



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

74. Die Scheiben

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

B. Die Scheiben.

74. Die Scheiben.

Um die allgemeine Problemstellung der Elastizitätstheorie zu vereinfachen, wird entweder der in y -Richtung unendlich lange Körper mit unveränderlichem Querschnitt und gleichförmiger Belastung $\mathfrak{P}(x, z)$ oder die dünne, durch zwei parallele Ebenen begrenzte Scheibe $\Delta y \cdot F(x, z)$ betrachtet (Abb. 707), deren Mittelebene am Rande durch äußere Kräfte belastet ist. Auf diese Weise entstehen Grenzfälle der allgemeinen Lösung mit ebenem Verzerrungszustand ($v = \text{const}$, $\gamma_{yz} = 0$, $\gamma_{yx} = 0$) oder mit ebenem Spannungszustand ($\sigma_y = 0$, $\tau_{yz} = 0$, $\tau_{yx} = 0$).

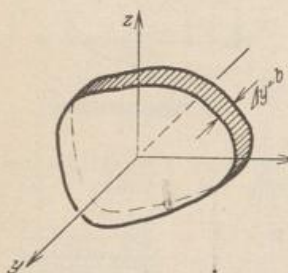


Abb. 707.

Die Spannungen $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$ der Scheibe sind parallel zur Mittelebene und bedeuten bei endlicher Dicke $\Delta y = b$ Mittelwerte, an deren Stelle auch die auf die Scheibendicke b bezogenen Längs- und Schubkräfte N_x, N_z, N_{xz} treten können. Die Beanspruchung und die Verzerrung der Scheibe infolge der Querdehnung des Baustoffs senkrecht zur Mittelebene werden vernachlässigt. Die begrenzenden Ebenen der Scheibe sind also auch nach der Formänderung eben und parallel.

Die inneren Kräfte der Scheibe bilden in jedem Punkte einen Tensor mit der aus (920) bekannten Komponententransformation. Danach ist die Summe s der beiden Längsspannungen ebenso wie die Momentensumme M der Plattenbiegung unabhängig vom Koordinatensystem und eine skalare Funktion in x und z . Mit $\psi \rightarrow \psi_0$ oder $\psi \rightarrow \psi'_0$ nach (921) entstehen die Hauptlängsspannungen σ_1, σ_2 und die Hauptschubspannungen $\tau_{12} = \tau_{21}$, die sich zu Isoklinen, Trajektorien und Linien mit gleichgroßer Hauptlängsspannung und gleichgroßer Hauptschubspannung zusammenfassen lassen. Von diesen besitzt das Feld der Hauptlängsspannungen für die bauliche Ausgestaltung der Scheiben besondere Bedeutung. Es besteht aus den Zug- und Druckkraftlinien und enthält meist auch noch singuläre Punkte, deren Existenz, deren Lage und deren Eigenschaften für das Bild des Kraftfeldes und damit für die Übertragung der Kräfte Bedeutung besitzen.

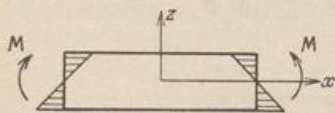


Abb. 708.

Man unterscheidet singuläre Nullpunkte, singuläre Punkte mit endlicher Kraftwirkung und singuläre Unendlichkeitspunkte als Folge der Scheibenbegrenzung oder als Folge von Einzellasten.

Um die Spannungen allein aus den Gleichgewichtsbedingungen (910) und damit statisch bestimmt zu berechnen, wird die Normalspannung σ_x nach Navier linear in z angenommen. Die Lösung gilt streng für einen ebenen Streifen, an dessen Enden Kräftepaare wirken (Abb. 708), und genügt mit der bei technischen Aufgaben notwendigen Genauigkeit auch bei anderen Belastungen von Scheiben, deren Höhe gegenüber der Länge zwischen den Stützpunkten klein ist, wenn der Bereich neben Einzellasten oder neben Unstetigkeiten der Begrenzung ausscheidet. Die statisch bestimmte Beschreibung des Spannungszustandes ist daher bei hohen Trägern mit kleiner Stützweite und im Bereich von Ecken, Knickstellen und Verzweigungen des Streifens unzureichend.

Der statisch unbestimmte Spannungszustand. 1. Annahmen und Abkürzungen nach S. 643. Der Spannungszustand ist eben und durch $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$ bestimmt. $\sigma_y = \tau_{yz} = \tau_{yx} = 0$. Die Komponenten $\varepsilon_y, \gamma_{yz}, \gamma_{yx}$ der Verzerrung sind

klein im Vergleich zu den übrigen Komponenten $\varepsilon_x, \varepsilon_z, \gamma_{xz}$ und werden daher vernachlässigt ($\varepsilon_y = \gamma_{yz} = \gamma_{yx} = 0$).

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}, \quad \mu = \frac{1}{m}, \quad \varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z, \quad s = \sigma_x + \sigma_z, \quad \Delta = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right].$$

s ist gegenüber einer Drehung des Koordinatensystems invariant.

Z bedeutet die auf die Einheit bezogene konstante Massenkraft (Eigengewicht).

