungssystem ist nach Zusammenfassung der einzelnen Unbekannten F_k in der Matrix auf S. 736 enthalten. Die Lösung steht auf S. 737.

Die Spannungen $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$ werden hieraus nach (1085) ermittelt. Sie sind in den Abb. 752a bis c aufgetragen. Die Abb. 753a bis c enthalten die Linien gleicher Hauptlängsspannungen σ_1, σ_2 und die Längsspannungstrajektorien, deren Verlauf bei der groben Maschenteilung der Lösung im mittleren Bereich des unteren Randes nicht angegeben werden kann. Trotzdem eignen sich die Abb. 753 zu einem kritischen Vergleich mit der Lösung für die Halbscheibe auf S. 722 und für den Streifen auf S. 730f. Dabei verdient vor allem der Einfluß der Ränder auf den Spannungszustand Beachtung.

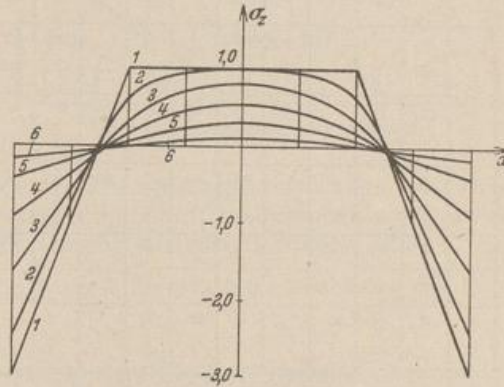


Abb. 752c. Spannungen σ_z in den Schnitten im Abstand $0, \Delta, 2\Delta, \dots, 5\Delta$ vom unteren Rand (Kurven 1 bis 6).

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}	F_{17}	F_{18}	F_{19}	F_{20}	
1	+22	-8	+1		-8	+2			+1												
2	-8	+21	-8	+1	+2	-8	+2			+1											
3	+1	-8	+22	-8		+2	-8	+2			+1										
4		+2	-16	+21			+4	-8				+1									
5	-8	+2			+21	-8	+1		-8	+2			+1								
6	+2	-8	+2		-8	+20	-8	+1	+2	-8	+2			+1							
7		+2	-8	+2	+1	-8	+21	-8		+2	-8	+2			+1						
8			+4	-8		+2	-16	+20			+4	-8				+1					
9	+1				-8	+2			+21	-8	+1		-8	+2			+1				
10		+1			+2	-8	+2		-8	+20	-8	+1	+2	-8	+2			+1			
11			+1			+2	-8	+2	+1	-8	+21	-8		+2	-8	+2			+1		
12				+1			+4	-8		+2	-16	+20			+4	-8				+1	
13					+1				-8	+2			+21	-8	+1		-8	+2			+1
14						+1			+2	-8	+2		-8	+20	-8	+1	+2	-8	+2		
15							+1			+2	-8	+2	+1	-8	+21	-8		+2	-8	+2	
16								+1			+4	-8		+2	-16	+20			+4	-8	
17									+1				-8	+2			+22	-8	+1		
18										+1			+2	-8	+2		-8	+21	-8	+1	
19											+1			+2	-8	+2	+1	-8	+22	-8	
20												+1			+4	-8		+2	-16	+21	

+ 1,5a
 + 4,0a
 + 5,5a
 + 6,0a
 - 4,0a
 - 18,0a
 - 24,0a
 - 26,0a

Lösung der Matrix auf S. 736: ($a = 1$)

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_k	-0,0466	-0,1764	-0,3005	-0,3473	-0,2053	-0,6282	-1,0040	-1,1485	-0,4631	-1,3222
h	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
F_k	-2,0395	-2,3092	-0,8172	-2,2306	-3,3332	-3,7338	-1,2242	-3,2490	-4,6725	-5,1662

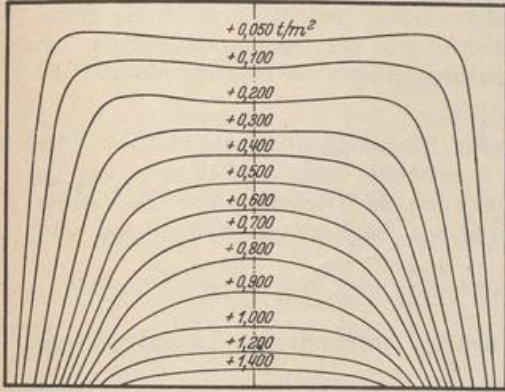


Abb. 753a. Linien gleicher Hauptspannung σ_1 .

