



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Die Statik im Stahlbetonbau**

**Beyer, Kurt**

**Berlin [u.a.], 1956**

76. Die Berechnung der Spannungsfunktion mit Differenzen

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

Dasselbe Ergebnis läßt sich auch aus einer Spannungsfunktion ableiten, die von N. L. G. Filon für die Belastung der Ränder eines Streifens mit zwei gleichgroßen entgegengesetzt gerichteten Einzellasten  $P$  nach Abb. 745 als Fouriersches Integral angegeben worden ist. Die Zustandslinien  $\sigma_x^*$ ,  $\sigma_z^*$ ,  $\tau_{xz}^*$  für  $z = \text{const}$  sind gleichzeitig Einflußlinien für eine wandernde Lastengruppe. Die Summe der positiven und negativen Anteile der Flächen  $\sigma_x^*$ ,  $\tau_{xz}^*$  sind in den Längsschnitten  $z = \text{const}$  Null, da bei gleichförmiger Belastung der Ränder nur Spannungen  $\sigma_z$  entstehen.

Nach Abb. 746 erzeugt die einzelne Kräftegruppe  $P$  (Abb. 745) auf der Breite  $2,7h$  der Symmetrieachse Druckspannungen  $\sigma_z$ . Darüber hinaus entstehen unbedeutende Zugspannungen, die schnell gegen Null konvergieren. Einzellasten werden daher durch ein elastisches Mittel auf  $2,7h$  Breite verteilt. Die Spannung  $\sigma_z$  erreicht mit  $0,92 P/h$  in der Wirkungslinie der Einzelkraft das Maximum. Sie ist nahezu gleich der auf den halben Scheibenquerschnitt bezogenen Spannung. Zwischen Einzellasten mit einem größeren Abstand als  $2,7h$  bestehen keine wesentlichen Beziehungen.

Filon, L. N. G.: On an approximate solution of the bending of a beam of rectangular cross section. Philos. Trans. Royal Soc. London 1903 (A.) Bd. 201 S. 63. — Timpe, A.: Problem der Spannungsverteilung in ebenen Systemen. Diss. Göttingen 1905. — Bleich, F.: Der gerade Stab mit Rechteckquerschnitt als ebenes Problem. B. I. 1923 S. 255. — Th. v. Kármán: Über die Grundlagen der Balkentheorie. Abhandlg. aus dem Aerodynamischen Institut d. Techn. Hochschule Aachen. Berlin 1927. — Seewald, F.: Die Spannungen und Formänderungen von Balken mit rechteckigem Querschnitt. Abhandlg. aus dem Aerodynamischen Institut d. Techn. Hochschule Aachen. Berlin 1927. — Crámer, H.: Spannungen in hohen wandartigen Trägern. Bericht über die II Int. Tagung für Brücken- und Hochbau. Wien 1929. — Derselbe: Spannungen in wandartigen Balken bei feldweise wechselnder Belastung. Z. A. M. 1930 S. 205. — Baß, H.: Der wandartige Träger auf unendlich vielen Stützen. J. A. 1931 S. 435. — Cooker, E. G., u. L. N. G. Filon: A Treatise on Photo Elasticity. Cambridge 1931. — Dischinger, F.: Beitrag zur Theorie der Halbscheibe und des wandartigen Balkens. Abhandlungen der Int. Vereinigung für Brücken- und Hochbau. Zürich 1932 und Beton u. Eisen 1933 S. 237. — Crámer, H.: Spannungen in durchlaufenden Scheiben bei Vollbelastung sämtlicher Felder. Beton u. Eisen 1933 S. 233.

## 76. Die Berechnung der Spannungsfunktion mit Differenzen.

Die Erweiterung der Randbedingungen durch die rechteckige oder polygonale Begrenzung der Scheiben bereitet beim Ansatz und bei der numerischen Lösung der Spannungsfunktion  $F$  wesentlich größere Schwierigkeiten. Aus diesem Grunde begnügt man sich bei derartigen Aufgaben ebenso wie bei ähnlichen Problemen der Plattenbiegung mit einer Näherungslösung durch die Entwicklung der Ansätze (1054) in Differenzen. Da die Differentialgleichung des ebenen Spannungszustandes und die Differentialgleichung der Plattenbiegung unter Randkräften miteinander übereinstimmen, kann die Differenzengleichung des ebenen Spannungszustandes in rechtwinkligen Koordinaten nach (999) oder in Polarkoordinaten unmittelbar angeschrieben werden. Die Spannungsfläche erscheint dann ebenso wie die elastische Fläche der Platte als Gitter, dessen Aufriß aus zwei Gruppen von äquidistanten, sich rechtwinklig kreuzenden geraden Linien besteht ( $\Delta x \neq \Delta z$ ). Die Endpunkte der Ordinaten  $F_k$  der Gitterknoten  $k$  liegen in der Spannungsfläche. Ihre gegenseitigen Beziehungen lassen sich an jedem Gitterknoten durch eine lineare Gleichung ausdrücken. Sie lautet für  $\Delta x = \Delta z$  nach (1000) folgendermaßen (Abb. 747):