2. Gleichgewichtsbedingungen nach S. 643.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + Z = 0, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}. \quad (1049)$$

3. Elastizitätsgesetz nach S. 643.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{2G} \left(\sigma_x - \frac{s}{m+1} \right), & \varepsilon_z &= \frac{1}{2G} \left(\sigma_z - \frac{s}{m+1} \right), & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G}, \\ \sigma_x &= 2G \left(\varepsilon_x + \frac{e}{m-2} \right), & \sigma_z &= 2G \left(\varepsilon_z + \frac{e}{m-2} \right), & e &= \frac{1}{2G} s \frac{m-2}{m+1}. \end{aligned} \right\} \quad (1050)$$

4. Verträglichkeitsbedingungen nach S. 18.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (1051)$$

Die Verwendung der Beziehungen 3. und 4. in 2. liefert folgende Gleichgewichtsbedingungen:

$$G \left(\Delta u + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial x} \right) = 0, \quad G \left(\Delta w + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial z} \right) + Z = 0. \quad (1052)$$

Aus der Addition der beiden nach x und z differenzierten Gleichungen entsteht mit $\partial Z / \partial z = 0$ die Bedingung

$$\Delta e = 0 \quad \text{oder} \quad \Delta s = 0, \quad \text{also} \quad -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = 0. \quad (1053)$$

Soll diese allgemeine Differentialbeziehung des Spannungszustandes durch eine Veränderliche F beschrieben werden, so muß diese die Gleichgewichtsbedingungen (1049) erfüllen. Dies geschieht nach G. B. Airy mit

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}, \quad \sigma_z = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} - Zx, \quad (1054a)$$

bei fehlenden Massenkraften auch mit

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}, \quad \sigma_z = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}, \quad (1054b)$$

so daß der ebene Spannungszustand nach (1053) und (1054) durch folgende Bedingung bestimmt ist:

$$\Delta s = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right) = \Delta \Delta F = \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial z^4} = 0. \quad (1055)$$

Die Gleichung kann ebenso wie auf S. 646 in zwei partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung zerlegt und nach (935) in Polarkoordinaten angeschrieben werden.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = s, \quad \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = 0, \quad s = \sigma_x + \sigma_z. \quad (1056)$$

$$\Delta \Delta F = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right)^2 F = 0 \quad (1057)$$

mit

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}, \quad \sigma_t = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad \tau_{rt} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right). \quad (1058)$$

Die Funktion F ist unter dem Namen Airysche Spannungsfunktion bekannt. Sie genügt nach (929) der Differentialgleichung einer an der Oberfläche kräftefreien Platte, so daß die Ordinaten F mit den Verschiebungen w einer elastischen, durch Randkräfte erzeugten Biegefläche mit den durch (1061) vorgeschriebenen Randbedingungen verglichen werden können. Die Fläche wird Airysche Fläche oder Spannungsfläche genannt, da ihre Krümmungen nach (1054b) die Längsspannungen der Scheibe beschreiben. Diese Erkenntnis ist von K. Wieghardt verwendet worden, um die Spannungen der Scheibe an der Formänderung eines dünnen Bleches auszumessen.

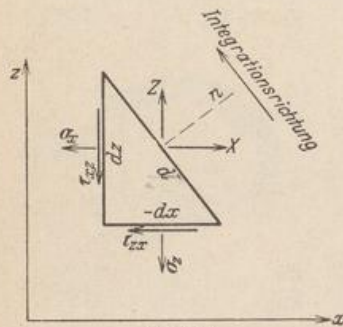


Abb. 709.

Die Randbedingungen. Die analytische Untersuchung des Spannungszustandes besteht in der Ermittlung einer Funktion $F(x, z)$, welche die partielle Differentialgleichung (1055) und die von Randkräften $X(x, z)$, $Z(x, z)$ vorgeschriebenen Bedingungen für σ_n und τ_{nl} erfüllt. Um diese auch bei einer allgemeinen Begrenzung der Scheibe in einfacher Form auszusprechen, wird das Gleichgewicht der Kräfte an einem Randabschnitt der Scheibe betrachtet. Nach Abb. 709 ist

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{zx} \cos(n, z) &= X, \\ \tau_{xz} \cos(n, x) + \sigma_z \cos(n, z) &= Z \end{aligned} \right\} \quad (1059)$$

und mit (1054b) und

$$\left. \begin{aligned} \cos(n, x) &= \frac{dz}{dl}, & \cos(n, z) &= -\frac{dx}{dl}, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \frac{dz}{dl} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \frac{dx}{dl} &= X, & -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \frac{dz}{dl} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{dx}{dl} &= Z, \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= \int_0^k X dl = R_x, & \frac{\partial F}{\partial x} &= -\int_0^k Z dl = -R_z. \end{aligned} \right\} \quad (1060)$$

Danach lassen sich die Randbedingungen der Spannungsfunktion bei beliebiger Begrenzung und Belastung der Scheibe in folgender Weise anschreiben:

$$\int \left(\frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial x} dx \right) = F = \int (R_x dz - R_z dx),$$

$$F_k = \int_0^k [X(z_k - z) - Z(x_k - x)] dl. \quad (1061a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial n} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dn} = -R_z \cos(l, z) + R_x \cos(l, x) = -R_l. \quad (1061b)$$

Die Spannungsfunktion F und ihre Normalableitung $\partial F/\partial n$ sind daher in einem beliebigen Punkte K des Randes bis auf die in (1061a) und (1061b) nicht enthaltenen Integrationskonstanten durch das Moment und die Tangentialkomponente R_l der Resultierenden der Randbelastung im Punkte k des Scheibenrandes bestimmt. Der Anfangspunkt der Integration ist beliebig. Durch seine Wahl würden nur die Integrationskonstanten in (1061a) und (1061b) festgelegt werden, welche auf die Spannungen und Verschiebungen ohne Einfluß sind, da diese nur von zweiten und höheren Differentialquotienten abhängen. Die Ableitung der Spannungsfunktion nach der Tangente des Scheibenrandes ist an einspringenden Ecken und an den Angriffspunkten von Einzellasten unstetig. Die Krümmung der Spannungsfläche wird daher hier unendlich. Dasselbe gilt von der Längsspannung.

