



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

77. Angenäherte Untersuchung des Spannungszustandes in Rahmenecken

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

Lösung der Matrix auf S. 736: ($a = 1$)

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_k	-0,0466	-0,1764	-0,3005	-0,3473	-0,2053	-0,6282	-1,0040	-1,1485	-0,4631	-1,3222
h	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
F_k	-2,0395	-2,3092	-0,8172	-2,2306	-3,3332	-3,7338	-1,2242	-3,2490	-4,6725	-5,1662

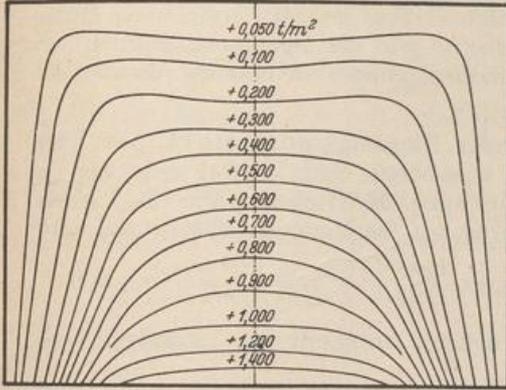


Abb. 753a. Linien gleicher Hauptspannung σ_1 .

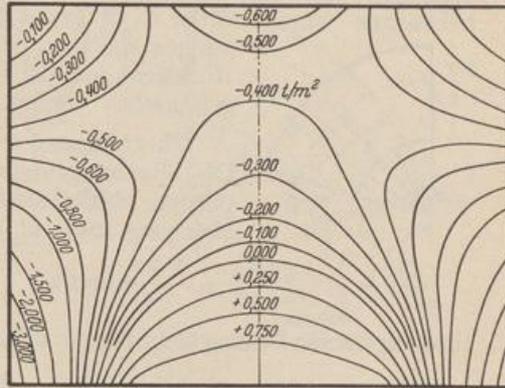


Abb. 753b. Linien gleicher Hauptspannung σ_2 .

Der Spannungszustand der Scheiben mit $H \ll L$, der aus den Schnittkräften nach Abschn. 10 statisch bestimmt angegeben werden kann, unterscheidet sich von dem Spannungszustand gedrungener Scheiben vor allem durch das Verhältnis von σ_z zu σ_x . In dem einen Falle ist $\sigma_z \ll \sigma_x$, in dem anderen Falle sind beide Spannungen von der gleichen Größenordnung. Das Vorzeichen der Längsspannung σ_x wechselt beim Träger in der Achse, dagegen bei gedrungenen Scheiben mit $H \approx L$ in den Wendepunkten der Querschnitte $x = \text{const}$ der Spannungsfläche F , also

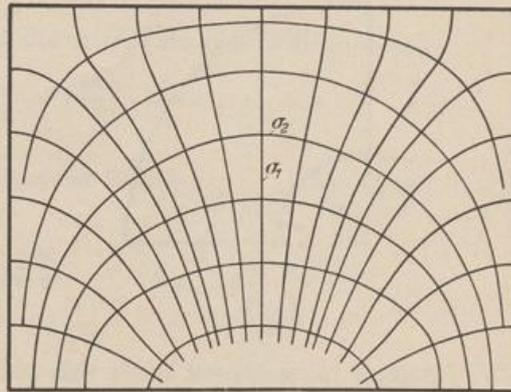


Abb. 753c. Längsspannungstrajektorien.

in der Nähe des abgestützten Scheibenrandes. Die Spannungen in Längs- oder Querschnitten lassen sich aber auch hier stets zu Schnittkräften zusammenfassen, welche mit den äußeren Kräften am Rande die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen.

Bay, H.: Über den Spannungszustand in hohen Trägern und die Bewehrung von Eisenbetonwänden. Stuttgart 1931.

77. Angenäherte Untersuchung des Spannungszustandes in Rahmenecken.

Während die statisch bestimmte Berechnung der Spannungen aus den Schnittkräften zur Beurteilung der Festigkeit der Rahmenstäbe ausreicht, läßt sich das Kraftfeld im Bereich der Winkelpunkte der Stabachsen nur mit einem ebenen Spannungszustand vergleichen. Dieser ist durch polarisationsoptische Untersuchun-

gen an rechtwinkligen, auf Biegung beanspruchten Stabecken gemessen worden. Darnach ist der ausspringende Bereich der Ecke fast spannungsfrei. Aus diesem Grunde liegt es nahe, das vorgeschriebene polygonale Kraftfeld durch einen Kreisringsektor mit konzentrischen Rändern zu begrenzen und die Spannungsaufgabe mit Polarkoordinaten zu lösen, wenn dabei sich voraussichtlich auch der Verschiebungszustand ändern wird.