$$20F_k - 8(F_{k-1} + F_l + F_{k+1} + F_i) + 2(F_{l-1} + F_{l+1} + F_{i-1} + F_{i+1}) + (F_{k-2} + F_m + F_{k+2} + F_h) = 0. \quad (1084)$$

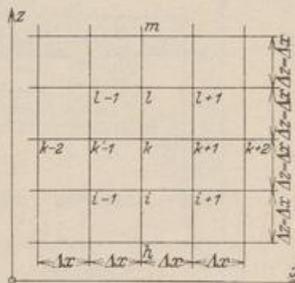


Abb. 747.

Für  $\Delta x \neq \Delta z$  wird die Differentialbeziehung  $\Delta \Delta F = 0$  nach (999) angeschrieben. Die Gleichungen für die inneren Knoten sind homogen. Außerdem gelten Randbedingungen, die entweder nach (1054) durch die Randkräfte oder nach (1061) durch Funktionen der Randkräfte vorgeschrieben sind. Der Ansatz liefert bei jedem Belastungsfall ein eindeutiges Ergebnis für die Ordinaten  $F_k$ . Mit diesen lassen sich dann die Komponenten des ebenen Spannungszustandes nach (998) berechnen.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \approx \frac{F_{k+1} - 2F_k + F_{k-1}}{\Delta x^2}, & \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \approx \frac{F_l - 2F_k + F_l}{\Delta z^2}, \\ \tau_{xz} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \approx -\frac{(F_{l+1} - F_{l-1}) - (F_{l+1} - F_{l-1})}{4 \Delta x \cdot \Delta z}. \end{aligned} \right\} (1085)$$

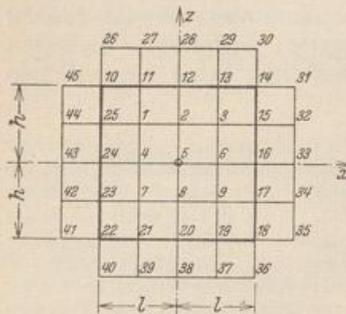


Abb. 748.

Die Schubspannungen werden daher am einfachsten für die Mittelpunkte der Maschen berechnet.

Der quadratischen Scheibe Abb. 748 wird ein durch 2 Scharen von äquidistanten Geraden bestimmtes Gitter mit 9 Innenknoten und 16 Randknoten zugeordnet, so daß zunächst ohne Beachtung der Symmetrie 25 Ordinaten  $F_k$  der Spannungsfläche in die Rechnung eingehen und 9 Gleichungen angeschrieben werden können. Diese enthalten noch die unbekanntes Ordinaten  $F_k$  von 20 Nebenknoten der über den Scheibenrand hinaus erweiterten Spannungsfläche. Die 45 Wurzeln des Ansatzes sind daher nur dann eindeutig bestimmt,

wenn zu den 9 linearen Gleichungen für die Gitterknoten 1 bis 9 noch 36 Randbedingungen treten. Diese stehen bei freien Rändern  $z = \pm h$  nach (1085) als unmittelbare Beziehung zwischen Randbelastung und Randspannung zur Verfügung.

An 10 Randknoten  $z = \pm h$  ist  $\sigma_z = -p_z$ , an 10 Randknoten  $x = \pm l$  ist  $\sigma_x = -p_x$ , an 12 mittleren Randknoten  $z = \pm h, x = \pm l$  und an 4 Eckknoten ist  $\tau_{xz} = 0$ .

Ansatz und Lösung werden an einer Scheibe mit  $h/l = 3/4$  gezeigt, welche nach Abb. 749 belastet ist. Wegen der Symmetrie der Belastung zur  $z$ -Achse genügt die Berechnung der Spannungsfläche  $F$  für eine Hälfte der Scheibe. Nach Abb. 750 sind daher die Ordinaten  $F_k$  von 20 Innenknoten zu berechnen ( $\Delta x = \Delta z = \Delta$ ).

