



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

75. Der Streifen mit periodischer Belastung der Ränder

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

75. Der Streifen mit periodischer Belastung der Ränder.

Der Spannungszustand in hohen Wänden ($H = 2h$) läßt sich am einfachsten an durchlaufenden Tragwerken nachweisen, die auf unendlich vielen, gleichweit entfernten Stützen ruhen ($L = 2l$) und als Streifen mit periodischer Belastung der Ränder idealisiert werden (Abb. 729). Das Eigengewicht des Streifens ist mit $g \text{ t/m}^3$ gleichförmig über die Fläche verteilt. Die Belastung aus Einzelkräften P und gleichförmig verteilten Streckenlasten p an den Rändern wird auf die Einheit der Scheibendicke bezogen.

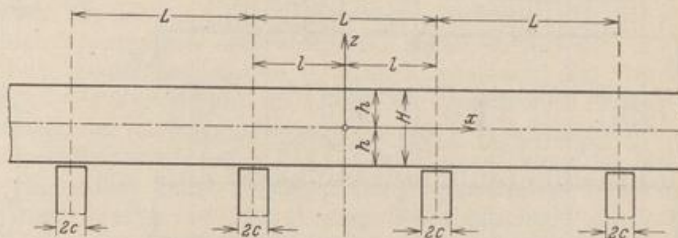


Abb. 729.

Die Belastung.

Zur allgemeinen Beurteilung des Spannungszustandes genügen die Belastungsannahmen

nach Abb. 730a bis c am oberen oder unteren Rande. Bei einem Wechsel von belasteten mit unbelasteten Feldern (Abb. 731a) werden die Spannungen aus einer gleichförmigen Belastung $p/2$ über alle Felder (Abb. 731b) mit den Spannungen aus feldweise wechselnder Belastung $\pm p/2$ (Abb. 731c) überlagert. Ist der Spannungszustand bei gestützter Belastung (Abb. 732b) bekannt, so läßt sich der Spannungszustand für die angehängte Last p (Abb. 732a) daraus durch Überlagerung mit einer gleichförmigen Querbeanspruchung $\sigma_z = +p$ (Abb. 732c)

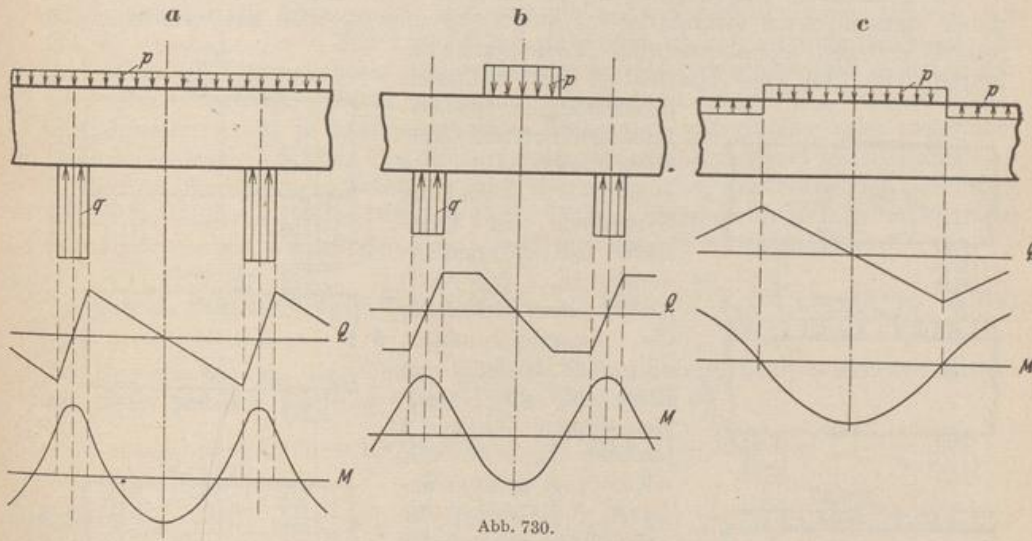


Abb. 730.

entwickeln. Die Spannungen $\sigma_{xx}, \sigma_{zz}, \tau_{xxz}$ aus dem Eigengewicht $g \text{ t/m}^3$ (Abb. 733a) der Scheibe lassen sich aus den Spannungen $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$ einer gleichförmig verteilten Randbelastung $p = 2gh$ (Abb. 733b) bestimmen, da die vorgeschriebene Belastung g durch Überlagerung der Randbelastung mit Kräften der Abb. 733c hervorgeht. Diesen sind die Spannungen $\bar{\sigma}_z = g(h+z), \bar{\sigma}_x = 0, \bar{\tau}_{xz} = 0$ zugeordnet.

Die Belastung an einer Periode $2l$ des Streifens steht im Gleichgewicht.

$$P = \int_{-l}^{+l} p(x) dx = \int_{-l}^{+l} q(x) dx = Q.$$

Ist sie außerdem in jedem Felde $2l$ zur senkrechten Mittellinie symmetrisch, so enthält die Reihenentwicklung der Belastung p und der Stützenkräfte q nach Fourier allein eine Folge von geraden trigonometrischen Funktionen.

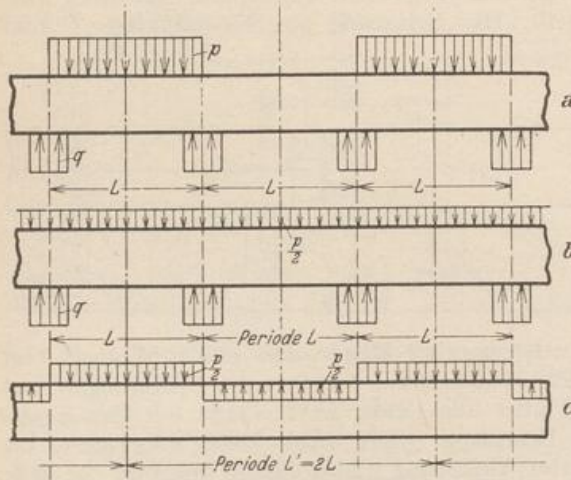


Abb. 731. Wechsel von belasteten und unbelasteten Feldern.

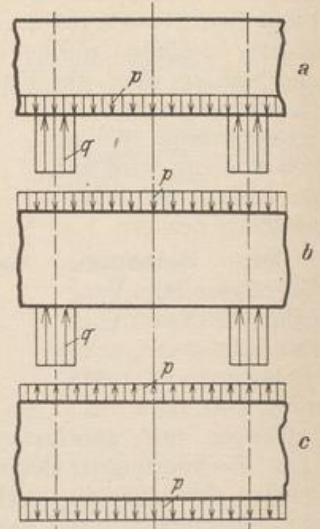


Abb. 732. Angehängte Belastung.

