



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Der Ansatz

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

Ist sie außerdem in jedem Felde $2l$ zur senkrechten Mittellinie symmetrisch, so enthält die Reihenentwicklung der Belastung p und der Stützenkräfte q nach Fourier allein eine Folge von geraden trigonometrischen Funktionen.

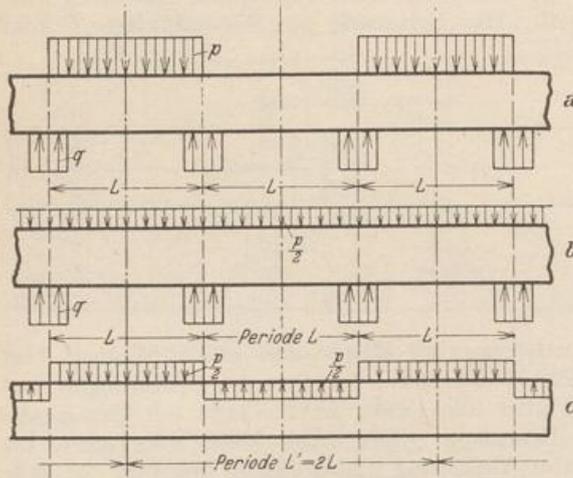


Abb. 731. Wechsel von belasteten und unbelasteten Feldern.

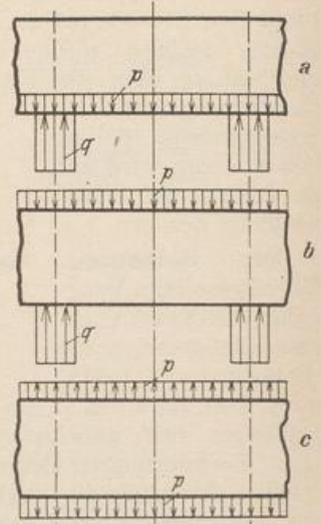


Abb. 732. Angehängte Belastung.

Die x -Achse ist Symmetrieachse des Streifens. Die äußeren Kräfte lassen sich daher stets in einen symmetrischen Anteil $^{(1)}p$ und in einen antimetrischen Anteil $^{(2)}p$ zerlegen, um übersichtliche Lösungen zu erhalten (Abb. 734). Das Kraftfeld ist dann mit allen

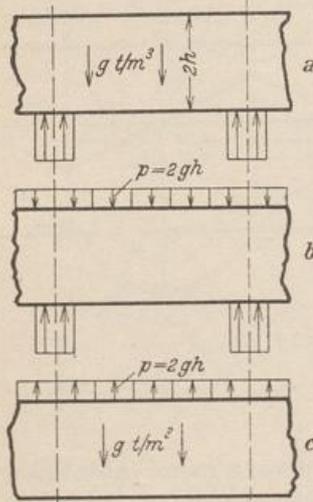


Abb. 733. Eigengewicht.

Randbedingungen ebenfalls symmetrisch oder antimetrisch. In der x -Achse ($z=0$) sind bei Symmetrie der Belastung die Schubspannungen τ_{xz} , bei Antimetrie der Belastung die Längsspannungen σ_x, σ_y Null. In dem einen Falle sind die Hauptspannungen für $z=0$ parallel zur x - und z -Richtung, in dem anderen Falle wird die x -Achse von ihnen unter 45° geschnitten.

Der Ansatz. Spannungsfunktionen F des Streifens sind von L.N.G.Filon, A.Timpe.

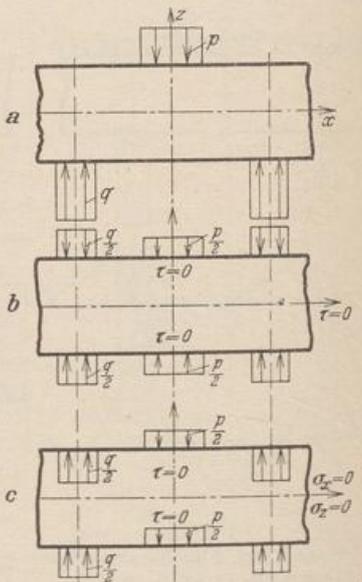


Abb. 734. Umordnung der Belastung (a) in den symmetrischen Anteil $^{(1)}p$ (b) und den antimetrischen Anteil $^{(2)}p$ (c).