Bestimmung der Randordinaten nach (1061a): Als Anfangspunkt wird wegen der Symmetrie der Punkt 21 gewählt.

$$F_{21} = F_{22} = \dots = F_{31} = 0,$$

$$F_{32} = -3 p \Delta \cdot \frac{\Delta}{2} = -1,5 p \Delta^2,$$

$$F_{33} = -3 p \Delta \cdot \frac{3}{2} \Delta + p \Delta \cdot \frac{\Delta}{2} = -4,0 p \Delta^2,$$

$$F_{34} = -3 p \Delta \cdot \frac{5}{2} \Delta + p 2 \Delta \cdot \Delta = -5,5 p \Delta^2,$$

$$F_{35} = -3 p \Delta \cdot \frac{7}{2} \Delta + p 3 \Delta \cdot \frac{3}{2} \Delta = -6,0 p \Delta^2.$$

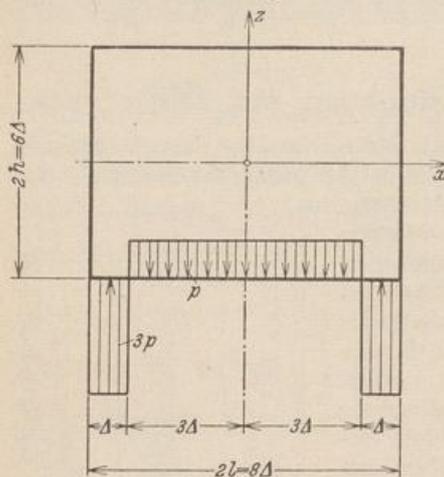


Abb. 749.

Elimination der Ordinaten an den Nebenknoten nach (1061b): Für die Randknoten 21 bis 35 wird  $\partial F/\partial n = -R_1$ , so daß z. B. für die Knoten 22, 28 und 33 die folgenden Beziehungen entstehen:

$$\frac{F_{37} - F_3}{2\Delta} = 0, \quad \frac{F_{44} - F_9}{2\Delta} = 0, \quad \frac{F_{50} - F_{18}}{2\Delta} = 0.$$

Daher ist  $F_{37} = F_3, F_{44} = F_9, F_{50} = F_{18}$ . Das vollständige Ergebnis für alle Rand- und Außenknoten ist in Abb. 751 eingetragen.

Aufstellung der Differenzgleichungen nach (1084): Gleichung für den Punkt 3:

$$20F_3 - 8(F_2 + 0 + F_4 + F_7) + 2(F_6 + 0 + 0 + F_8) + (F_1 + F_3 + F_3 + F_{11}) = 0.$$

Gleichung für den Punkt 18:

$$20F_{18} - 8(F_{17} + F_{14} + F_{19} - 4,0 p \Delta^2) + 2(-1,5 p \Delta^2 + F_{13} + F_{15} - 5,5 p \Delta^2) + (0 + F_{10} + F_{20} + F_{18}) = 0.$$

	40	39	38	37	36
41	25	24	23	22	21
42	26	1	2	3	4
43	27	5	6	7	8
44	28	9	10	11	12
45	29	13	14	15	16
46	30	17	18	19	20
47	31	32	33	34	35
48	49	50	51	52	

Abb. 750.

0	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_5$
0	0	0	0	0	0
$F_1$	0	$F_7$	$F_8$	$F_9$	$F_{10}$
$F_2$	0	$F_7$	$F_8$	$F_9$	$F_{10}$
$F_3$	0	$F_7$	$F_8$	$F_9$	$F_{10}$
$F_4$	0	$F_7$	$F_8$	$F_9$	$F_{10}$
$F_5$	0	$F_7$	$F_8$	$F_9$	$F_{10}$
$F_6$	0	$F_7$	$F_8$	$F_9$	$F_{10}$
$F_7$	0	$F_7$	$F_8$	$F_9$	$F_{10}$
$F_8$	0	$F_7$	$F_8$	$F_9$	$F_{10}$
$F_9$	0	$F_7$	$F_8$	$F_9$	$F_{10}$
$F_{10}$	0	$F_7$	$F_8$	$F_9$	$F_{10}$
$15a$	0	$-15a$	$-40a$	$-55a$	$-80a$
0	$F_{11}$	$F_{12}$	$F_{13}$	$F_{14}$	$F_{15}$
$a = p\Delta^2$					

Abb. 751.