Die x -Achse ist Symmetrieachse des Streifens. Die äußeren Kräfte lassen sich daher stets in einen symmetrischen Anteil $^{(1)}p$ und in einen antimetrischen Anteil $^{(2)}p$ zerlegen, um übersichtliche Lösungen zu erhalten (Abb. 734). Das Kraftfeld ist dann mit allen

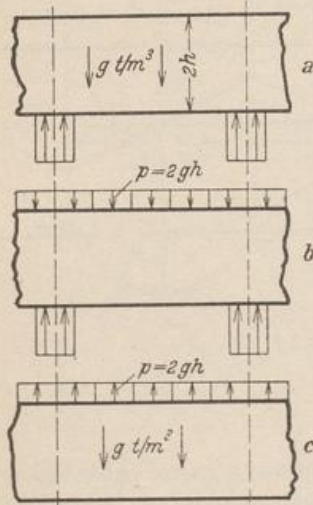


Abb. 733. Eigengewicht.

Randbedingungen ebenfalls symmetrisch oder antimetrisch. In der x -Achse ($z=0$) sind bei Symmetrie der Belastung die Schubspannungen τ_{xz} , bei Antimetrie der Belastung die Längsspannungen σ_x, σ_y Null. In dem einen Falle sind die Hauptspannungen für $z=0$ parallel zur x - und z -Richtung, in dem anderen Falle wird die x -Achse von ihnen unter 45° geschnitten.

Der Ansatz. Spannungsfunktionen F des Streifens sind von L.N.G.Filon, A.Timpe.

F. Bleich, Th. v. Kármán und F. Seewald mit verschiedenen mathematischen Hilfsmitteln bestimmt und in jüngster Zeit durch H. Crámer, F. Dischinger und H. Bay zur Berechnung von Tragwänden aus Eisenbeton verwendet worden.

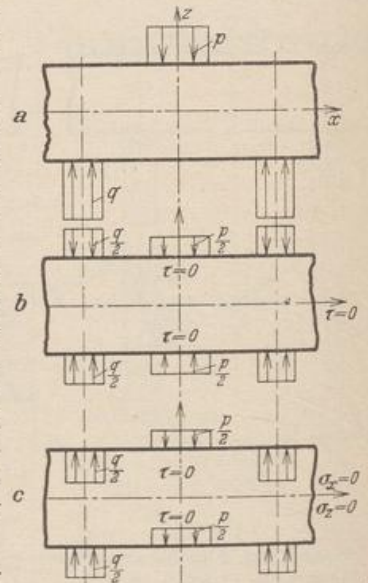


Abb. 734. Umordnung der Belastung (a) in den symmetrischen Anteil $^{(1)}p$ (b) und den antimetrischen Anteil $^{(2)}p$ (c).

Die Lösung erscheint in jedem Falle als Reihenentwicklung. Sie ist um so brauchbarer, je besser die Reihen konvergieren und je einfacher sich dabei das allgemeine Spannungsbild abspalten und in den singulären Abschnitten des Streifens zum vollständigen Ergebnis ergänzen läßt.

Die Belastung des Streifens besteht bei L. N. G. Filon aus zwei gleichgroßen, entgegengesetzt gerichteten Einzellasten. Das Ergebnis der Untersuchung dient auch zur Beurteilung der Spannungszustände aus anderen Belastungen. Th. v. Kármán und F. Seewald behandeln die Biegung des Balkenträgers auf zwei Stützen mit den Einflußfunktionen der Spannungen und verwenden dabei ebenso wie Filon ein Fouriersches Integral als Spannungsfunktion. F. Bleich untersucht den Streifen für periodische Belastungen der Ränder und entwickelt die allgemeine Lösung für (1055) aus Partikularlösungen der homogenen biharmonischen Differentialgleichung. Dabei entsteht ein ähnlicher Ansatz wie auf S. 718 bei der Untersuchung der Halbebene, dem Grenzfall des unendlich hohen Streifens. Bei Symmetrie der Belastung zur z -Achse enthält der Ansatz ebenso wie (1070a) neben hyperbolischen Funktionen von z nur gerade trigonometrische Funktionen von x .

$$F = \sum_{n=0}^{n=\infty} F_n = F_0 + \sum_1^{\infty} Z_n \cos \xi_n \quad \text{mit} \quad \frac{l}{n\pi} = l_n \quad \text{und} \quad n\pi \frac{x}{l} = \frac{x}{l_n} = \xi_n. \quad (1073a)$$

Z_n ist dabei wiederum eine Funktion, die allein die Veränderliche z enthält und die Differentialgleichung, also die Bedingung

$$\frac{d^4 Z_n}{dz^4} - \frac{2}{l_n^2} \frac{d^2 Z_n}{dz^2} + \frac{1}{l_n^4} Z_n = 0, \quad (1073b)$$

erfüllt, nur daß die Lösungen Z_n in diesem Falle die Randbedingungen für $z = +h$ mit $\sigma_z = -p_0$, $\tau_{xz} = 0$, für $z = -h$ mit $\sigma_z = -p_u$, $\tau_{xz} = 0$ erfüllen müssen. Sie sind daher bei symmetrischer und antisymmetrischer Belastung ebenfalls symmetrisch oder antisymmetrisch zur x -Achse, so daß die allgemeine Lösung $^{(1)}Z_n$, $^{(2)}Z_n$ der Differentialgleichung aus je zwei partikulären Integralen mit geraden oder ungeraden Funktionen von z besteht. Um die Integrationskonstanten derart festzusetzen, daß Z_n die Randbedingungen erfüllt, werden die zur x -Achse symmetrischen oder antisymmetrischen äußeren Kräfte $^{(1)}p$, $^{(2)}p$ (Abb. 734b, c) ebenfalls in Reihen mit geraden trigonometrischen Funktionen von x und der Periode $2l$ entwickelt.

$$^{(1)}p(x) = A_0 + \sum_1^{\infty} A_n \cos \xi_n = ^{(1)}p_0 + \sum_1^{\infty} ^{(1)}p_n, \quad ^{(2)}p(x) = \sum_1^{\infty} A'_n \cos \xi_n = \sum_1^{\infty} ^{(2)}p_n. \quad (1074)$$

Die Beiwerte A_0 , A_n , A'_n können für jeden Belastungsfall nach bekannten Regeln berechnet werden. Die Ergebnisse stehen in Tabelle 66.