Die formale Lösung der Aufgabe ist nur in einzelnen Fällen möglich. Zwar lassen sich ebenso wie bei der Integration der Plattengleichung (929) leicht Funktionen anschreiben, welche die Differentialgleichung (1055) erfüllen, dagegen gelingt

die Befriedigung der Randbedingungen durch eine rechnerisch brauchbare Reihenentwicklung nur bei denjenigen Scheiben, die nach drei und vier Seiten unbegrenzt sind oder parallele Ränder besitzen. Das sind die Ebene und geradlinig, keilförmig oder kreisförmig begrenzte Abschnitte der Ebene. Aus diesem Grunde ist auch die Umordnung der Belastung bei symmetrisch ausgebildeten Scheiben nützlich. Die Randbedingungen werden auf diese Weise symmetrisch oder antisymmetrisch. Die Anzahl der in einem Ansatz zu befriedigenden Randbedingungen ist dann kleiner und der Ansatz selbst kürzer. Er muß die Differentialgleichung und nach (1060) oder (1061) differenziert die vorgeschriebenen Randbedingungen erfüllen.

Spannungszustand in einer Halbscheibe. Randbedingungen für $z = 0$: $\sigma_z = 0, \tau_{xz} = 0$ oder vorgeschrieben.

a) Belastung durch die Einzellast P_1 winkelrecht zur Begrenzung (Abb. 710).

$$F = \frac{P_1}{\pi} r \alpha \sin \alpha, \quad \sigma_r = \frac{2 P_1}{\pi} \frac{\cos \alpha}{r}, \quad \sigma_t = 0, \quad \tau_{rt} = 0, \quad (1062 a)$$

$$\sigma_z = \sigma_r \cos^2 \alpha, \quad \sigma_x = \sigma_r \sin^2 \alpha, \quad \tau_{xz} = -\sigma_r \sin \alpha \cos \alpha. \quad (1062 b)$$

In rechtwinkligen Koordinaten lauten die Gleichungen (1062b) mit $\xi = x/a, \zeta = z/a$

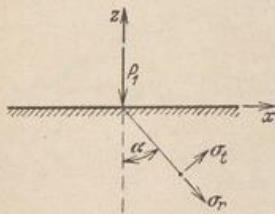


Abb. 710.

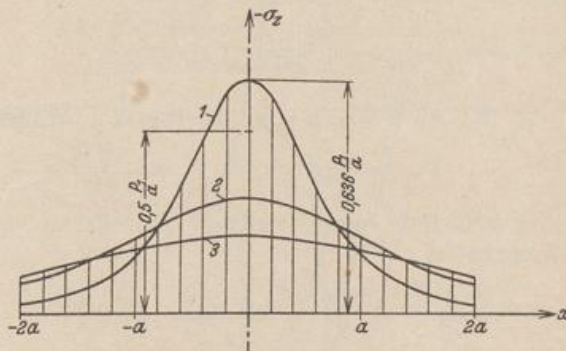


Abb. 711 a. Spannungen σ_z in den Schnitten $z = -a$ (Kurve 1), $z = -2a$ (Kurve 2), $z = -3a$ (Kurve 3).

$$\sigma_x = \frac{2 P_1}{\pi a} \frac{\xi^2 \zeta}{(\xi^2 + \zeta^2)^2},$$

$$\sigma_z = \frac{2 P_1}{\pi a} \frac{\zeta^3}{(\xi^2 + \zeta^2)^2}, \quad -\tau_{xz} = \frac{2 P_1}{\pi a} \frac{\xi \zeta^2}{(\xi^2 + \zeta^2)^2}.$$

Die Abb. 711a enthält die Spannung σ_z für mehrere Schnitte $z = \text{const}$, die Abb. 711b, c die Spannungen σ_x, τ_{xz} für mehrere Schnitte $x = \text{const}$. Die Span-

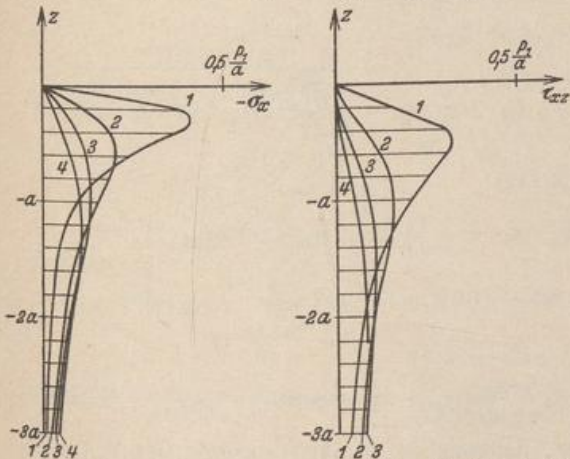


Abb. 711 b, c. Spannungen σ_x und τ_{xz} in den Schnitten $x = a/2$ (Kurve 1), $x = a$ (Kurve 2), $x = 3a/2$ (Kurve 3), $x = 2a$ (Kurve 4).

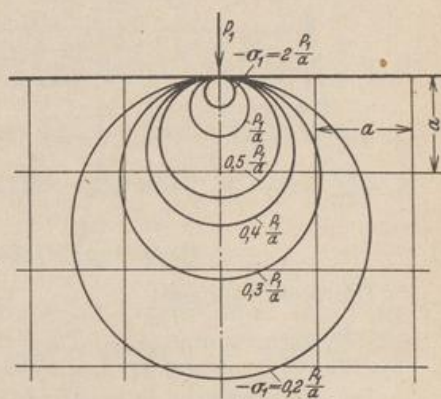


Abb. 712. Linien gleicher Hauptspannung σ_1 .

nung σ_x wechselt in diesen Schnitten nicht ihr Vorzeichen, so daß $\int_{-\infty}^0 \sigma_x dz$ einen von x unabhängigen endlichen Wert besitzen muß, der zu $-P_1/\pi$ gefunden wird.

Die Linien gleicher Hauptspannung σ_1 sind Kreise durch den Koordinatenanfangspunkt mit der Gleichung

$$\xi^2 + \left(\zeta - \frac{1}{n}\right)^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2, \quad n = \sigma_1 / \frac{P_1}{\pi a}.$$

Die Spannung σ_2 ist überall gleich Null (Abb. 712).