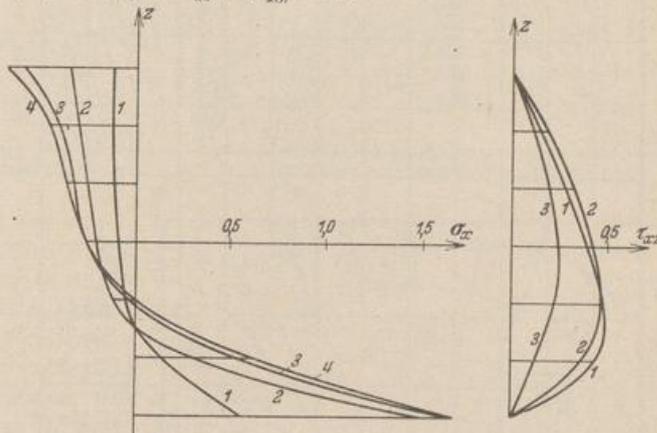


Abb. 752a, b. Spannungen  $\sigma_x$  und  $\tau_{xz}$  in den Schnitten im Abstand  $\Delta, 2\Delta, 3\Delta, 4\Delta$  vom Außenrand (Kurven 1 bis 4).

Das vollständige Gleichungssystem ist nach Zusammenfassung der einzelnen Unbekannten  $F_k$  in der Matrix auf S. 736 enthalten. Die Lösung steht auf S. 737.

Die Spannungen  $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$  werden hieraus nach (1085) ermittelt. Sie sind in den Abb. 752a bis c aufgetragen. Die Abb. 753a bis c enthalten die Linien gleicher Hauptlängsspannungen  $\sigma_1, \sigma_2$  und die Längsspannungstrajektorien, deren Verlauf bei der groben Maschenteilung der Lösung allerdings im mittleren Bereich des unteren Randes nicht angegeben werden kann. Trotzdem eignen sich die Abb. 753 zu einem kritischen Vergleich mit der Lösung für die Halbscheibe auf S. 722 und für den Streifen auf S. 730f. Dabei verdient vor allem der Einfluß der Ränder auf den Spannungszustand Beachtung.

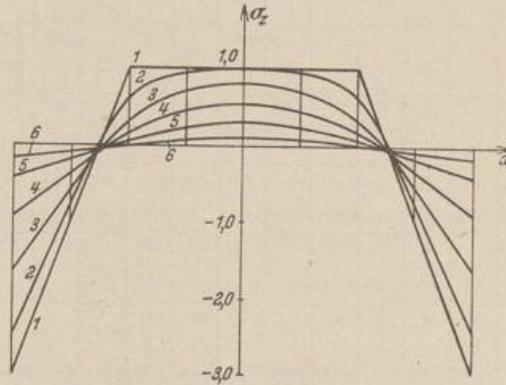


Abb. 752c. Spannungen  $\sigma_z$  in den Schnitten im Abstand  $0, \Delta, 2\Delta, \dots, 5\Delta$  vom unteren Rand (Kurven 1 bis 6).

	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_5$	$F_6$	$F_7$	$F_8$	$F_9$	$F_{10}$	$F_{11}$	$F_{12}$	$F_{13}$	$F_{14}$	$F_{15}$	$F_{16}$	$F_{17}$	$F_{18}$	$F_{19}$	$F_{20}$	
1	+22	-8	+1		-8	+2			+1												
2	-8	+21	-8	+1	+2	-8	+2			+1											
3	+1	-8	+22	-8		+2	-8	+2			+1										
4		+2	-16	+21			+4	-8				+1									
5	-8	+2			+21	-8	+1		-8	+2			+1								
6	+2	-8	+2		-8	+20	-8	+1	+2	-8	+2			+1							
7		+2	-8	+2	+1	-8	+21	-8		+2	-8	+2			+1						
8			+4	-8		+2	-16	+20			+4	-8				+1					
9	+1				-8	+2			+21	-8	+1		-8	+2			+1				
10		+1			+2	-8	+2		-8	+20	-8	+1	+2	-8	+2			+1			
11			+1			+2	-8	+2	+1	-8	+21	-8		+2	-8	+2			+1		
12				+1			+4	-8		+2	-16	+20			+4	-8				+1	
13					+1				-8	+2			+21	-8	+1		-8	+2			+1
14						+1			+2	-8	+2		-8	+20	-8	+1	+2	-8	+2		
15							+1			+2	-8	+2	+1	-8	+21	-8		+2	-8	+2	
16								+1			+4	-8		+2	-16	+20			+4	-8	
17									+1				-8	+2			+22	-8	+1		
18										+1			+2	-8	+2		-8	+21	-8	+1	
19											+1			+2	-8	+2	+1	-8	+22	-8	
20												+1			+4	-8		+2	-16	+21	