Lösung bei symmetrischer Belastung $^{(1)}p$ nach Abb. 734b mit $\zeta_n = \frac{z}{l_n}$.

$$\left. \begin{aligned} ^{(1)}F &= ^{(1)}F_0 + \sum_1^{\infty} ^{(1)}Z_n \cos \xi_n = -A_0 \frac{x^2}{2} - \sum_1^{\infty} A_n l_n^2 (C_n \mathfrak{C}o\int \zeta_n + D_n \zeta_n \mathfrak{S}in \zeta_n) \cos \xi_n, \\ ^{(1)}\sigma_z &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \sum_0^{\infty} ^{(1)}\sigma_{z,n} = -A_0 + \sum_1^{\infty} A_n (C_n \mathfrak{C}o\int \zeta_n + D_n \zeta_n \mathfrak{S}in \zeta_n) \cos \xi_n, \\ ^{(1)}\sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \sum_0^{\infty} ^{(1)}\sigma_{x,n} = -\sum_1^{\infty} A_n [(C_n + 2D_n) \mathfrak{C}o\int \zeta_n + D_n \zeta_n \mathfrak{S}in \zeta_n] \cos \xi_n, \\ ^{(1)}\tau_{xz} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = \sum_0^{\infty} ^{(1)}\tau_{xz,n} = -\sum_1^{\infty} A_n [(C_n + D_n) \mathfrak{S}in \zeta_n + D_n \zeta_n \mathfrak{C}o\int \zeta_n] \sin \xi_n. \end{aligned} \right\} (1075a)$$

Die Bedingungen $-(1)\sigma_{z,n} = (1)p_n = A_n \cos \xi_n$ und $(1)\tau_{xz} = 0$ an den Rändern $z = \pm h$ oder $\zeta_n = \pm h/l_n = \pm \lambda_n$ liefern:

$$\left. \begin{aligned} C_n &= -\frac{2(\sin \lambda_n + \lambda_n \operatorname{Coj} \lambda_n)}{2\lambda_n + \sin 2\lambda_n}, & D_n &= \frac{2 \sin \lambda_n}{2\lambda_n + \sin 2\lambda_n}, \\ C_n + D_n &= -\frac{2\lambda_n \operatorname{Coj} \lambda_n}{2\lambda_n + \sin 2\lambda_n}, & C_n + 2D_n &= \frac{2(\sin \lambda_n - \lambda_n \operatorname{Coj} \lambda_n)}{2\lambda_n + \sin 2\lambda_n}. \end{aligned} \right\} (1075b)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Für } z = \pm h \text{ ist } \sigma_z &= \sum (1)p_n \frac{2\lambda_n - \sin 2\lambda_n}{2\lambda_n + \sin 2\lambda_n}, \\ \text{für } z = 0 \text{ ist } \sigma_z &= - (1)p_0 - \sum (1)p_n \frac{2(\sin \lambda_n + \lambda_n \operatorname{Coj} \lambda_n)}{2\lambda_n + \sin 2\lambda_n}. \end{aligned} \right\} (1076)$$

Lösung bei antimetrischer Belastung $(2)p$ nach Abb. 734c.

$$\left. \begin{aligned} (2)F &= \sum_1^\infty (2)Z_n \cos \xi_n = - \sum_1^\infty A'_n l_n^2 (C'_n \sin \zeta_n + D'_n \zeta_n \operatorname{Coj} \zeta_n) \cos \xi_n, \\ (2)\sigma_z &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \sum_1^\infty (2)\sigma_{z,n} = \sum_1^\infty A'_n (C'_n \sin \zeta_n + D'_n \zeta_n \operatorname{Coj} \zeta_n) \cos \xi_n, \\ (2)\sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \sum_1^\infty (2)\sigma_{x,n} = - \sum_1^\infty A'_n [(C'_n + 2D'_n) \sin \zeta_n + D'_n \zeta_n \operatorname{Coj} \zeta_n] \cos \xi_n, \\ (2)\tau_{xz} &= - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = \sum_1^\infty (2)\tau_{xz,n} = - \sum_1^\infty A'_n [(C'_n + D'_n) \operatorname{Coj} \zeta_n + D'_n \zeta_n \sin \zeta_n] \sin \xi_n. \end{aligned} \right\} (1077a)$$

Die Bedingungen $-(2)\sigma_{z,n} = \pm (2)p_n = \pm A'_n \cos \xi_n$ und $(2)\tau_{xz} = 0$ an den Rändern $z = \pm h$ oder $\zeta_n = \pm h/l_n = \pm \lambda_n$ liefern:

$$\left. \begin{aligned} C'_n &= \frac{2(\operatorname{Coj} \lambda_n + \lambda_n \sin \lambda_n)}{2\lambda_n - \sin 2\lambda_n}, & D'_n &= \frac{-2 \operatorname{Coj} \lambda_n}{2\lambda_n - \sin 2\lambda_n}, \\ C'_n + D'_n &= \frac{2\lambda_n \sin \lambda_n}{2\lambda_n - \sin 2\lambda_n}, & C'_n + 2D'_n &= -\frac{2(\operatorname{Coj} \lambda_n - \lambda_n \sin \lambda_n)}{2\lambda_n - \sin 2\lambda_n}. \end{aligned} \right\} (1077b)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Für } z = \pm h \text{ ist } (2)\sigma_x &= \pm \sum_1^\infty (2)p_n \frac{2\lambda_n + \sin 2\lambda_n}{2\lambda_n - \sin 2\lambda_n}, \\ \text{für } z = 0 \text{ ist } \tau_{xz} &= \sum_1^\infty A'_n \frac{2\lambda_n \sin \lambda_n}{2\lambda_n - \sin 2\lambda_n} \sin \xi_n. \end{aligned} \right\} (1078)$$

Das Kraftfeld ist darnach durch die Belastung und deren Reihenentwicklung nach Fourier (Tab. 66) und durch die Abmessungen $L = 2l$, $H = 2h$, $2c$ und die davon abhängigen Verhältniszahlen ξ_n , ζ_n , λ_n bestimmt. Es wird durch die Isoklinen und die Trajektorien der Hauptlängsspannungen und durch die Linien gleicher Hauptlängs- und gleicher Hauptschubspannung beschrieben. Sie zeigen den Ausgleich der äußeren Kräfte zwischen den Rändern des Streifens. In der Regel begnügt man sich jedoch mit den Komponenten σ_x , σ_z , τ_{xz} in einzelnen ausgezeichneten Schnitten $x = \text{const}$ oder $z = \text{const}$, insbesondere $x = 0$ (Feldmitte), $x = \pm l$ (Stützenquerschnitt), $z = 0$ (waagerechte Symmetrieachse) und $z = \pm h$ (Ränder), um auf die Grenzwerte der Spannungen zu schließen. Daneben können auch einzelne ausgezeichnete Spannungen als Funktionen von h oder c bestimmt werden. Leider ist die Konvergenz der Reihen für die Untersuchung in der Nähe der Ränder ungünstig. Bei hohen Streifen ($h \gg l$) genügen auch die Spannungen der Halbebene nach (1072), so daß angenähert

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{(o)} &= -(\dot{p}^{(o)} - \dot{p}_0^{(o)}), & \sigma_x^{(u)} &= -(\dot{p}^{(u)} - \dot{p}_0^{(u)}) \\ \dot{p}_0^{(o)} &= \frac{1}{l} \int_0^l \dot{p}^{(o)} dx, & \dot{p}_0^{(u)} &= \frac{1}{l} \int_0^l \dot{p}^{(u)} dx \end{aligned} \right\} \quad (1079)$$

gesetzt werden kann.