Die Längsspannungstrajektorien sind Kreise um den Koordinatenanfangspunkt oder die von dort ausgehenden Radien (Abb. 713).

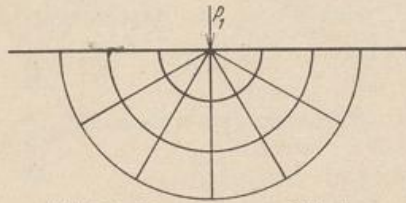


Abb. 713. Längsspannungstrajektorien.

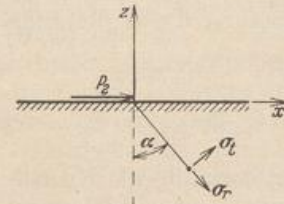


Abb. 714.

b) Belastung durch die Einzellast P_2 parallel zur Begrenzung (Abb. 714).

$$F = \frac{P_2}{\pi} r \alpha \cos \alpha, \quad \sigma_r = -\frac{2P_2}{\pi} \frac{\sin \alpha}{r}, \quad \sigma_t = 0, \quad \tau_{rt} = 0. \quad (1063)$$

c) Belastung durch mehrere Einzellasten P_k (Abb. 715). Superposition der Lösungen a).

$$\sigma_z = \frac{2}{\pi} \sum \frac{P_k \cos^3 \alpha_k}{r_k}, \quad \sigma_x = \frac{2}{\pi} \sum \frac{P_k \cos \alpha_k \sin^2 \alpha_k}{r_k}, \quad \tau_{xz} = -\frac{2}{\pi} \sum \frac{P_k \sin \alpha_k \cos^2 \alpha_k}{r_k}. \quad (1064)$$

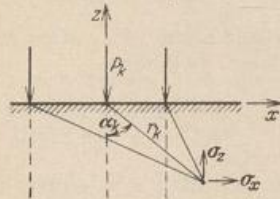


Abb. 715.

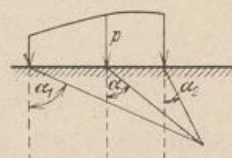


Abb. 716.

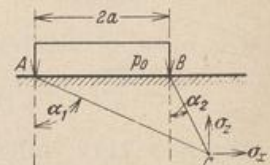


Abb. 717.

d) Stetige Streckenlast $dP = p dx$ (Abb. 716).

$$\sigma_z = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} p \cos^2 \alpha d\alpha, \quad \sigma_x = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} p \sin^2 \alpha d\alpha, \quad \tau_{xz} = -\frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} p \sin \alpha \cos \alpha d\alpha. \quad (1065)$$

Sonderfall $p = p_0 = \text{const}$ (Abb. 717):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \frac{p_0}{2\pi} [2(\alpha_2 - \alpha_1) + \sin 2\alpha_2 - \sin 2\alpha_1], & \tau_{xz} &= +\frac{p_0}{2\pi} [\cos 2\alpha_2 - \cos 2\alpha_1], \\ \sigma_x &= +\frac{p_0}{2\pi} [2(\alpha_2 - \alpha_1) - (\sin 2\alpha_2 - \sin 2\alpha_1)]. \end{aligned} \right\} \quad (1066a)$$

Hauptspannungen:

$$\sigma_1 = \frac{p_0}{\pi} [(\alpha_2 - \alpha_1) + \sin(\alpha_2 - \alpha_1)], \quad \sigma_2 = \frac{p_0}{\pi} [(\alpha_2 - \alpha_1) - \sin(\alpha_2 - \alpha_1)]. \quad (1066b)$$

Die Hauptspannung σ_1 fällt in die Richtung der Halbierungslinie des Winkels ACB (Abb. 717).

Spannungen σ_z in Schnitten $z=\text{const}$: Abb. 718 a
 „ σ_x „ „ $x=\text{const}$: „ 718 b
 „ τ_{xz} „ „ $x=\text{const}$: „ 718 c

Auch hier ist $\int_{-\infty}^0 \sigma_x dz$ von Null verschieden und gleich $-2 p_0 a / \pi$. Die Linien gleicher Hauptspannungen σ_1 oder σ_2 (Abb. 719 a) sind Kreise durch die Endpunkte der Belastung, da beide Hauptspannungen nur von der Differenz der Winkel α_1 und α_2 abhängen. Die Längsspannungstrajektorien sind in Abb. 719 b dargestellt.

Keilförmig begrenzte Scheiben mit einer Einzellast an der Spitze (Abb. 720). Die Normalspannungen σ_t und die Schubspannungen τ_{rt} der Halbscheibe in

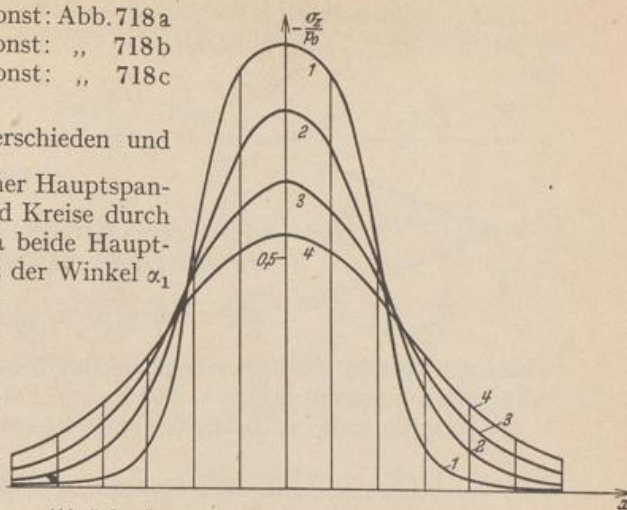


Abb. 718 a. Spannungen σ_z in den Schnitten $z = -0,5a$ (Kurve 1), $z = -a$ (Kurve 2), $z = -1,5a$ (Kurve 3), $z = -2a$ (Kurve 4).