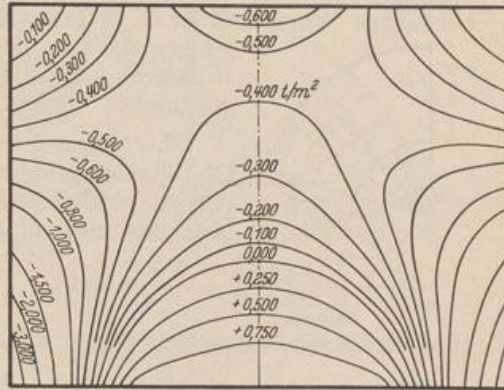


Abb. 753b. Linien gleicher Hauptspannung σ_2 .

Der Spannungszustand der Scheiben mit $H \ll L$, der aus den Schnittkräften nach Abschn. 10 statisch bestimmt angegeben werden kann, unterscheidet sich von dem Spannungszustand gedrungener Scheiben vor allem durch das Verhältnis von σ_z zu σ_x . In dem einen Falle ist $\sigma_z \ll \sigma_x$, in dem anderen Falle sind beide Spannungen von der gleichen Größenordnung. Das Vorzeichen der Längsspannung σ_x wechselt beim Träger in der Achse, dagegen bei gedrunge- nen Scheiben mit $H \approx L$ in den Wendepunkten der Querschnitte $x = \text{const}$ der Spannungsfläche F , also

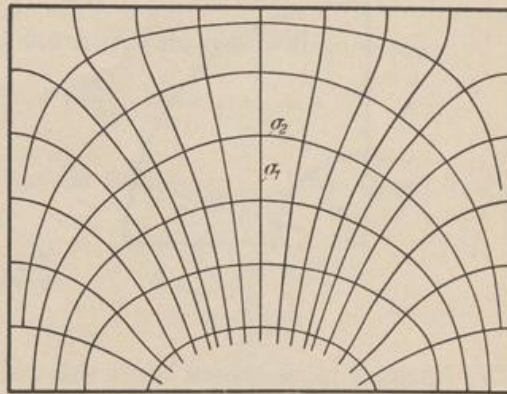


Abb. 753c. Längsspannungstrajektorien.

in der Nähe des abgestützten Scheibenrandes. Die Spannungen in Längs- oder Querschnitten lassen sich aber auch hier stets zu Schnittkräften zusammenfassen, welche mit den äußeren Kräften am Rande die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen.

Bay, H.: Über den Spannungszustand in hohen Trägern und die Bewehrung von Eisenbetonwänden. Stuttgart 1931.

77. Angenäherte Untersuchung des Spannungszustandes in Rahmenecken.

Während die statisch bestimmte Berechnung der Spannungen aus den Schnittkräften zur Beurteilung der Festigkeit der Rahmenstäbe ausreicht, läßt sich das Kraftfeld im Bereich der Winkelpunkte der Stabachsen nur mit einem ebenen Spannungszustand vergleichen. Dieser ist durch polarisationsoptische Untersuchun-

gen an rechtwinkligen, auf Biegung beanspruchten Stabecken gemessen worden. Darnach ist der ausspringende Bereich der Ecke fast spannungsfrei. Aus diesem Grunde liegt es nahe, das vorgeschriebene polygonale Kraftfeld durch einen Kreisringsektor mit konzentrischen Rändern zu begrenzen und die Spannungsaufgabe mit Polarkoordinaten zu lösen, wenn dabei sich voraussichtlich auch der Verschiebungszustand ändern wird.

Um die Randbedingungen und damit auch die Zahlenrechnung zu vereinfachen, wird über die Eintragung der Schnittkräfte an den Querschnitten der Scheibe nichts ausgesagt. Hier gelten vielmehr nur die Gleichgewichtsbedingungen zwischen den bekannten Schnittkräften N, M, Q des Rahmenstabes und den errechneten Spannungen σ_t, τ_{tr} , die ebenso wie die Spannungsfunktion mit Rücksicht auf die Randbedingungen in Polarkoordinaten an-

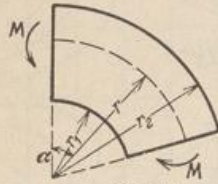


Abb. 754.

geschrieben werden.