Die Längsspannungen σ_x sind in der Nähe des belasteten Randes größer, in der Nähe des unbelasteten Randes kleiner als beim Geradliniengesetz. Im Grenzfall $H \gg L$ wird der Streifen zur Halbebene mit $-\sigma_x = \pm p$ am belasteten Rande. Daher ist σ_x am Rande des Streifens stets größer als p , konvergiert jedoch gegen die Mitte schnell gegen Null. Für $L \geq 2H$ kann nach dem Geradliniengesetz gerechnet werden.

Die Ergebnisse der Zahlenrechnung müssen die Randbedingungen und die Gleichgewichtsbedingungen zwischen den inneren und äußeren Kräften erfüllen. In jedem Querschnitt ist daher

$$\int_{-h}^{+h} \sigma_x dz = 0, \quad \int_{-h}^{+h} \sigma_x z dz = M, \quad \int_{-h}^{+h} \tau_{xz} dz = -R_x.$$

Die Schnittkräfte M und R_x der periodischen Belastung sind bekannt.

Der Verschiebungszustand wird ebenso wie beim biegesteifen Stab durch die Krümmung $1/\varrho_x$ von ausgezeichneten Linien $z = \text{const}$, also $z = 0, z = \pm h$ beim Streifen, $z = 0, z = h, z = 2h \dots$ bei der Halbebene beschrieben. Bei kleinen Verschiebungen ist $1/\varrho_x = \partial^2 w / \partial x^2$. Da außerdem nach (1050) und (1051)

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_z) = \frac{\partial u}{\partial x}$$

ist, wird

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varrho_x} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \\ &= -\frac{1}{E} \frac{\partial \sigma_x}{\partial z} + \frac{1}{G} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\mu}{E} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1080a)$$

Die Summanden beschreiben einzeln den Anteil der Komponenten des Spannungszustandes an der Krümmung. Sie kann mit (1054b) nach

$$\frac{1}{\varrho_x} = -\frac{1}{E} \left[\frac{\partial^3 F}{\partial z^3} - (2 + \mu) \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial z} \right] \quad (1080b)$$

aus (1075a) oder (1077a) berechnet werden.

Gleichförmig verteilte Belastung am oberen Rande. Das Kräftebild Abb. 735a läßt sich in drei Teile zerlegen. Der Anteil I besteht aus einer periodischen, symmetrischen Streckenlast \dot{p} (Abb. 735b) mit Spannungen nach (1075a).

$$A_0 = 0, \quad A_n = \frac{2\dot{p}_2}{\gamma_n} \sin \gamma_n, \quad \dot{p}_2 = -\frac{\dot{p}}{2} \frac{l-c}{c}, \quad \gamma_n = n\pi \frac{l-c}{l}. \quad (1081)$$

Die Schubspannungen sind in den Schnitten $x = 0, x = l, z = 0, z = \pm h$ Null und daher die Längsspannungen σ_x, σ_z dort gleichzeitig Hauptspannungen. Da die

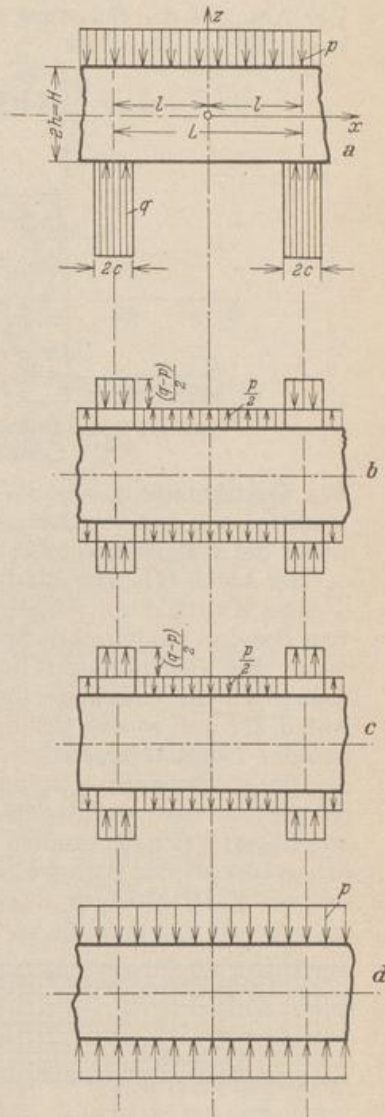


Abb. 735.

Schnittkräfte M, N, Q bei symmetrischem Lastangriff Null werden, ist in jedem Querschnitt

$$\int_{-h}^{+h} \sigma_x dF = 0, \quad \int_{-h}^{+h} \sigma_x z dF = 0, \quad \int_{-h}^{+h} \tau_{xz} dF = 0.$$

Der Anteil II der Belastung (Abb. 735c) ist antimetrisch und erzeugt Spannungen nach (1077a). Dabei ist

$$A'_n = -A_n = \frac{2p_2}{\gamma_n} \sin \gamma_n, \quad p_2 = +\frac{p}{2} \frac{l-c}{c}, \quad \gamma_n = n\pi \frac{l-c}{l}. \quad (1081)$$

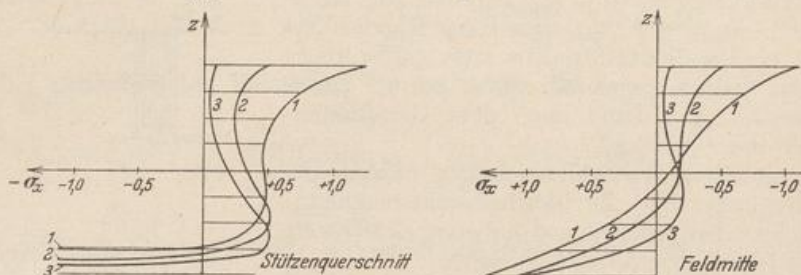


Abb. 736. Verlauf der Funktion $\sigma_x(z)$ bei Balken mit veränderlichem Verhältnis H/L .
Kurven 1: $H/L = 1/2$, Kurven 2: $H/L = 2/3$, Kurven 3: $H/L = 1$.

Die Querschnitte $x = 0, x = l$ sind frei von Schubspannungen τ_{xz} , der Längsschnitt $z = 0$ frei von Längsspannungen σ_x, σ_z . Die Hauptspannungen schneiden daher die x -Achse unter 45° .

Der Anteil III (Abb. 735d) liefert einen einachsigen Spannungszustand $-\sigma_z = p$.

