



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Halbscheibe mit periodischer Belastung des Randes

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

Halbscheibe mit periodischer Belastung des Randes (Abb. 721). Die Differentialgleichung der Spannungsfunktion wird gliedweise durch eine trigonometrische Reihe

$$F' = \sum_0^{\infty} F'_n = F'_0 + \sum_1^{\infty} Z'_n \cos \xi_n \quad \text{oder} \quad F'' = \sum_0^{\infty} F''_n = \sum_1^{\infty} Z''_n \sin \xi_n \quad (1068a)$$

$$\text{mit } \xi_n = n\pi \frac{x}{l}$$

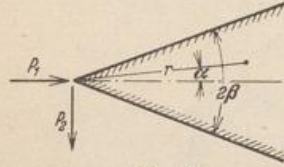


Abb. 720.

erfüllt, deren Beiwerte Z_n Funktionen von z sind und daher nach (1055) die Differentialgleichung

$$\frac{d^4 Z_n}{dz^4} - \frac{2}{l_n^2} \frac{d^2 Z_n}{dz^2} + \frac{1}{l_n^4} Z_n = 0 \quad \text{mit } l_n = \frac{l}{n\pi} \quad (1068b)$$

befriedigen müssen. Die Spannungsfunktion F ist außerdem noch durch vier Randbedingungen bestimmt. Für $z = 0$ ist $\sigma_z = \partial^2 F / \partial x^2 = -p$, $\tau_{xz} = -\partial^2 F / \partial x \partial z = 0$. Ist die Resultierende der Belastung einer Periode $2l$ von Null verschieden, so ent-

steht durch Überlagerung einer konstanten Zugbelastung $p_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{+l} p dx$ eine Belastung $p^* = p - p_0$ mit der Resultierenden Null. Für p^* ist also im negativ Un-

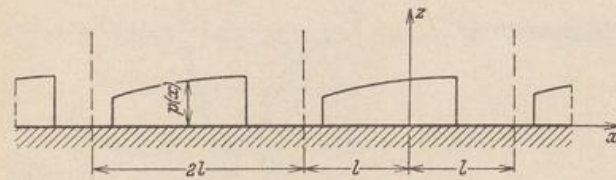


Abb. 721.

endlichen $\sigma_z = 0$, $\tau_{xz} = 0$. Die Druckbelastung p_0 erzeugt eine gleichförmige Beanspruchung der Scheibe mit

$\sigma_z = -p_0$, $\tau_{xz} = 0$, $\sigma_x = 0$,
so daß für $p = p^* + p_0$ im negativ Unendlichen folgende Bedingungen bestehen:

$$\sigma_z = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -p_0 = -\frac{1}{2l} \int_{-l}^{+l} p dx, \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = 0.$$

Sie werden nach A. N. a d a i durch die Funktionen (1068a) erfüllt, wenn mit $\zeta_n = n\pi \frac{z}{l}$

$$\left. \begin{aligned} Z'_n &= (C'_n + D'_n \zeta_n) e^{\zeta_n}, & F'_0 &= -p_0 x^2 / 2 \\ Z''_n &= (C''_n + D''_n \zeta_n) e^{\zeta_n} \end{aligned} \right\} \quad (1068c)$$

und

gesetzt wird. Die Vorzahlen C, D hängen von den Bedingungen am Rande ($z = 0$) ab. Um hier $\sigma_z = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -p$ vorzuschreiben, wird auch die periodische Belastung p in eine trigonometrische Reihe mit geraden (cos) oder ungeraden (sin) Funktionen zerlegt, je nachdem sie symmetrisch oder antisymmetrisch ist.

$$p' = A_0 + \sum_1^{\infty} A_n \cos \xi_n, \quad p'' = \sum_1^{\infty} B_n \sin \xi_n. \quad (1069)$$

Die Vorzahlen A_n und B_n ergeben sich nach bekannten Regeln (Tabelle 66).

Die Integrationskonstanten C_n, D_n lassen sich nunmehr gliedweise aus den Randbedingungen berechnen.

$$F' = -\frac{p_0 x^2}{2} + \sum_1^{\infty} A_n l_n^2 (1 - \zeta_n) e^{\zeta_n} \cos \xi_n \quad (1070a)$$

oder

$$F'' = \sum_1^{\infty} B_n l_n^2 (1 - \zeta_n) e^{\zeta_n} \sin \xi_n \quad (1070b)$$

mit $l_n = \frac{l}{n\pi}$ und $\zeta_n = \frac{n\pi z}{l}$.

Tabelle 66. Fourierkoeffizienten für einfache Belastungen.

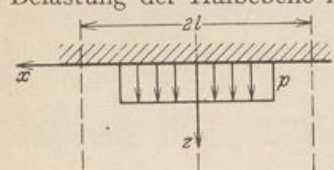
$$\gamma_n = n\pi \frac{c}{l} = \frac{c}{l} n\pi, \quad p_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{+l} p dx.$$