F. Bleich, Th. v. Kármán und F. Seewald mit verschiedenen mathematischen Hilfsmitteln bestimmt und in jüngster Zeit durch H. Crámer, F. Dischinger und H. Bay zur Berechnung von Tragwänden aus Eisenbeton verwendet worden.

Die Lösung erscheint in jedem Falle als Reihenentwicklung. Sie ist um so brauchbarer, je besser die Reihen konvergieren und je einfacher sich dabei das allgemeine Spannungsbild abspalten und in den singulären Abschnitten des Streifens zum vollständigen Ergebnis ergänzen läßt.

Die Belastung des Streifens besteht bei L. N. G. Filon aus zwei gleichgroßen, entgegengesetzt gerichteten Einzellasten. Das Ergebnis der Untersuchung dient auch zur Beurteilung der Spannungszustände aus anderen Belastungen. Th. v. Kármán und F. Seewald behandeln die Biegung des Balkenträgers auf zwei Stützen mit den Einflußfunktionen der Spannungen und verwenden dabei ebenso wie Filon ein Fouriersches Integral als Spannungsfunktion. F. Bleich untersucht den Streifen für periodische Belastungen der Ränder und entwickelt die allgemeine Lösung für (1055) aus Partikularlösungen der homogenen biharmonischen Differentialgleichung. Dabei entsteht ein ähnlicher Ansatz wie auf S. 718 bei der Untersuchung der Halbebene, dem Grenzfall des unendlich hohen Streifens. Bei Symmetrie der Belastung zur z -Achse enthält der Ansatz ebenso wie (1070a) neben hyperbolischen Funktionen von z nur gerade trigonometrische Funktionen von x .

$$F = \sum_{n=0}^{n=\infty} F_n = F_0 + \sum_1^{\infty} Z_n \cos \xi_n \quad \text{mit} \quad \frac{l}{n\pi} = l_n \quad \text{und} \quad n\pi \frac{x}{l} = \frac{x}{l_n} = \xi_n. \quad (1073a)$$

Z_n ist dabei wiederum eine Funktion, die allein die Veränderliche z enthält und die Differentialgleichung, also die Bedingung

$$\frac{d^4 Z_n}{dz^4} - \frac{2}{l_n^2} \frac{d^2 Z_n}{dz^2} + \frac{1}{l_n^4} Z_n = 0, \quad (1073b)$$

erfüllt, nur daß die Lösungen Z_n in diesem Falle die Randbedingungen für $z = +h$ mit $\sigma_z = -p_0$, $\tau_{xz} = 0$, für $z = -h$ mit $\sigma_z = -p_u$, $\tau_{xz} = 0$ erfüllen müssen. Sie sind daher bei symmetrischer und antisymmetrischer Belastung ebenfalls symmetrisch oder antisymmetrisch zur x -Achse, so daß die allgemeine Lösung $^{(1)}Z_n$, $^{(2)}Z_n$ der Differentialgleichung aus je zwei partikulären Integralen mit geraden oder ungeraden Funktionen von z besteht. Um die Integrationskonstanten derart festzusetzen, daß Z_n die Randbedingungen erfüllt, werden die zur x -Achse symmetrischen oder antisymmetrischen äußeren Kräfte $^{(1)}p$, $^{(2)}p$ (Abb. 734b, c) ebenfalls in Reihen mit geraden trigonometrischen Funktionen von x und der Periode $2l$ entwickelt.

$$^{(1)}p(x) = A_0 + \sum_1^{\infty} A_n \cos \xi_n = ^{(1)}p_0 + \sum_1^{\infty} ^{(1)}p_n, \quad ^{(2)}p(x) = \sum_1^{\infty} A'_n \cos \xi_n = \sum_1^{\infty} ^{(2)}p_n. \quad (1074)$$

Die Beiwerte A_0 , A_n , A'_n können für jeden Belastungsfall nach bekannten Regeln berechnet werden. Die Ergebnisse stehen in Tabelle 66.