Übertragung zweier Biegemomente M (Abb. 754).

Die Spannungen sind unabhängig vom Winkel α , so daß die partielle Differentialgleichung (1057) ebenso wie die Plattengleichung (947) in bezug auf die Veränderliche r total wird.

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right) \left(\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr}\right) = 0; \quad \sigma_r = \frac{1}{r} \frac{dF}{dr}, \quad \sigma_t = \frac{d^2 F}{dr^2}, \quad \tau_{rt} = 0.$$

Ihre allgemeine Lösung steht bereits auf S. 650 und lautet mit $r_2/r = \varrho$ und $r_2/r_1 = \varrho_1$

$$F = c_0 + c_1 \ln \varrho + c_2 \frac{1}{\varrho^2} + c_3 \frac{1}{\varrho^2} \ln \varrho. \tag{1086}$$

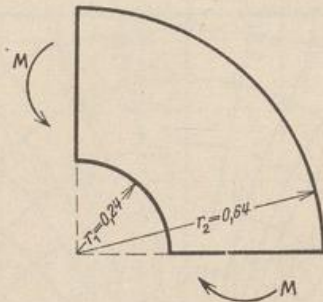


Abb. 755 a.

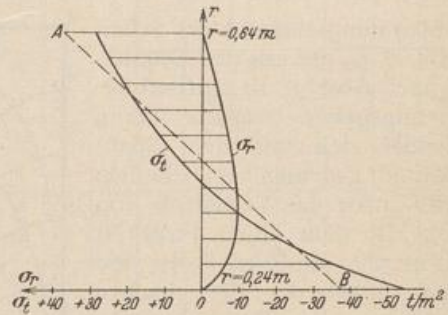


Abb. 755 b.

Die Integrationskonstanten lassen sich aus den Bedingungen

$$\sigma_r = -\frac{1}{r^3} (c_1 \varrho^2 - 2 c_2 + c_3 - 2 c_3 \ln \varrho) = 0$$

an den Rändern $r = r_1$ und $r = r_2$ und $M = \int_{r_1}^{r_2} \sigma_t r dr$ bestimmen. Man erhält mit

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= r_1^2 [(\varrho_1^2 - 1)^2 - 4 \varrho_1^2 (\ln \varrho_1)^2], \\ c_1 &= -\frac{M}{T_1} r_2^2 \cdot 4 \ln \varrho_1, \quad c_2 = \frac{M}{T_1} r_2^2 (1 - \varrho_1^2 - 2 \ln \varrho_1), \quad c_3 = \frac{M}{T_1} r_2^2 \cdot 2 (1 - \varrho_1^2) \end{aligned} \right\} \tag{1087 a}$$

und daraus

$$\sigma_r = \frac{4 M}{T_1} \left(-\ln \frac{\varrho_1}{\varrho} - \varrho_1^2 \ln \varrho + \varrho^2 \ln \varrho_1\right), \quad \sigma_t = \frac{4 M}{T_1} \left(\varrho_1^2 - 1 - \ln \frac{\varrho_1}{\varrho} - \varrho_1^2 \ln \varrho - \varrho^2 \ln \varrho_1\right). \tag{1087 b}$$

σ_r und σ_t sind Hauptspannungen, die Querschnitte bleiben eben.

Für einen Sektor mit $r_1 = 0,24 \text{ m}$, $r_2 = 0,64 \text{ m}$ (Abb. 755 a) wird $\varrho_1 = 2,6667$ und $T_1 = 0,57492$. Die Auswertung der Ergebnisse (1087 b) liefert mit $M = 1 \text{ mt/m}$ die für

alle Radialschnitte gleiche Spannungsverteilung der Abb. 755b. Die Gerade AB zeigt den linearen Verlauf von σ_t nach Navier.