+ 1,5a  
 + 4,0a  
 + 5,5a  
 + 6,0a  
 - 4,0a  
 - 18,0a  
 - 24,0a  
 - 26,0a

Lösung der Matrix auf S. 736: ( $a = 1$ )

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F_k$	-0,0466	-0,1764	-0,3005	-0,3473	-0,2053	-0,6282	-1,0040	-1,1485	-0,4631	-1,3222
$h$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$F_k$	-2,0395	-2,3092	-0,8172	-2,2306	-3,3332	-3,7338	-1,2242	-3,2490	-4,6725	-5,1662

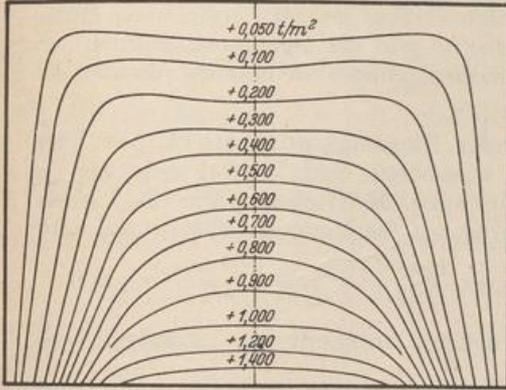


Abb. 753a. Linien gleicher Hauptspannung  $\sigma_1$ .

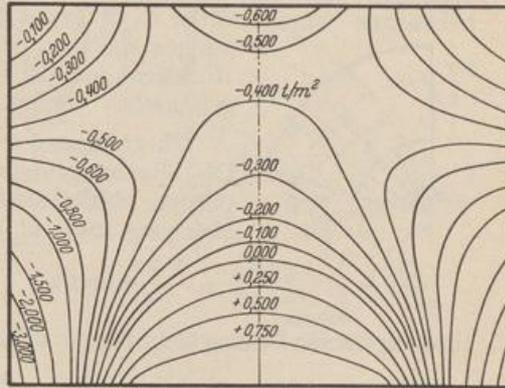


Abb. 753b. Linien gleicher Hauptspannung  $\sigma_2$ .

Der Spannungszustand der Scheiben mit  $H \ll L$ , der aus den Schnittkräften nach Abschn. 10 statisch bestimmt angegeben werden kann, unterscheidet sich von dem Spannungszustand gedrungener Scheiben vor allem durch das Verhältnis von  $\sigma_z$  zu  $\sigma_x$ . In dem einen Falle ist  $\sigma_z \ll \sigma_x$ , in dem anderen Falle sind beide Spannungen von der gleichen Größenordnung. Das Vorzeichen der Längsspannung  $\sigma_x$  wechselt beim Träger in der Achse, dagegen bei gedrungenen Scheiben mit  $H \approx L$  in den Wendepunkten der Querschnitte  $x = \text{const}$  der Spannungsfläche  $F$ , also

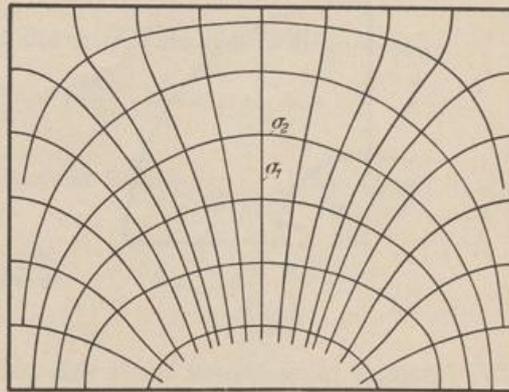


Abb. 753c. Längsspannungstrajektorien.

in der Nähe des abgestützten Scheibenrandes. Die Spannungen in Längs- oder Querschnitten lassen sich aber auch hier stets zu Schnittkräften zusammenfassen, welche mit den äußeren Kräften am Rande die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen.

Bay, H.: Über den Spannungszustand in hohen Trägern und die Bewehrung von Eisenbetonwänden. Stuttgart 1931.

## 77. Angenäherte Untersuchung des Spannungszustandes in Rahmenecken.

Während die statisch bestimmte Berechnung der Spannungen aus den Schnittkräften zur Beurteilung der Festigkeit der Rahmenstäbe ausreicht, läßt sich das Kraftfeld im Bereich der Winkelpunkte der Stabachsen nur mit einem ebenen Spannungszustand vergleichen. Dieser ist durch polarisationsoptische Untersuchun-