Lösung bei symmetrischer Belastung $^{(1)}p$ nach Abb. 734b mit $\zeta_n = \frac{z}{l_n}$.

$$\left. \begin{aligned} ^{(1)}F &= ^{(1)}F_0 + \sum_1^{\infty} ^{(1)}Z_n \cos \xi_n = -A_0 \frac{x^2}{2} - \sum_1^{\infty} A_n l_n^2 (C_n \mathfrak{C}o\int \zeta_n + D_n \zeta_n \mathfrak{S}in \zeta_n) \cos \xi_n, \\ ^{(1)}\sigma_z &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \sum_0^{\infty} ^{(1)}\sigma_{z,n} = -A_0 + \sum_1^{\infty} A_n (C_n \mathfrak{C}o\int \zeta_n + D_n \zeta_n \mathfrak{S}in \zeta_n) \cos \xi_n, \\ ^{(1)}\sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \sum_0^{\infty} ^{(1)}\sigma_{x,n} = -\sum_1^{\infty} A_n [(C_n + 2D_n) \mathfrak{C}o\int \zeta_n + D_n \zeta_n \mathfrak{S}in \zeta_n] \cos \xi_n, \\ ^{(1)}\tau_{xz} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = \sum_0^{\infty} ^{(1)}\tau_{xz,n} = -\sum_1^{\infty} A_n [(C_n + D_n) \mathfrak{S}in \zeta_n + D_n \zeta_n \mathfrak{C}o\int \zeta_n] \sin \xi_n. \end{aligned} \right\} (1075a)$$

Die Bedingungen $-(1)\sigma_{z,n} = (1)p_n = A_n \cos \xi_n$ und $(1)\tau_{xz} = 0$ an den Rändern $z = \pm h$ oder $\zeta_n = \pm h/l_n = \pm \lambda_n$ liefern:

$$\left. \begin{aligned} C_n &= -\frac{2(\sin \lambda_n + \lambda_n \operatorname{Coj} \lambda_n)}{2\lambda_n + \sin 2\lambda_n}, & D_n &= \frac{2\sin \lambda_n}{2\lambda_n + \sin 2\lambda_n}, \\ C_n + D_n &= -\frac{2\lambda_n \operatorname{Coj} \lambda_n}{2\lambda_n + \sin 2\lambda_n}, & C_n + 2D_n &= \frac{2(\sin \lambda_n - \lambda_n \operatorname{Coj} \lambda_n)}{2\lambda_n + \sin 2\lambda_n}. \end{aligned} \right\} \quad (1075b)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Für } z = \pm h \text{ ist } \sigma_z &= \sum (1)p_n \frac{2\lambda_n - \sin 2\lambda_n}{2\lambda_n + \sin 2\lambda_n}, \\ \text{für } z = 0 \text{ ist } \sigma_z &= - (1)p_0 - \sum (1)p_n \frac{2(\sin \lambda_n + \lambda_n \operatorname{Coj} \lambda_n)}{2\lambda_n + \sin 2\lambda_n}. \end{aligned} \right\} \quad (1076)$$

Lösung bei antimetrischer Belastung $(2)p$ nach Abb. 734c.

$$\left. \begin{aligned} (2)F &= \sum_1^\infty (2)Z_n \cos \xi_n = - \sum_1^\infty A'_n l_n^2 (C'_n \sin \zeta_n + D'_n \zeta_n \operatorname{Coj} \zeta_n) \cos \xi_n, \\ (2)\sigma_z &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \sum_1^\infty (2)\sigma_{z,n} = \sum_1^\infty A'_n (C'_n \sin \zeta_n + D'_n \zeta_n \operatorname{Coj} \zeta_n) \cos \xi_n, \\ (2)\sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \sum_1^\infty (2)\sigma_{x,n} = - \sum_1^\infty A'_n [(C'_n + 2D'_n) \sin \zeta_n + D'_n \zeta_n \operatorname{Coj} \zeta_n] \cos \xi_n, \\ (2)\tau_{xz} &= - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = \sum_1^\infty (2)\tau_{xz,n} = - \sum_1^\infty A'_n [(C'_n + D'_n) \operatorname{Coj} \zeta_n + D'_n \zeta_n \sin \zeta_n] \sin \xi_n. \end{aligned} \right\} \quad (1077a)$$