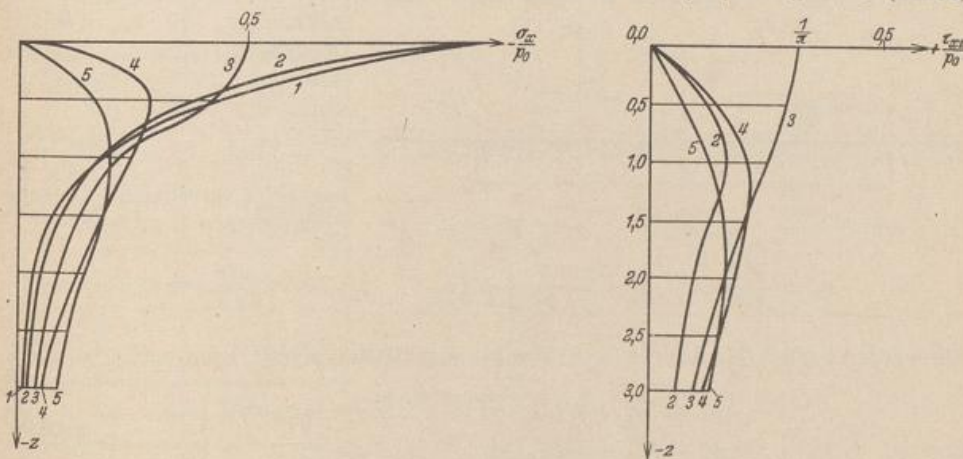


Abb. 718 b, c. Spannungen σ_x und τ_{xz} in den Schnitten $x = 0$ (Kurve 1), $x = 0,5a$ (Kurve 2), $x = a$ (Kurve 3), $x = 1,5a$ (Kurve 4), $x = 2a$ (Kurve 5).

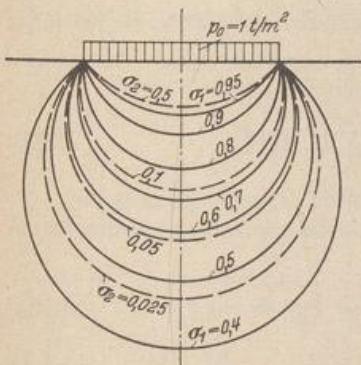


Abb. 719 a. Linien gleicher Hauptspannung σ_1 oder σ_2 .

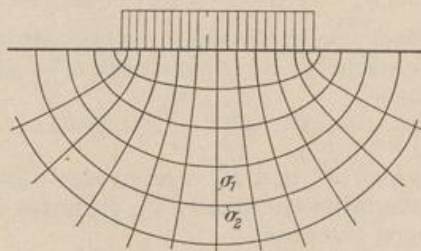


Abb. 719 b. Längsspannungstrajektorien.

Querschnitten durch den Angriffspunkt der Lasten P_1, P_2 sind Null. Der Spannungszustand bleibt daher in einem danach abgetrennten Keil unverändert.

$$\sigma_r = \frac{2 P_1 \cos \alpha}{r(2 \beta + \sin 2 \beta)} + \frac{2 P_2 \sin \alpha}{r(2 \beta - \sin 2 \beta)}, \quad \sigma_t = 0, \quad \tau_{rt} = 0. \quad (1067)$$

Halbscheibe mit periodischer Belastung des Randes (Abb. 721). Die Differentialgleichung der Spannungsfunktion wird gliedweise durch eine trigonometrische Reihe

$$F' = \sum_0^{\infty} F'_n = F'_0 + \sum_1^{\infty} Z'_n \cos \xi_n \quad \text{oder} \quad F'' = \sum_0^{\infty} F''_n = \sum_1^{\infty} Z''_n \sin \xi_n \quad (1068a)$$

$$\text{mit } \xi_n = n\pi \frac{x}{l}$$

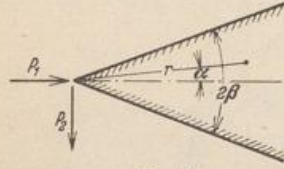


Abb. 720.

erfüllt, deren Beiwerte Z_n Funktionen von z sind und daher nach (1055) die Differentialgleichung

$$\frac{d^4 Z_n}{dz^4} - \frac{2}{l_n^2} \frac{d^2 Z_n}{dz^2} + \frac{1}{l_n^4} Z_n = 0 \quad \text{mit } l_n = \frac{l}{n\pi} \quad (1068b)$$

befriedigen müssen. Die Spannungsfunktion F ist außerdem noch durch vier Randbedingungen bestimmt. Für $z = 0$ ist $\sigma_z = \partial^2 F / \partial x^2 = -p$, $\tau_{xz} = -\partial^2 F / \partial x \partial z = 0$. Ist die Resultierende der Belastung einer Periode $2l$ von Null verschieden, so entsteht durch Überlagerung einer konstanten Zugbelastung $p_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{+l} p dx$ eine Belastung $p^* = p - p_0$ mit der Resultierenden Null. Für p^* ist also im negativ Unendlichen $\sigma_z = 0$, $\tau_{xz} = 0$. Die Druckbelastung p_0 erzeugt eine gleichförmige Beanspruchung der Scheibe mit

$\sigma_z = -p_0$, $\tau_{xz} = 0$, $\sigma_x = 0$, so daß für $p = p^* + p_0$ im negativ Unendlichen folgende Bedingungen bestehen:

Die Abbildung zeigt die periodische Belastung $p(x)$ auf der x-Achse. Die Belastung ist als Reihe von Rechtecken dargestellt, die über einer Periode $2l$ verteilt sind. Die x-Achse ist in Abschnitte der Länge l unterteilt.