Ausgleich einer Querkraft. Die Querkraft Q_a (Abb. 756) steht mit den Schnittkräften N_b, M_b, Q_b im Gleichgewicht $[(Q_a, N_b, M_b, Q_b) = 0]$. Die Spannungsfunktion

$$F = \Phi(r) \cdot \sin \alpha \tag{1088}$$

mit den Spannungskomponenten

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \left(\frac{\Phi'}{r} - \frac{\Phi}{r^2} \right) \sin \alpha, & \sigma_t &= \Phi'' \cdot \sin \alpha, \\ \tau_{rt} &= - \left(\frac{\Phi'}{r} - \frac{\Phi}{r^2} \right) \cos \alpha = - \frac{\sigma_r}{\operatorname{tg} \alpha} \end{aligned} \right\} \tag{1089}$$

liefert am Rande $\alpha = 0$ nur Schubspannungen τ_{rt} . Aus

$$\Delta \Delta F = \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 \Phi}{dr^2} - \frac{\Phi}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} \right) \cdot \sin \alpha$$

folgt für $\Phi(r)$ die totale Differentialgleichung

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^2 \Phi = 0. \tag{1090a}$$

Ihre Lösung ist

$$\Phi = c_1 \frac{1}{\rho^3} + c_2 \frac{\ln \rho}{\rho} + c_3 \frac{1}{\rho} + c_4 \rho, \tag{1090b}$$

wobei wieder $r_2/r = \rho$ gesetzt wurde.

Die Integrationskonstanten c_1, c_2, c_4 lassen sich aus den Bedingungen

$$\sigma_r = \left(2c_1 \frac{1}{\rho} - c_2 \rho - 2c_4 \rho^3 \right) \frac{\sin \alpha}{r^2} = -\tau_{rt} \operatorname{tg} \alpha = 0$$

an den Rändern $r = r_1$ und $r = r_2$ und aus der Bedingung $\int_{r_1}^{r_2} \tau_{rt} dr = Q_a$ am Rande

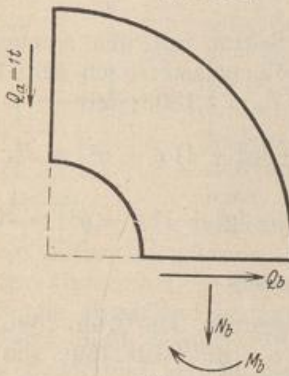


Abb. 757.

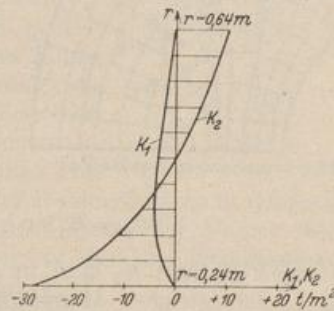


Abb. 758.

$\alpha = 0$ ermitteln. Die Integrationskonstante c_3 ist ohne Einfluß auf die Spannungen und daher beliebig. Mit der Abkürzung

$$\left. \begin{aligned} T_2 &= r_2^{-1} [(\rho_1^2 + 1) \ln \rho_1 - (\rho_1^2 - 1)] \\ c_1 &= \frac{\rho_1^2}{2} \frac{Q_a}{T_2}, & c_2 &= (\rho_1^2 + 1) \frac{Q_a}{T_2}, & c_4 &= -\frac{1}{2} \frac{Q_a}{T_2} \end{aligned} \right\} \tag{1091a}$$

und damit

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{Q_a}{T_2} \left[\frac{\varrho_1^2}{\varrho} - (\varrho_1^2 + 1) \varrho + \varrho^3 \right] \sin \alpha, & \tau_{rt} &= -\frac{\sigma_r}{\operatorname{tg} \alpha}, \\ \sigma_t &= \frac{Q_a}{T_2} \left[3 \frac{\varrho_1^2}{\varrho} - (\varrho_1^2 + 1) \varrho - \varrho^3 \right] \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (1091 b)$$

Die Spannungsergebnisse im Schnitt $b (\alpha = \alpha_0)$ stehen mit Q_a im Gleichgewicht:

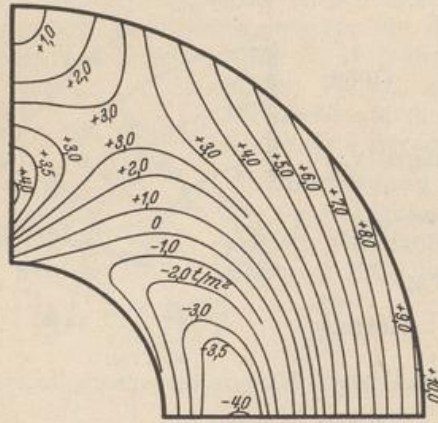


Abb. 759 a. Linien gleicher Hauptspannung σ_1 .