	$A_0 = p_0 = p \frac{c}{l}, \quad A_n = 2 p_0 \frac{\sin \gamma_n}{\gamma_n}$
	<p>Belastung mit der Resultierenden Null $[p_1 c = p_2 (l - c)].$</p> $p_2 = p_1 \frac{c}{l - c}, \quad A_0 = p_0 = 0, \quad A_n = 2 p_2 \frac{\sin \gamma_n}{\gamma_n}$
	$A_0 = p_0 = \frac{P}{2l}, \quad A_n = \frac{P}{l}$
	$A_0 = p_0 = 2 p \frac{a}{l}, \quad A_n = 2 p_0 \frac{c}{a} \frac{\cos \gamma_n}{\gamma_n} \sin n\pi \frac{a}{l}$
	$A_0 = p_0 = \frac{P}{l}, \quad A_n = 2 \frac{P}{l} \cos \gamma_n$
	$\bar{p} = 2 p \frac{a}{l}, \quad -B_n = 2 \bar{p} \frac{c}{a} \frac{\sin \gamma_n}{\gamma_n} \sin n\pi \frac{a}{l}$
	$-B_n = 2 \frac{P}{l} \sin \gamma_n$
	$B_n = -\frac{4p}{\pi n} \quad n = 1, 3, 5, \dots$

Bei Belastung der Halbebene nach Tabelle 66, a entsteht daher folgender Spannungszustand:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = -2 p_0 \sum_1^{\infty} \frac{\sin \gamma_n}{\gamma_n} (1 + \zeta_n) e^{\zeta_n} \cos \xi_n, \\ \tau_{xz} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = -2 p_0 \sum_1^{\infty} \frac{\sin \gamma_n}{\gamma_n} \zeta_n e^{\zeta_n} \sin \xi_n, \\ \sigma_z &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -p_0 - 2 p_0 \sum_1^{\infty} \frac{\sin \gamma_n}{\gamma_n} (1 - \zeta_n) e^{\zeta_n} \cos \xi_n. \end{aligned} \right\} (1071)$$

Die Randbedingungen für $z=0$ und $z=\infty$ lassen sich leicht nachprüfen. Bei Belastung der Halbebene nach Abb. 722 erhält p_0 das negative Vorzeichen.



Für die Spannungen am Rande ($z=0$) folgt aus

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\sum_1^{\infty} (1 + \zeta_n) e^{\zeta_n} A_n \cos \xi_n = -\sum_1^{\infty} (1 + \zeta_n) e^{\zeta_n} p_n \\ &\text{mit } \zeta_n = 0 \\ \sigma_x &= -\sum_1^{\infty} p_n = -(p - p_0). \end{aligned} \quad (1072)$$

Abb. 722.

Spannungszustand im Mittelfeld einer hohen Silowand auf mehreren Stützen.

1. Abmessungen und äußere Kräfte. Feldweite $2l = 8,00$ m, Stützenbreite $2c = 2,00$ m (Abb. 723a). Die x -Achse fällt mit dem unteren Rand, die z -Achse mit der Feldmitte zusammen. Die gleichförmig verteilte Zugbelastung $-p'$ in t/m liefert auf die Wandstärke b bezogen die Belastung $-p = -p'/b$ in t/m². Die Untersuchung wird für $p = -1$ t/m² durchgeführt. Stützkraft: $q = p \cdot l/c = 4p$. Durch Superposition von Belastung und Stützkraften entsteht das Belastungsbild Abb. 723b. Die Entwicklung nach Fourier (S. 719) liefert

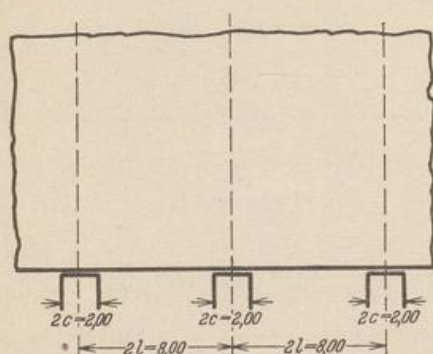


Abb. 723a.

$$A_0 = 0 \text{ und mit } p_2 = p \frac{l-c}{c} \quad A_n = 2 p_2 \frac{\sin n \pi \frac{l-c}{l}}{n \pi \frac{l-c}{l}}$$

also

$$A_n = 6 p \frac{\sin n \pi \frac{3}{4}}{n \pi \frac{3}{4}} = -\frac{8}{n \pi} \sin \frac{3}{4} n \pi.$$

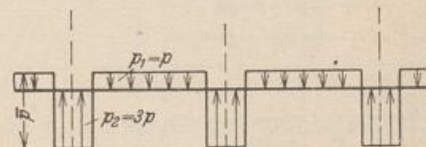


Abb. 723b.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
A_n	-1,800 633	+1,273 240	-0,600 211	0	+0,360 127	-0,424 413	+0,257 233	0

Die ersten fünf Fourierglieder ergeben als Annäherung der Belastungsfunktion 1 die Kurve 2 der Abb. 724, die ersten acht Glieder die Kurve 3. Wird die Berechnung der Spannungen auf die ersten fünf Glieder beschränkt, so entsteht die strenge Lösung für die Belastung nach Kurve 2.

2. Ermittlung von $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$. Nach (1054b) und (1070) ist

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\sum_1^5 (1 + \zeta_n) e^{\zeta_n} \cdot A_n \cos \xi_n = -\sum_1^5 \psi_n(\zeta) \cdot E_n(\xi), \\ \sigma_z &= -\sum_1^5 (1 - \zeta_n) e^{\zeta_n} \cdot A_n \cos \xi_n = -\sum_1^5 \varphi_n(\zeta) \cdot E_n(\xi), \\ \tau_{xz} &= -\sum_1^5 \zeta_n \cdot e^{\zeta_n} \cdot A_n \sin \xi_n = -\sum_1^5 \chi_n(\zeta) \cdot F_n(\xi). \end{aligned}$$