Das Kraftfeld zur vorgeschriebenen Belastung entsteht entweder durch Addition der drei analytischen Spannungsanteile oder durch die Addition ihrer Zahlenwerte. Bei gleichförmiger Belastung p am unteren Rande nach Abb. 732a tritt dazu noch die einachsige Querbeanspruchung $+\sigma_z = p$. Sie hebt sich gegen den Anteil III auf, so daß sich das Ergebnis in diesem Falle allein aus den Spannungsanteilen I und II zusammensetzt.

Die Längsspannung σ_x am unteren (gestützten) Rande eines hohen Streifens ($H \gg L$) ist nach (1079) angenähert gleich der Randbelastung p oder q , also auch angenähert gleich der größten Längsspannung σ_x eines Querschnittes. Sie ist wesentlich größer als der Betrag $\sigma_x = M/W = 6M/h^2$ nach dem Geradliniengesetz. Nach den von F. Dischinger angegebenen Schaulinien (Abb. 736) nähert sich die Funktion $\sigma_x(z)$ eines Querschnittes bei abnehmendem Verhältnis h/l der Navierschen Geraden in Feldmitte schneller als im Stützenquerschnitt.

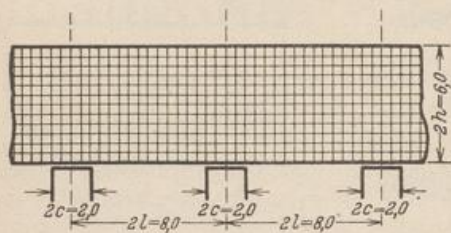


Abb. 737.

Spannungszustand im Mittelfeld einer hohen Silowand ($H/L = 3/4$) auf mehreren Stützen (Abb. 737).

Stützung und Belastung stimmen mit den Angaben in Abb. 723 überein, so daß ein Vergleich mit den Ergebnissen auf S. 722 möglich ist.

Die Belastung wird nach S. 727 in den symmetrischen (Abb. 735b) und den antimetrischen Anteil (Abb. 735c) aufgespalten.

Zusammenstellung der Formeln nach S. 725f.

A. Symmetrischer Anteil.*

$${}^{(1)}p = p_0 + \sum_1^{\infty} A_n \cos \xi_n, \quad \xi_n = n\pi \frac{x}{l}, \quad p_0 = 0, \quad A_n \text{ nach Tabelle 66.}$$

$$C_n = -\frac{2(\sin \lambda_n + \lambda_n \operatorname{Coj} \lambda_n)}{2\lambda_n + \sin 2\lambda_n} = -\frac{\operatorname{Tg} \lambda_n + \lambda_n}{\frac{\lambda_n}{\operatorname{Coj} \lambda_n} + \sin \lambda_n},$$

$$D_n = \frac{2 \sin \lambda_n}{2\lambda_n + \sin 2\lambda_n} = \frac{\operatorname{Tg} \lambda_n}{\frac{\lambda_n}{\operatorname{Coj} \lambda_n} + \sin \lambda_n}, \quad \lambda_n = n\pi \frac{h}{l},$$

$$\varphi_n(\zeta) = C_n \operatorname{Coj} \zeta_n + D_n \zeta_n \sin \zeta_n,$$

$$\psi_n(\zeta) = (C_n + 2D_n) \operatorname{Coj} \zeta_n + D_n \zeta_n \sin \zeta_n,$$

$$\chi_n(\zeta) = (C_n + D_n) \sin \zeta_n + D_n \zeta_n \operatorname{Coj} \zeta_n.$$

B. Antimetrischer Anteil.

$${}^{(2)}p = \sum_1^{\infty} A'_n \cos \xi_n, \quad A'_n = -A_n,$$

$$C'_n = \frac{2(\operatorname{Coj} \lambda_n + \lambda_n \sin \lambda_n)}{2\lambda_n - \sin 2\lambda_n} = \frac{1 + \lambda_n \operatorname{Tg} \lambda_n}{\frac{\lambda_n}{\operatorname{Coj} \lambda_n} - \sin \lambda_n},$$

$$D'_n = -\frac{2 \operatorname{Coj} \lambda_n}{2\lambda_n - \sin 2\lambda_n} = -\frac{1}{\frac{\lambda_n}{\operatorname{Coj} \lambda_n} - \sin \lambda_n},$$

$$\varphi'_n(\zeta) = C'_n \sin \zeta_n + D'_n \zeta_n \operatorname{Coj} \zeta_n,$$

$$\psi'_n(\zeta) = (C'_n + 2D'_n) \sin \zeta_n + D'_n \zeta_n \operatorname{Coj} \zeta_n,$$

$$\chi'_n(\zeta) = (C'_n + D'_n) \operatorname{Coj} \zeta_n + D'_n \zeta_n \sin \zeta_n.$$

C. Superposition der Anteile A und B.

$$\begin{aligned} E_n(\xi) &= A_n \cos \xi_n, & F_n(\xi) &= A_n \sin \xi_n, \\ E'_n(\xi) &= A'_n \cos \xi_n = -E_n(\xi), & F'_n(\xi) &= A'_n \sin \xi_n = -F_n(\xi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= {}^{(1)}\sigma_x + {}^{(2)}\sigma_x = \sum_1^{\infty} \varphi_n(\zeta) \cdot E_n(\xi) + \sum_1^{\infty} \varphi'_n(\zeta) \cdot E'_n(\xi) \\ &= \sum_1^{\infty} [\varphi_n(\zeta) - \varphi'_n(\zeta)] E_n(\xi) = \sum_1^{\infty} \bar{\varphi}_n(\zeta) \cdot E_n(\xi). \\ \sigma_z &= {}^{(1)}\sigma_z + {}^{(2)}\sigma_z = -\sum_1^{\infty} \psi_n(\zeta) \cdot E_n(\xi) - \sum_1^{\infty} \psi'_n(\zeta) \cdot E'_n(\xi) \\ &= -\sum_1^{\infty} [\psi_n(\zeta) - \psi'_n(\zeta)] E_n(\xi) = -\sum_1^{\infty} \bar{\psi}_n(\zeta) \cdot E_n(\xi). \\ \tau_{xz} &= {}^{(1)}\tau_{xz} + {}^{(2)}\tau_{xz} = -\sum_1^{\infty} \chi_n(\zeta) \cdot F_n(\xi) - \sum_1^{\infty} \chi'_n(\zeta) \cdot F'_n(\xi) \\ &= -\sum_1^{\infty} [\chi_n(\zeta) - \chi'_n(\zeta)] F_n(\xi) = -\sum_1^{\infty} \bar{\chi}_n(\zeta) \cdot F_n(\xi). \end{aligned}$$

Auswertung der Formeln.