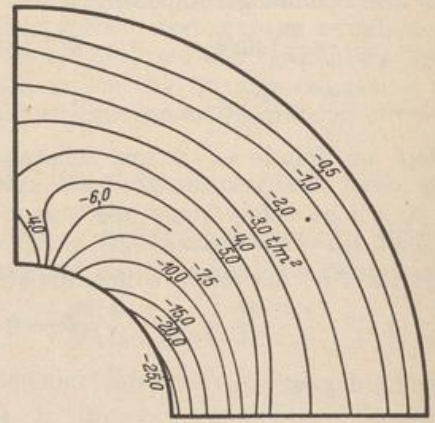


Abb. 759 b. Linien gleicher Hauptspannung σ_2 .

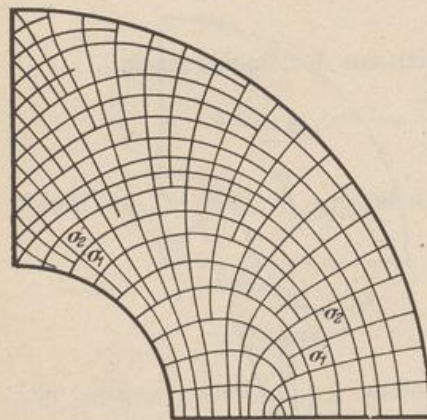


Abb. 759 c. Längsspannungstrajektorien.

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{r_2} \sigma_t dr &= N_b = -Q_a \sin \alpha_0, \\ \int_{r_1}^{r_2} \tau_{rt} dr &= Q_b = Q_a \cos \alpha_0, \\ \int_{r_1}^{r_2} \sigma_t (r - r_0) dr &= M_b = Q_a r_0 \sin \alpha_0. \end{aligned}$$

Für den Sektor mit den Abmessungen nach Abb. 755 a, belastet nach Abb. 757, ist $q_1 = 2,6667$, $T_2 = 1,1805$. Mit

$$\begin{aligned} \frac{Q_a}{T_2} \left[\frac{\varrho_1^2}{\varrho} - (\varrho_1^2 + 1) \varrho + \varrho^3 \right] &= K_1, \\ \frac{Q_a}{T_2} \left[3 \frac{\varrho_1^2}{\varrho} - (\varrho_1^2 + 1) \varrho - \varrho^3 \right] &= K_2 \end{aligned}$$

wird $\sigma_r = K_1 \sin \alpha, \quad \sigma_t = K_2 \sin \alpha.$

Die Funktionen K_1 und K_2 sind in Abb. 758 dargestellt. Die Abb. 759 a, b enthalten die Linien gleicher Hauptspannungen σ_1, σ_2 , die Abb. 759 c die Längsspannungstrajektorien für die Belastung nach Abb. 757.

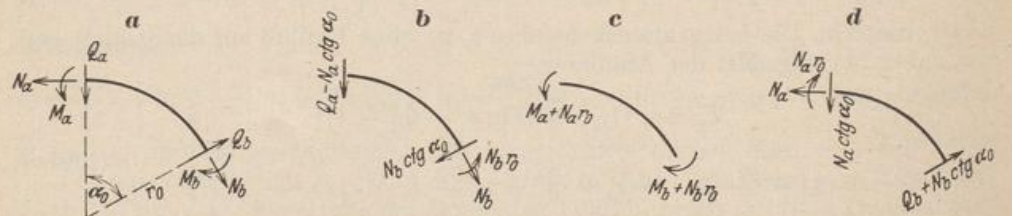


Abb. 760.

Eine Belastung des Ringsektors nach Abb. 760a läßt sich durch Aufspaltung in die drei Anteile Abb. 760b, c, d auf die beiden Grundfälle zurückführen.

Preuß, E.: Versuche über die Spannungsverminderung durch die Ausrundung scharfer Ecken. Forsch.-Arb. Ing.-Wes. Heft 126. Berlin 1912. — Grüning, M.: Die Spannungen im Knotenpunkt eines Vierecksträgers. Eisenbau 1914 S. 162. — Wyß, Th.: Die Kraftfelder in festen elastischen Körpern. Berlin 1926. — Cardinal v. Widdern, H.: Polarisationsoptische Spannungsmessungen an Stabecken. Mitteilungen aus dem Mechan.-Techn. Laboratorium der T. H. München. 3. Folge Heft 34. München 1930. — Kurzhalz, H.: Polarisationsoptische Untersuchungen an rechtwinkligen, auf Biegung beanspruchten Stabecken. Mitteilungen aus dem Mechan.-Techn. Laboratorium der T. H. München. 3. Folge Heft 35. München 1931.