Die Bedingungen $-(2)\sigma_{z,n} = \pm (2)p_n = \pm A'_n \cos \xi_n$ und $(2)\tau_{xz} = 0$ an den Rändern $z = \pm h$ oder $\zeta_n = \pm h/l_n = \pm \lambda_n$ liefern:

$$\left. \begin{aligned} C'_n &= \frac{2(\operatorname{Coj} \lambda_n + \lambda_n \sin \lambda_n)}{2\lambda_n - \sin 2\lambda_n}, & D'_n &= \frac{-2\operatorname{Coj} \lambda_n}{2\lambda_n - \sin 2\lambda_n}, \\ C'_n + D'_n &= \frac{2\lambda_n \sin \lambda_n}{2\lambda_n - \sin 2\lambda_n}, & C'_n + 2D'_n &= -\frac{2(\operatorname{Coj} \lambda_n - \lambda_n \sin \lambda_n)}{2\lambda_n - \sin 2\lambda_n}. \end{aligned} \right\} \quad (1077b)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Für } z = \pm h \text{ ist } (2)\sigma_x &= \pm \sum_1^\infty (2)p_n \frac{2\lambda_n + \sin 2\lambda_n}{2\lambda_n - \sin 2\lambda_n}, \\ \text{für } z = 0 \text{ ist } \tau_{xz} &= \sum_1^\infty A'_n \frac{2\lambda_n \sin \lambda_n}{2\lambda_n - \sin 2\lambda_n} \sin \xi_n. \end{aligned} \right\} \quad (1078)$$

Das Kraftfeld ist darnach durch die Belastung und deren Reihenentwicklung nach Fourier (Tab. 66) und durch die Abmessungen $L = 2l$, $H = 2h$, $2c$ und die davon abhängigen Verhältniszahlen ξ_n , ζ_n , λ_n bestimmt. Es wird durch die Isoklinen und die Trajektorien der Hauptlängsspannungen und durch die Linien gleicher Hauptlängs- und gleicher Hauptschubspannung beschrieben. Sie zeigen den Ausgleich der äußeren Kräfte zwischen den Rändern des Streifens. In der Regel begnügt man sich jedoch mit den Komponenten σ_x , σ_z , τ_{xz} in einzelnen ausgezeichneten Schnitten $x = \text{const}$ oder $z = \text{const}$, insbesondere $x = 0$ (Feldmitte), $x = \pm l$ (Stützenquerschnitt), $z = 0$ (waagerechte Symmetrieachse) und $z = \pm h$ (Ränder), um auf die Grenzwerte der Spannungen zu schließen. Daneben können auch einzelne ausgezeichnete Spannungen als Funktionen von h oder c bestimmt werden. Leider ist die Konvergenz der Reihen für die Untersuchung in der Nähe der Ränder ungünstig. Bei hohen Streifen ($h \gg l$) genügen auch die Spannungen der Halbebene nach (1072), so daß angenähert

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{(o)} &= -(\dot{p}^{(o)} - \dot{p}_0^{(o)}), & \sigma_x^{(u)} &= -(\dot{p}^{(u)} - \dot{p}_0^{(u)}) \\ \dot{p}_0^{(o)} &= \frac{1}{l} \int_0^l \dot{p}^{(o)} dx, & \dot{p}_0^{(u)} &= \frac{1}{l} \int_0^l \dot{p}^{(u)} dx \end{aligned} \right\} \quad (1079)$$

gesetzt werden kann.

Die Längsspannungen σ_x sind in der Nähe des belasteten Randes größer, in der Nähe des unbelasteten Randes kleiner als beim Geradliniengesetz. Im Grenzfall $H \gg L$ wird der Streifen zur Halbebene mit $-\sigma_x = \pm p$ am belasteten Rande. Daher ist σ_x am Rande des Streifens stets größer als p , konvergiert jedoch gegen die Mitte schnell gegen Null. Für $L \geq 2H$ kann nach dem Geradliniengesetz gerechnet werden.