Wie bei dem Beispiel in Abschn. 74 wird die Rechnung auf die ersten fünf Fourierglieder beschränkt.

1. Fourierkonstanten $A_n = -A'_n$. Die Konstanten A_n sind halb so groß wie die entsprechenden Werte auf S. 720.

n	1	2	3	4	5
A_n	-0,900316	+0,636620	-0,300106	0	+0,180064

2. Integrationskonstanten C_n, D_n, C'_n, D'_n .

n	1	2	3	5
C_n	-0,58871	-102,4816 · 10 ⁻³	-13,73953 · 10 ⁻³	-195,5161 · 10 ⁻⁶
D_n	+0,17321	+17,9378 · 10 ⁻³	+1,70284 · 10 ⁻³	+15,2974 · 10 ⁻⁶
$C_n + D_n$	-0,41550	-84,5438 · 10 ⁻³	-12,03669 · 10 ⁻³	-180,2187 · 10 ⁻⁶
$C_n + 2D_n$	-0,24229	-66,6060 · 10 ⁻³	-10,33385 · 10 ⁻³	-164,9213 · 10 ⁻⁶
C'_n	-0,69259	-102,7831 · 10 ⁻³	-13,74007 · 10 ⁻³	-195,5162 · 10 ⁻⁶
D'_n	+0,20897	+17,9954 · 10 ⁻³	+1,70291 · 10 ⁻³	+15,2974 · 10 ⁻⁶
$C'_n + D'_n$	-0,48361	-84,7877 · 10 ⁻³	-12,03716 · 10 ⁻³	-180,2188 · 10 ⁻⁶
$C'_n + 2D'_n$	-0,27464	-66,7923 · 10 ⁻³	-10,33424 · 10 ⁻³	-164,9213 · 10 ⁻⁶

3. Funktionen φ, ψ, χ für $z = -0,5l$ ($\zeta = -0,5$).

n	1	2	3	5
φ_n	-0,85105	-0,53715	-0,31819	-0,09707
φ'_n	+0,77020	+0,53168	+0,31801	+0,09707
$\overline{\varphi}_n$	-1,62125	-1,06883	-0,63620	-0,19414
ψ_n	+0,01818	-0,12128	-0,12861	-0,05767
ψ'_n	-0,19162	+0,11603	+0,12846	+0,05767
$\overline{\psi}_n$	+0,20980	-0,23731	-0,25707	-0,11534
χ_n	+0,27350	+0,32313	+0,22322	+0,07737
χ'_n	-0,45806	-0,32995	-0,22342	-0,07737
$\overline{\chi}_n$	+0,73156	+0,65306	+0,44664	+0,15474

4. Spannungen im Schnitt $z = -0,5l$.

$$\sigma_x = -0,20980 E_1(\xi) + 0,23731 E_2(\xi) + 0,25707 E_3(\xi) + 0,11534 E_5(\xi),$$

$$\sigma_z = -1,62125 E_1(\xi) - 1,06883 E_2(\xi) - 0,63620 E_3(\xi) - 0,19414 E_5(\xi),$$

$$\tau_{xz} = -0,73156 F_1(\xi) - 0,65306 F_2(\xi) - 0,44664 F_3(\xi) - 0,15474 F_5(\xi).$$

Die Funktionen $E_n(\xi), F_n(\xi)$ können von S. 721 übernommen werden, sind jedoch wegen der Aufteilung der Belastung in den symmetrischen und den antisymmetrischen Anteil durch 2 zu dividieren. Damit erhält man die folgenden Spannungen in t/m^2 :

ξ	0	0,125	0,250	0,375	0,500	0,625	0,750	0,875	1
σ_x	+0,283	+0,244	+0,176	+0,056	-0,151	-0,270	-0,176	-0,030	+0,019
σ_z	+0,935	+0,954	+0,922	+0,831	+0,680	+0,131	-0,922	-1,916	-2,296
τ_{xz}	0	+0,056	+0,164	+0,274	+0,497	+0,862	+0,996	+0,644	0

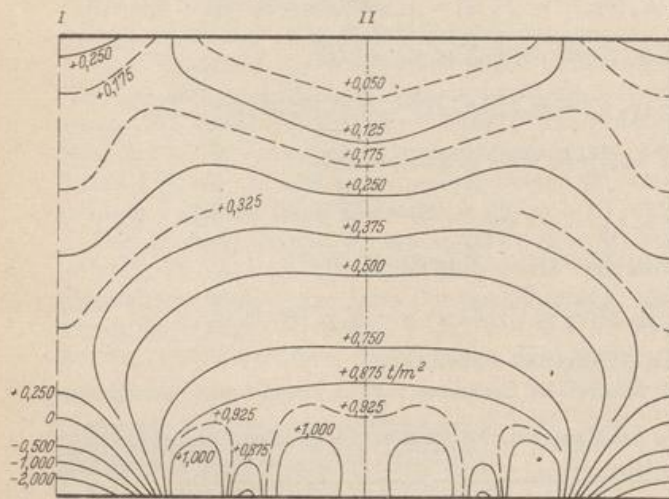


Abb. 738. Linien gleicher Hauptspannung σ_1 .

5. Hauptspannungen. Die Spannungen werden für die Knoten des quadratischen Netzes Abb. 737 berechnet. Sie liefern die Linien gleicher Hauptspannung σ_1 (Abb. 738), gleicher Hauptspannung σ_2 (Abb. 739) und die Längsspannungstrajektorien (Abb. 740).

Feldweise wechselnde Belastung $\pm p$ am oberen Rande (Abb. 741a u. 731c).

Die Belastung dient nur dazu, die Spannungen bei abwechselnd belasteten und unbelasteten Feldern (Abb. 731a) aus der Lösung für gleichförmige Belastung aller Felder (Abb. 731b) herzuleiten. Ihre Periodenlänge L' ist gleich der doppelten

Stützenentfernung L . Bei der Superposition nach Abb. 731 ist die Phasenverschiebung der Perioden zu beachten.

Die Stützkkräfte sind Null, da die Belastung Abb. 741a innerhalb einer Periode L' im Gleichgewicht ist. Sie wird nach Abb. 741b, c in den symmetrischen und den antisymmetrischen Anteil zerlegt. Die Konstanten der nach Fourier entwickelten Randbelastung jedes Anteils stimmen miteinander überein und werden nach Tab. 66 mit

$$A_n = A'_n = p \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \tag{1082}$$

angeschrieben. Die Spannungen lassen sich damit nach (1075a) und (1077a) unter Beachtung der doppelten Periode L' berechnen.

Ist der Spannungszustand aus einer Belastung $\pm p$ am oberen Rande bekannt, so lassen sich die Spannungen bei Eintragung am unteren Rande am einfachsten durch Überlagerung der Spannungen einer symmetrischen Belastung anschreiben.