78. Der Spannungszustand in Rahmenknoten.

Die Lösung der Aufgabe ist angenähert für eine durch die Querschnitte a, b, c begrenzte rechteckige Knotenscheibe (Abb. 761) mit Hilfe einer Spannungsfunktion versucht worden, die zwar die Differentialgleichung (1055) und die Gleichgewichtsbedingungen in a, b, c befriedigt, dagegen nicht den Randbedingungen gerecht wird. Für das Kräftebild Abb. 761 ohne Querkraft in c ist nach M. Grüning

$$F = \frac{3Q}{8e^3f^3} \left[xy(f^2 - \frac{1}{3}y^2)(x^2l + 2e^3 - 3e^2l) + \frac{1}{5}xy l(f^2 - y^2)^2 - \frac{2}{3}f^3lx^3 \right], \quad (1092a)$$

für das Kräftebild Abb. 762 mit einer Querkraft in c (Stockwerkrahmen)

$$F = \frac{P}{16e^3f} [x^3(y+f)^2 - (y+f)^4x + (8f^2 - 3e^2)x(y+f)^2 + 2e^3y^2]. \quad (1092b)$$

Die Spannungen lassen sich daraus mit (1054b) leicht ableiten. Die Lösung gibt jedoch ohne die ausreichende Berücksichtigung der Randbedingungen kein zutreffendes Bild des Kraftfeldes, da nicht der Spannungszustand in den einspringenden Ecken erfaßt und sein Einfluß auf den Kern des Kraftfeldes bewertet wird.

Das Problem ist neuerdings durch Spannungsmessungen und vor allem durch optische Beobachtungen geklärt und von Th. Wyß an Kraftfeldern studiert worden, die sich an Hand des Versuchsmaterials mit Hilfe der analytischen Beziehungen über Tra-

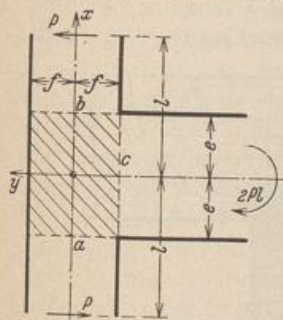


Abb. 761.

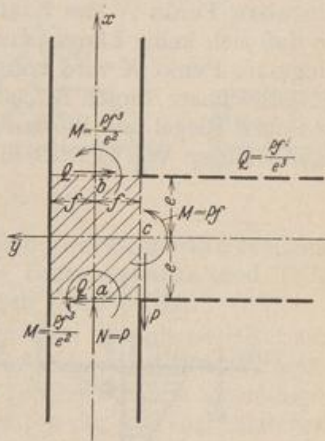


Abb. 762.

jektorien aufzeichnen lassen. Dabei wird der Rahmenknoten in denjenigen Querschnitten abgegrenzt, in denen die einfachen Gesetze der Navierschen Balkenbiegung als zutreffend angenommen werden, so daß die Randbedingungen des Kraftfeldes durch Schnittkräfte bekannt sind.

Das Kräftebild zerfällt bei symmetrischen Knotenscheiben, die hier vorausgesetzt werden sollen, in den symmetrischen und in den antisymmetrischen Anteil mit grundsätzlich verschiedenen, ausgezeichneten Kraftfeldern.

a) Symmetrie der Belastung. Die Biegemomente, Quer- und Längskräfte der Querschnitte a, b sind einander gleich, am Querschnitt c ist nur die Längskraft $N_c = 2Q_a$ von Null verschieden (Abb. 763a). Die Schubspannungen sind in der Symmetrielinie Null, die Hauptspannungen σ_1, σ_2 parallel zur x - und y -Achse. Das Kraftfeld stimmt mit demjenigen eines im Bereich c verstärkten Balkenabschnitts überein, der hier eine gleichförmig verteilte Belastung aufnimmt (Abb. 763b). Die Kraftlinien α beschreiben im wesentlichen den Kraftfluß und die Beziehungen

zwischen den beiden Riegeln, die Kraftlinien β denjenigen zwischen Riegel und Pfosten, während die Kraftlinien γ und δ die Trägerwirkung der Knotenscheibe wiedergeben. Die Biegemomente an den Riegelquerschnitten werden also im wesentlichen unmittelbar übertragen.