Abb. 721.

$$\sigma_z = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -p_0 = -\frac{1}{2l} \int_{-l}^{+l} p dx, \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = 0.$$

Sie werden nach A. N. d. ai durch die Funktionen (1068a) erfüllt, wenn mit $\zeta_n = n\pi \frac{z}{l}$

$$\left. \begin{aligned} Z'_n &= (C'_n + D'_n \zeta_n) e^{\zeta_n}, & F'_0 &= -p_0 x^2 / 2 \\ Z''_n &= (C''_n + D''_n \zeta_n) e^{\zeta_n} \end{aligned} \right\} \quad (1068c)$$

und

gesetzt wird. Die Vorzahlen C, D hängen von den Bedingungen am Rande ($z = 0$) ab. Um hier $\sigma_z = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -p$ vorzuschreiben, wird auch die periodische Belastung p in eine trigonometrische Reihe mit geraden (cos) oder ungeraden (sin) Funktionen zerlegt, je nachdem sie symmetrisch oder antisymmetrisch ist.

$$p' = A_0 + \sum_1^{\infty} A_n \cos \xi_n, \quad p'' = \sum_1^{\infty} B_n \sin \xi_n. \quad (1069)$$

Die Vorzahlen A_n und B_n ergeben sich nach bekannten Regeln (Tabelle 66).

Die Integrationskonstanten C_n, D_n lassen sich nunmehr gliedweise aus den Randbedingungen berechnen.

$$F' = -\frac{p_0 x^2}{2} + \sum_1^{\infty} A_n l_n^2 (1 - \zeta_n) e^{\zeta_n} \cos \xi_n \quad (1070a)$$

oder

$$F'' = \sum_1^{\infty} B_n l_n^2 (1 - \zeta_n) e^{\zeta_n} \sin \xi_n \quad (1070b)$$

$$\text{mit } l_n = \frac{l}{n\pi} \quad \text{und} \quad \zeta_n = \frac{n\pi z}{l}.$$

Tabelle 66. Fourierkoeffizienten für einfache Belastungen.

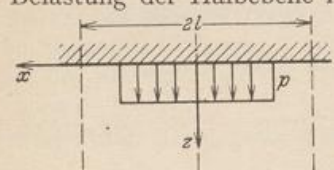
$$\gamma_n = n\pi \frac{c}{l} = \frac{c}{l} n\pi, \quad p_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{+l} p dx.$$

| | |
|--|--|
| | $A_0 = p_0 = p \frac{c}{l}, \quad A_n = 2 p_0 \frac{\sin \gamma_n}{\gamma_n}$ |
| | <p>Belastung mit der Resultierenden Null $[p_1 c = p_2 (l - c)].$</p> $p_2 = p_1 \frac{c}{l - c}, \quad A_0 = p_0 = 0, \quad A_n = 2 p_2 \frac{\sin \gamma_n}{\gamma_n}$ |
| | $A_0 = p_0 = \frac{P}{2l}, \quad A_n = \frac{P}{l}$ |
| | $A_0 = p_0 = 2 p \frac{a}{l}, \quad A_n = 2 p_0 \frac{c}{a} \frac{\cos \gamma_n}{\gamma_n} \sin n\pi \frac{a}{l}$ |
| | $A_0 = p_0 = \frac{P}{l}, \quad A_n = 2 \frac{P}{l} \cos \gamma_n$ |
| | $\bar{p} = 2 p \frac{a}{l}, \quad -B_n = 2 \bar{p} \frac{c}{a} \frac{\sin \gamma_n}{\gamma_n} \sin n\pi \frac{a}{l}$ |
| | $-B_n = 2 \frac{P}{l} \sin \gamma_n$ |
| | $B_n = -\frac{4p}{\pi n} \quad n = 1, 3, 5, \dots$ |

Bei Belastung der Halbebene nach Tabelle 66, a entsteht daher folgender Spannungszustand:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = -2 p_0 \sum_1^{\infty} \frac{\sin \gamma_n}{\gamma_n} (1 + \zeta_n) e^{\zeta_n} \cos \xi_n, \\ \tau_{xz} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = -2 p_0 \sum_1^{\infty} \frac{\sin \gamma_n}{\gamma_n} \zeta_n e^{\zeta_n} \sin \xi_n, \\ \sigma_z &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -p_0 - 2 p_0 \sum_1^{\infty} \frac{\sin \gamma_n}{\gamma_n} (1 - \zeta_n) e^{\zeta_n} \cos \xi_n. \end{aligned} \right\} (1071)$$

Die Randbedingungen für $z=0$ und $z=\infty$ lassen sich leicht nachprüfen. Bei Belastung der Halbebene nach Abb. 722 erhält p_0 das negative Vorzeichen.



Für die Spannungen am Rande ($z=0$) folgt aus

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\sum_1^{\infty} (1 + \zeta_n) e^{\zeta_n} A_n \cos \xi_n = -\sum_1^{\infty} (1 + \zeta_n) e^{\zeta_n} p_n \\ &\text{mit } \zeta_n = 0 \\ \sigma_x &= -\sum_1^{\infty} p_n = -(p - p_0). \end{aligned} \quad (1072)$$

Abb. 722.

Spannungszustand im Mittelfeld einer hohen Silowand auf mehreren Stützen.

1. Abmessungen und äußere Kräfte. Feldweite $2l = 8,00$ m, Stützenbreite $2c = 2,00$ m (Abb. 723a). Die x -Achse fällt mit dem unteren Rand, die z -Achse mit der Feldmitte zusammen. Die gleichförmig verteilte Zugbelastung $-p'$ in t/m liefert auf die Wandstärke b bezogen die Belastung $-p = -p'/b$ in t/m². Die Untersuchung wird für $p = -1$ t/m² durchgeführt. Stützkraft: $q = p \cdot l/c = 4p$. Durch Superposition von Belastung und Stützkraften entsteht das Belastungsbild Abb. 723b. Die Entwicklung nach Fourier (S. 719) liefert