Symmetrische Gruppen von Streckenlasten $P = 2cp$ (Abb. 742). Die Belastung ist symmetrisch und wird nach Tab. 66 in eine Fouriersche Reihe mit den Koeffizienten

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= p_0 = p \frac{c}{l} = \frac{P}{2l}, \\ A_n &= 2p_0 \frac{\sin \gamma_n}{\gamma_n} \\ &= \frac{P}{l} \frac{\sin \gamma_n}{\gamma_n}, \\ \gamma_n &= n\pi \frac{c}{l} \end{aligned} \right\} (1083)$$

entwickelt. Die Schnittkräfte M, N, Q sind in jedem Querschnitt Null, die Längsspannungen σ_x im Längsschnitt $z = 0$ von Streifen mit Randabständen $h \geq 2l$ angenähert konstant $-pc/l$. Dies wird durch Zahlenrechnung für die Längsschnitte $z_1 = 0$ und $z_2 = h - 2l$, eines Streifens mit $H/L = 3$ und $l/c = 4$ (Abb. 743) nachgewiesen.

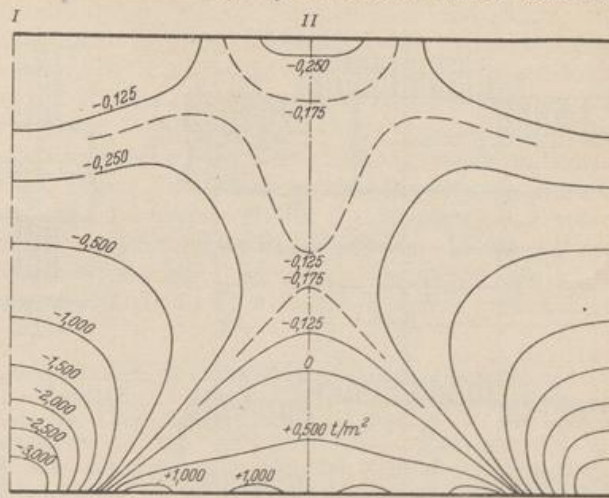
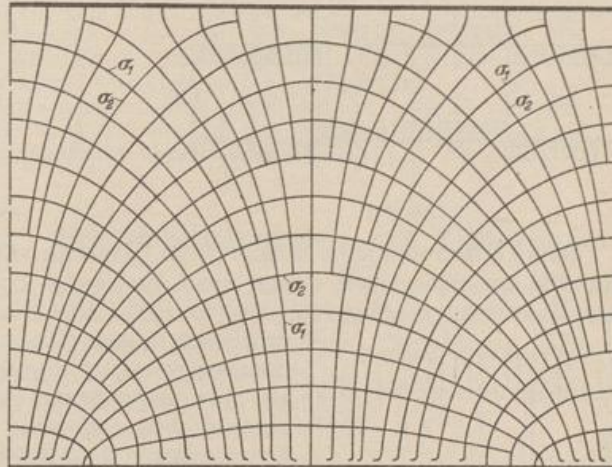
Abb. 739. Linien gleicher Hauptspannung σ_2 .

Abb. 740. Längsspannungstrajektorien.

$\xi = x/l$		0	0,25	0,50	0,75	1
$z_1 = 0$	σ_x/p	-0,251	-0,251	-0,250	-0,249	-0,249
	τ_{xz}/p	0	0	0	0	0
$z_2 = h - 2l$	σ_x/p	-0,256	-0,254	-0,250	-0,246	-0,244
	τ_{xz}/p	0	+0,004	+0,005	+0,004	0

Da der Längsschnitt $z_1 = 0$ frei von Schubspannungen ist, kann hier der Streifen ohne Störung des Spannungszustandes in zwei Teile zerlegt werden, wenn dabei die Längsspannungen $\sigma_x \approx -pc/l$ an den Schnittändern als äußere Kräfte mitwirken. Nach den Ergebnissen der Zahlenrechnung sind die Schubspannungen auch

noch in Längsschnitten $z_2 \leq h - 2l$ nahezu Null, so daß die Zerlegung des Streifens in drei parallele Abschnitte mit den Längsspannungen $\sigma_z \approx -pc/l$ als äußeren Kräften keine wesentliche Änderung des Spannungszustandes bedeutet.

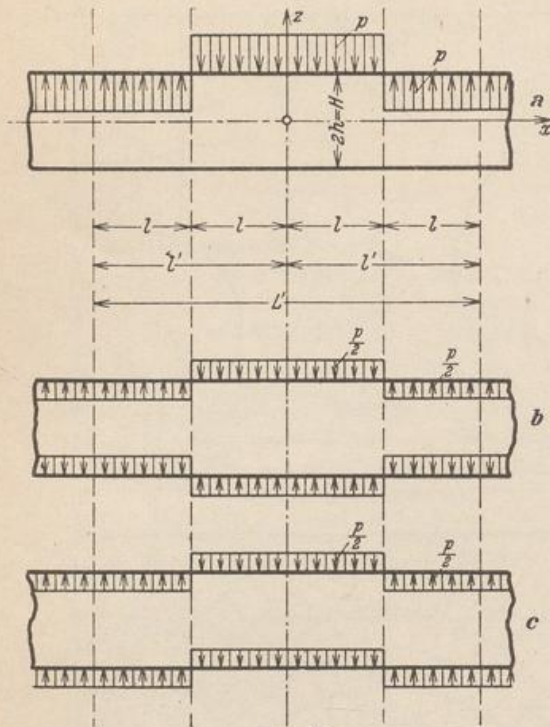


Abb. 741.

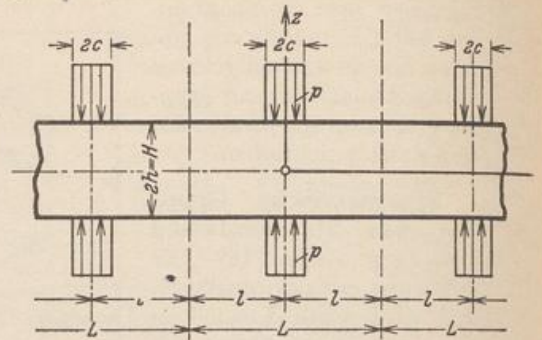


Abb. 742.

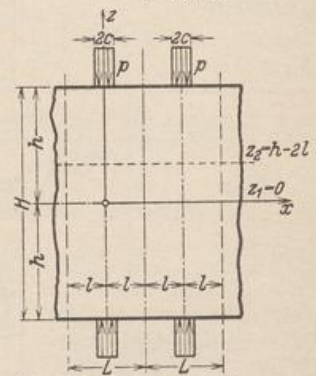


Abb. 743. $H/L = 3, l/c = 4.$

Daher lassen sich hohe Wände ($H \gg L$) mit gleichförmiger Belastung des oberen Randes angenähert auf Grund einer Zerlegung in die Abschnitte $h_1 = H - L$, $h_2 = L$ berechnen (Abb. 744).