Die Ergebnisse der Zahlenrechnung müssen die Randbedingungen und die Gleichgewichtsbedingungen zwischen den inneren und äußeren Kräften erfüllen. In jedem Querschnitt ist daher

$$\int_{-h}^{+h} \sigma_x dz = 0, \quad \int_{-h}^{+h} \sigma_x z dz = M, \quad \int_{-h}^{+h} \tau_{xz} dz = -R_x.$$

Die Schnittkräfte M und R_x der periodischen Belastung sind bekannt.

Der Verschiebungszustand wird ebenso wie beim biegesteifen Stab durch die Krümmung $1/\varrho_x$ von ausgezeichneten Linien $z = \text{const}$, also $z = 0, z = \pm h$ beim Streifen, $z = 0, z = h, z = 2h \dots$ bei der Halbebene beschrieben. Bei kleinen Verschiebungen ist $1/\varrho_x = \partial^2 w / \partial x^2$. Da außerdem nach (1050) und (1051)

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_z) = \frac{\partial u}{\partial x}$$

ist, wird

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varrho_x} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \\ &= -\frac{1}{E} \frac{\partial \sigma_x}{\partial z} + \frac{1}{G} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\mu}{E} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1080a)$$

Die Summanden beschreiben einzeln den Anteil der Komponenten des Spannungszustandes an der Krümmung. Sie kann mit (1054b) nach

$$\frac{1}{\varrho_x} = -\frac{1}{E} \left[\frac{\partial^3 F}{\partial z^3} - (2 + \mu) \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial z} \right] \quad (1080b)$$

aus (1075a) oder (1077a) berechnet werden.

Gleichförmig verteilte Belastung am oberen Rande. Das Kräftebild Abb. 735a läßt sich in drei Teile zerlegen. Der Anteil I besteht aus einer periodischen, symmetrischen Streckenlast \dot{p} (Abb. 735b) mit Spannungen nach (1075a).

$$A_0 = 0, \quad A_n = \frac{2\dot{p}_2}{\gamma_n} \sin \gamma_n, \quad \dot{p}_2 = -\frac{\dot{p}}{2} \frac{l-c}{c}, \quad \gamma_n = n\pi \frac{l-c}{l}. \quad (1081)$$

Die Schubspannungen sind in den Schnitten $x = 0, x = l, z = 0, z = \pm h$ Null und daher die Längsspannungen σ_x, σ_z dort gleichzeitig Hauptspannungen. Da die

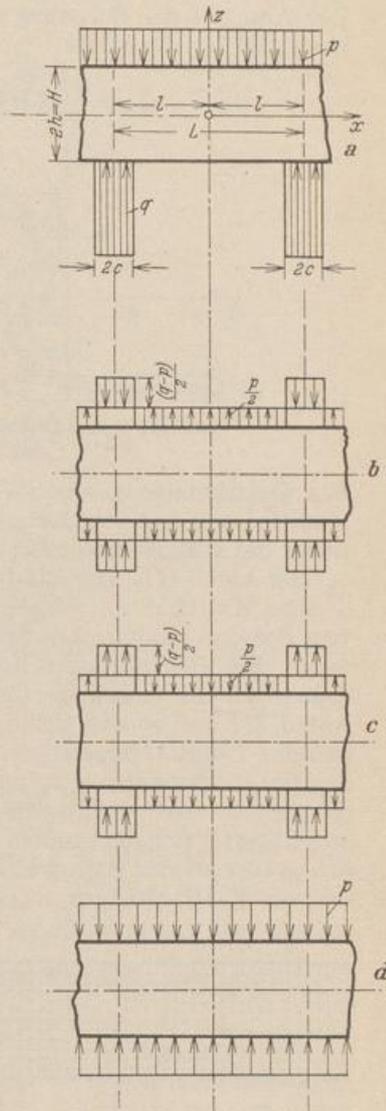


Abb. 735.