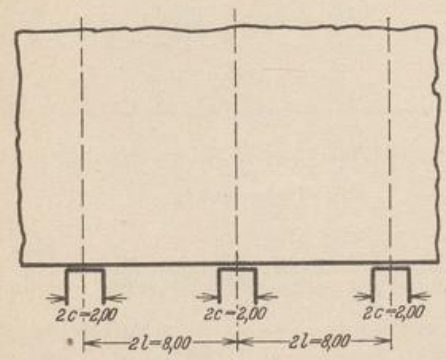


Abb. 723a.

$$A_0 = 0 \text{ und mit } p_2 = p \frac{l-c}{c} \quad A_n = 2 p_2 \frac{\sin n \pi \frac{l-c}{l}}{n \pi \frac{l-c}{l}}$$

also

$$A_n = 6p \frac{\sin n \pi \frac{3}{4}}{n \pi \frac{3}{4}} = -\frac{8}{n \pi} \sin \frac{3}{4} n \pi.$$

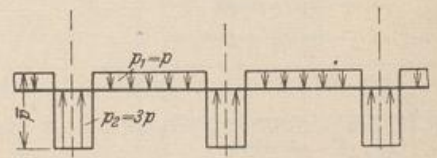


Abb. 723b.

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|-------|------------|------------|------------|---|------------|------------|------------|---|
| A_n | -1,800 633 | +1,273 240 | -0,600 211 | 0 | +0,360 127 | -0,424 413 | +0,257 233 | 0 |

Die ersten fünf Fourierglieder ergeben als Annäherung der Belastungsfunktion 1 die Kurve 2 der Abb. 724, die ersten acht Glieder die Kurve 3. Wird die Berechnung der Spannungen auf die ersten fünf Glieder beschränkt, so entsteht die strenge Lösung für die Belastung nach Kurve 2.

2. Ermittlung von $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$. Nach (1054b) und (1070) ist

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\sum_1^5 (1 + \zeta_n) e^{\zeta_n} \cdot A_n \cos \xi_n = -\sum_1^5 \psi_n(\zeta) \cdot E_n(\xi), \\ \sigma_z &= -\sum_1^5 (1 - \zeta_n) e^{\zeta_n} \cdot A_n \cos \xi_n = -\sum_1^5 \varphi_n(\zeta) \cdot E_n(\xi), \\ \tau_{xz} &= -\sum_1^5 \zeta_n \cdot e^{\zeta_n} \cdot A_n \sin \xi_n = -\sum_1^5 \chi_n(\zeta) \cdot F_n(\xi). \end{aligned}$$

Die Spannungen werden für einzelne Schnitte $z = \text{const}$ berechnet. Dabei ergeben sich z. B. für $z = -0,25 l$ die folgenden Werte der Funktionen ψ, φ, χ :

| n | 1 | 2 | 3 | 5 |
|------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| ξ_n | -0,785398 | -1,570796 | -2,356194 | -3,926991 |
| $\psi_n(\xi)$ | +0,09788 | -0,11866 | -0,12854 | -0,05767 |
| $\varphi_n(\xi)$ | +0,81436 | +0,53441 | +0,31810 | +0,09708 |
| $\chi_n(\xi)$ | -0,35824 | -0,32654 | -0,22332 | -0,07737 |

Damit lassen sich die Spannungen für diesen Schnitt folgendermaßen anschreiben:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -0,09788 E_1(\xi) + 0,11866 E_2(\xi) + 0,12854 E_3(\xi) + 0,05767 E_5(\xi), \\ \sigma_z &= -0,81436 E_1(\xi) - 0,53441 E_2(\xi) - 0,31810 E_3(\xi) - 0,09708 E_5(\xi), \\ \tau_{xz} &= +0,35824 F_1(\xi) + 0,32654 F_2(\xi) + 0,22332 F_3(\xi) + 0,07737 F_5(\xi). \end{aligned}$$

Die Funktionen E, F sind für Achtelteilung der Strecke l in folgender Tabelle enthalten:

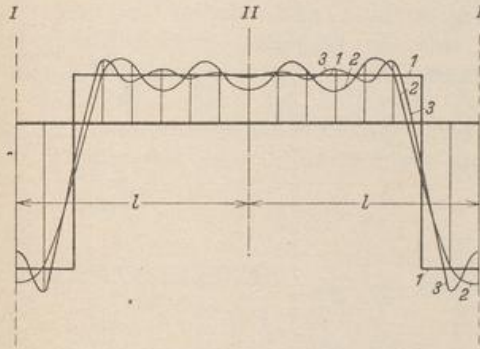


Abb. 724. Linienzug I: Gegebene Belastung, Kurve 2: Annäherung durch fünf Fourierglieder, Kurve 3: Annäherung durch acht Fourierglieder.

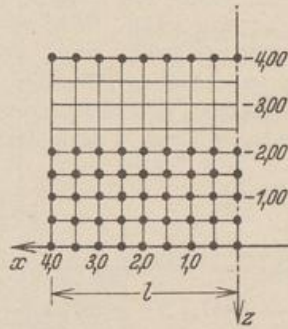


Abb. 725.

| ξ | 0 | 0,125 | 0,250 | 0,375 | 0,500 | 0,625 | 0,750 | 0,875 | 1 |
|------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $E_1(\xi)$ | -1,80063 | -1,66360 | -1,27324 | -0,68906 | 0 | +0,68906 | +1,27324 | +1,66360 | +1,80063 |
| $F_1(\xi)$ | 0 | -0,68906 | -1,27324 | -1,66360 | -1,80063 | -1,66360 | -1,27324 | -0,68906 | 0 |
| $E_2(\xi)$ | +1,27324 | +0,90032 | 0 | -0,90032 | -1,27324 | -0,90032 | 0 | +0,90032 | +1,27324 |
| $F_2(\xi)$ | 0 | +0,90032 | +1,27324 | +0,90032 | 0 | -0,90032 | -1,27324 | -0,90032 | 0 |
| $E_3(\xi)$ | -0,60021 | -0,22968 | +0,42442 | +0,55454 | 0 | -0,55454 | -0,42442 | +0,22968 | +0,60021 |
| $F_3(\xi)$ | 0 | -0,55454 | -0,42442 | +0,22968 | +0,60021 | +0,22968 | -0,42442 | -0,55454 | 0 |
| $E_5(\xi)$ | +0,36013 | -0,13782 | -0,25466 | +0,33272 | 0 | -0,33272 | +0,25466 | +0,13782 | -0,36013 |
| $F_5(\xi)$ | 0 | +0,33272 | -0,25466 | -0,13782 | +0,36013 | -0,13782 | -0,25466 | +0,33272 | 0 |