Der Abschnitt $H - L$ unterliegt im wesentlichen nur dem einachsigen Spannungszustand $-\sigma_z = p$. Der Spannungszustand des Abschnitts h_2 wird genau genug als Spannungszustand eines Streifens mit dem Randabstand $2h_2$ und einer symmetrischen Gruppe von Streckenlasten $2qc$ berechnet.

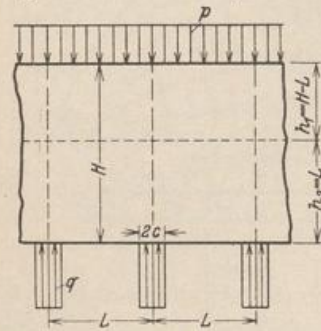


Abb. 744.

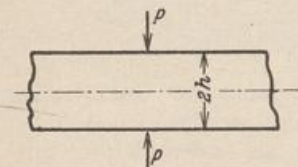


Abb. 745.

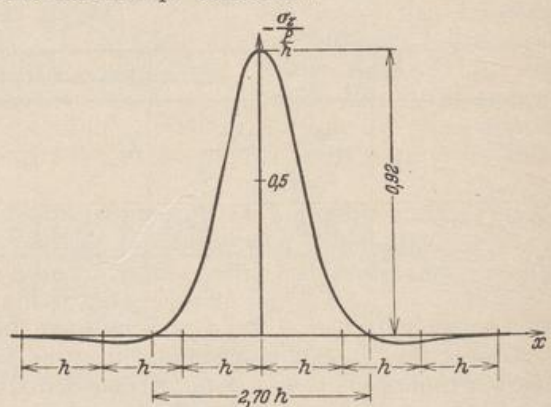


Abb. 746.

Dasselbe Ergebnis läßt sich auch aus einer Spannungsfunktion ableiten, die von N. L. G. Filon für die Belastung der Ränder eines Streifens mit zwei gleichgroßen entgegengesetzt gerichteten Einzellasten P nach Abb. 745 als Fouriersches Integral angegeben worden ist. Die Zustandslinien σ_x^* , σ_z^* , τ_{xz}^* für $z = \text{const}$ sind gleichzeitig Einflußlinien für eine wandernde Lastengruppe. Die Summe der positiven und negativen Anteile der Flächen σ_x^* , τ_{xz}^* sind in den Längsschnitten $z = \text{const}$ Null, da bei gleichförmiger Belastung der Ränder nur Spannungen σ_z entstehen.

Nach Abb. 746 erzeugt die einzelne Kräftegruppe P (Abb. 745) auf der Breite $2,7h$ der Symmetrieachse Druckspannungen σ_z . Darüber hinaus entstehen unbedeutende Zugspannungen, die schnell gegen Null konvergieren. Einzellasten werden daher durch ein elastisches Mittel auf $2,7h$ Breite verteilt. Die Spannung σ_z erreicht mit $0,92 P/h$ in der Wirkungslinie der Einzelkraft das Maximum. Sie ist nahezu gleich der auf den halben Scheibenquerschnitt bezogenen Spannung. Zwischen Einzellasten mit einem größeren Abstand als $2,7h$ bestehen keine wesentlichen Beziehungen.

Filon, L. N. G.: On an approximate solution of the bending of a beam of rectangular cross section. Philos. Trans. Royal Soc. London 1903 (A.) Bd. 201 S. 63. — Timpe, A.: Problem der Spannungsverteilung in ebenen Systemen. Diss. Göttingen 1905. — Bleich, F.: Der gerade Stab mit Rechteckquerschnitt als ebenes Problem. B. I. 1923 S. 255. — Th. v. Kármán: Über die Grundlagen der Balkentheorie. Abhandlg. aus dem Aerodynamischen Institut d. Techn. Hochschule Aachen. Berlin 1927. — Seewald, F.: Die Spannungen und Formänderungen von Balken mit rechteckigem Querschnitt. Abhandlg. aus dem Aerodynamischen Institut d. Techn. Hochschule Aachen. Berlin 1927. — Crámer, H.: Spannungen in hohen wandartigen Trägern. Bericht über die II Int. Tagung für Brücken- und Hochbau. Wien 1929. — Derselbe: Spannungen in wandartigen Balken bei feldweise wechselnder Belastung. Z. A. M. 1930 S. 205. — Baß, H.: Der wandartige Träger auf unendlich vielen Stützen. J. A. 1931 S. 435. — Cooker, E. G., u. L. N. G. Filon: A Treatise on Photo Elasticity. Cambridge 1931. — Dischinger, F.: Beitrag zur Theorie der Halbscheibe und des wandartigen Balkens. Abhandlungen der Int. Vereinigung für Brücken- und Hochbau. Zürich 1932 und Beton u. Eisen 1933 S. 237. — Crámer, H.: Spannungen in durchlaufenden Scheiben bei Vollbelastung sämtlicher Felder. Beton u. Eisen 1933 S. 233.

76. Die Berechnung der Spannungsfunktion mit Differenzen.

Die Erweiterung der Randbedingungen durch die rechteckige oder polygonale Begrenzung der Scheiben bereitet beim Ansatz und bei der numerischen Lösung der Spannungsfunktion F wesentlich größere Schwierigkeiten. Aus diesem Grunde begnügt man sich bei derartigen Aufgaben ebenso wie bei ähnlichen Problemen der Plattenbiegung mit einer Näherungslösung durch die Entwicklung der Ansätze (1054) in Differenzen. Da die Differentialgleichung des ebenen Spannungszustandes und die Differentialgleichung der Plattenbiegung unter Randkräften miteinander übereinstimmen, kann die Differenzengleichung des ebenen Spannungszustandes in rechtwinkligen Koordinaten nach (999) oder in Polarkoordinaten unmittelbar angeschrieben werden. Die Spannungsfläche erscheint dann ebenso wie die elastische Fläche der Platte als Gitter, dessen Aufriß aus zwei Gruppen von äquidistanten, sich rechtwinklig kreuzenden geraden Linien besteht ($\Delta x \neq \Delta z$). Die Endpunkte der Ordinaten F_k der Gitterknoten k liegen in der Spannungsfläche. Ihre gegenseitigen Beziehungen lassen sich an jedem Gitterknoten durch eine lineare Gleichung ausdrücken. Sie lautet für $\Delta x = \Delta z$ nach (1000) folgendermaßen (Abb. 747):

$$20F_k - 8(F_{k-1} + F_l + F_{k+1} + F_i) + 2(F_{l-1} + F_{l+1} + F_{i-1} + F_{i+1}) + (F_{k-2} + F_m + F_{k+2} + F_h) = 0. \quad (1084)$$



Abb. 747.