b) Antimetrie der Belastung. Die Biegemomente, Quer- und Längskräfte der beiden Querschnitte a, b sind entgegengesetzt gleich (Abb. 764a); am

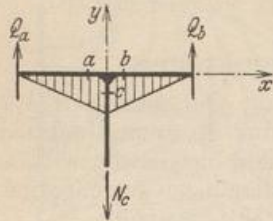


Abb. 763 a.

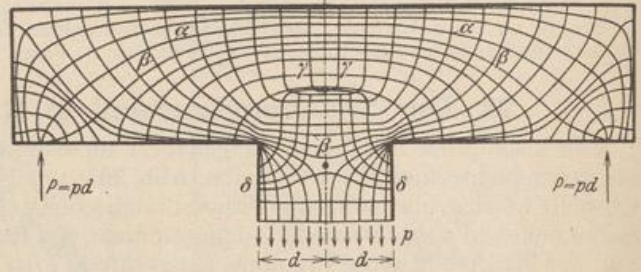


Abb. 763 b.

Querschnitt c ist $N_c = 0$, $Q_c = N_a + N_b$, $M_c = 2 M_a$. Die Längsspannungen σ_x, σ_y sind in der Symmetrieachse Null und daher die Hauptschubspannungen hier nach x und y gerichtet. Die Symmetrieachse ist also Trajektorie der Hauptschubspannungen. Sie wird von den Hauptlängsspannungen unter 45° geschnitten. Der singuläre Punkt N des Kraftfeldes Abb. 764b ist daher ein Spannungsnulldpunkt, so daß sich keine Längsspannungen zwischen den beiden Riegeln ausgleichen. Der singuläre Punkt K wird von 2 Scharen von Kraftlinien umfaßt, welche durch zwei ausgezeichnete Linien NL und NR begrenzt sind und den mittelbaren Kraftfluß zwischen Riegel und Pfosten beschreiben. Außerhalb der beiden Grenzlinien ist eine unmittelbare Wechselwirkung zwischen Riegel und Pfosten vorhanden. Die Form

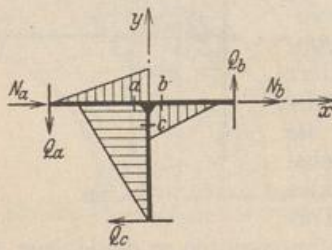


Abb. 764 a.

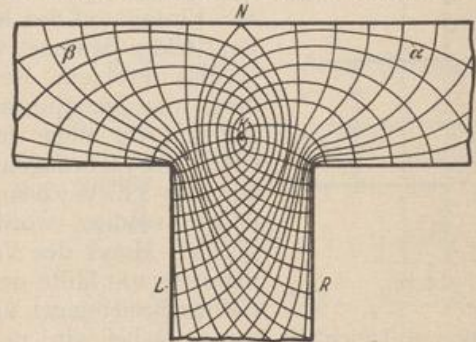


Abb. 764 b.

des Kraftfeldes bietet unter Umständen die Möglichkeit, die Spannungen durch Überlagerung der Ergebnisse der Untersuchung zweier Rahmenecken abzuschätzen.

Die beiden Scharen der Kraftlinien α, β schneiden sich rechtwinklig. An unbelasteten Rändern ist zur Befriedigung der Randbedingungen die eine Kraftlinie (α) parallel, die andere (β) winkelrecht zum Rande. Die ihr zugeordnete Hauptspannung σ_β ist hier Null. Parallele Kraftlinien sind ein Zeichen für konstante Hauptspannungen. Die Hauptspannungen α wachsen um so mehr, je größer die Krümmung der rechtwinklig zugeordneten Kraftlinien β ist. Je mehr daher ihr Abstand abnimmt, um so größer wird die Hauptspannung und damit die Beanspruchung des Baustoffs.

Wyß, Th.: Die Kraftfelder in festen elastischen Körpern. Berlin 1926. Hieraus sind die Abb. 763b und 764b entnommen.