Die Auswertung der allgemeinen Ansätze liefert demnach für $z = -0,25 l$ folgende Spannungen in t/m^2 :

| ξ | 0 | 0,125 | 0,250 | 0,375 | 0,500 | 0,625 | 0,750 | 0,875 | 1 |
|-------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| σ_x | +0,273 | +0,234 | +0,166 | +0,052 | -0,151 | -0,266 | -0,166 | -0,021 | +0,029 |
| σ_z | +0,922 | +0,959 | +0,925 | +0,834 | +0,680 | +0,129 | -0,925 | -1,921 | -2,303 |
| τ_{xz} | 0 | -0,051 | -0,154 | -0,261 | -0,483 | -0,849 | -0,986 | -0,639 | 0 |

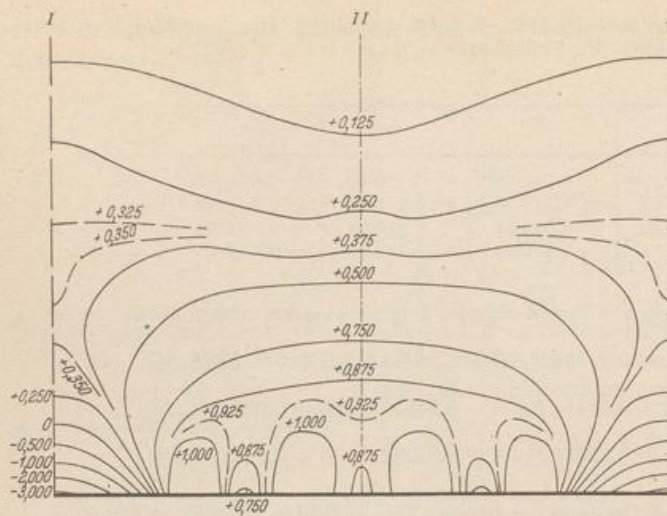
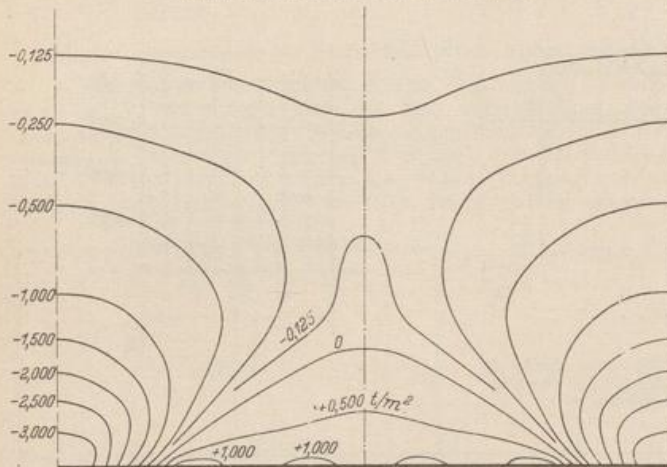
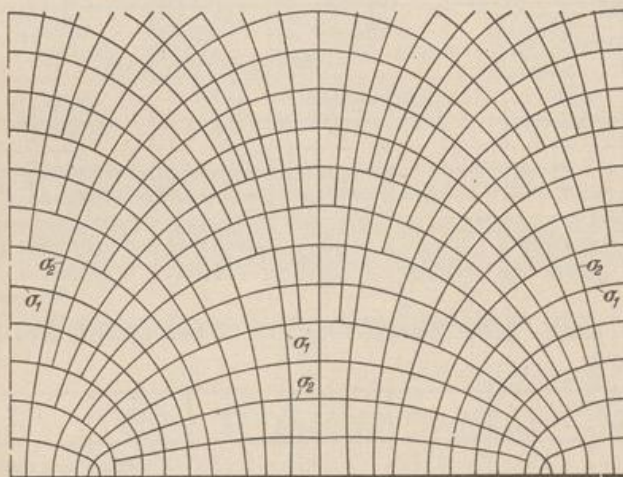
Abb. 726. Linien gleicher Hauptspannung σ_1 .Abb. 727. Linien gleicher Hauptspannung σ_2 .

Abb. 728. Längsspannungstrajektorien.

3. Hauptspannungen.
Die Hauptspannungen und ihre Richtungen werden nach (40) ermittelt. Mit den Spannungen an den in Abb. 725 eingetragenen Punkten sind die Linien gleicher Spannung σ_1 (Abbild. 726), die Linien gleicher Spannung σ_2 (Abb. 727) und die Hauptlängsspannungstrajektorien (Abb. 728) gezeichnet worden.

Föppl, A. u. L.: Drang und Zwang. Berlin u. München 1920. — Nadai, A.: Die elastischen Platten. Berlin 1925. — Wyß, Th.: Die Kraftfelder in festen elastischen Körpern. Berlin 1926. — Miura, A.: Spannungskurven in rechteckigen und keilförmigen Trägern. Berlin 1928. — Trefftz, E.: Mathematische Elastizitätstheorie, Kap. 2 im Handb. d. Physik Bd. II: Mechanik der elastischen Körper. Berlin 1928. — Flügge, W.: Spannungsermittlung in Scheiben und Schalen aus Eisenbeton. J. A. 1930 S. 481. — Hager, K.: Der ebene Spannungszustand. Z. A. M. 1932 S. 137.