Um die Randbedingungen und damit auch die Zahlenrechnung zu vereinfachen, wird über die Eintragung der Schnittkräfte an den Querschnitten der Scheibe nichts ausgesagt. Hier gelten vielmehr nur die Gleichgewichtsbedingungen zwischen den bekannten Schnittkräften N, M, Q des Rahmenstabes und den errechneten Spannungen σ_t, τ_{tr} , die ebenso wie die Spannungsfunktion mit Rücksicht auf die Randbedingungen in Polarkoordinaten an-

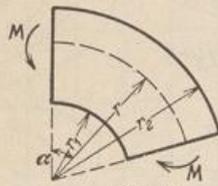


Abb. 754.

geschrieben werden.

Übertragung zweier Biegemomente M (Abb. 754).

Die Spannungen sind unabhängig vom Winkel α , so daß die partielle Differentialgleichung (1057) ebenso wie die Plattengleichung (947) in bezug auf die Veränderliche r total wird.

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right) \left(\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr}\right) = 0; \quad \sigma_r = \frac{1}{r} \frac{dF}{dr}, \quad \sigma_t = \frac{d^2 F}{dr^2}, \quad \tau_{rt} = 0.$$

Ihre allgemeine Lösung steht bereits auf S. 650 und lautet mit $r_2/r = \varrho$ und $r_2/r_1 = \varrho_1$

$$F = c_0 + c_1 \ln \varrho + c_2 \frac{1}{\varrho^2} + c_3 \frac{1}{\varrho^2} \ln \varrho. \tag{1086}$$

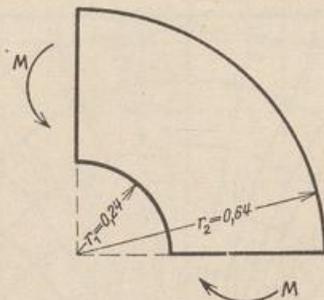


Abb. 755 a.

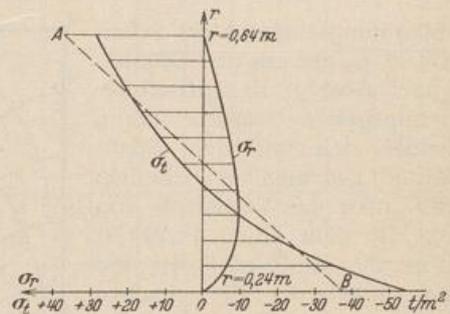


Abb. 755 b.

Die Integrationskonstanten lassen sich aus den Bedingungen

$$\sigma_r = -\frac{1}{r^3} (c_1 \varrho^2 - 2c_2 + c_3 - 2c_3 \ln \varrho) = 0$$

an den Rändern $r = r_1$ und $r = r_2$ und $M = \int_{r_1}^{r_2} \sigma_t r dr$ bestimmen. Man erhält mit

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= r_1^2 [(\varrho_1^2 - 1)^2 - 4\varrho_1^2 (\ln \varrho_1)^2], \\ c_1 &= -\frac{M}{T_1} r_2^2 \cdot 4 \ln \varrho_1, \quad c_2 = \frac{M}{T_1} r_2^2 (1 - \varrho_1^2 - 2 \ln \varrho_1), \quad c_3 = \frac{M}{T_1} r_2^2 \cdot 2 (1 - \varrho_1^2) \end{aligned} \right\} \tag{1087 a}$$

und daraus

$$\sigma_r = \frac{4M}{T_1} \left(-\ln \frac{\varrho_1}{\varrho} - \varrho_1^2 \ln \varrho + \varrho^2 \ln \varrho_1\right), \quad \sigma_t = \frac{4M}{T_1} \left(\varrho_1^2 - 1 - \ln \frac{\varrho_1}{\varrho} - \varrho_1^2 \ln \varrho - \varrho^2 \ln \varrho_1\right). \tag{1087 b}$$

σ_r und σ_t sind Hauptspannungen, die Querschnitte bleiben eben.

Für einen Sektor mit $r_1 = 0,24 \text{ m}$, $r_2 = 0,64 \text{ m}$ (Abb. 755 a) wird $\varrho_1 = 2,6667$ und $T_1 = 0,57492$. Die Auswertung der Ergebnisse (1087 b) liefert mit $M = 1 \text{ mt/m}$ die für

alle Radialschnitte gleiche Spannungsverteilung der Abb. 755b. Die Gerade AB zeigt den linearen Verlauf von σ_t nach Navier.

Ausgleich einer Querkraft. Die Querkraft Q_a (Abb. 756) steht mit den Schnittkräften N_b, M_b, Q_b im Gleichgewicht $[(Q_a, N_b, M_b, Q_b) = 0]$. Die Spannungsfunktion

$$F = \Phi(r) \cdot \sin \alpha \tag{1088}$$

mit den Spannungskomponenten

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \left(\frac{\Phi'}{r} - \frac{\Phi}{r^2} \right) \sin \alpha, & \sigma_t &= \Phi'' \cdot \sin \alpha, \\ \tau_{rt} &= - \left(\frac{\Phi'}{r} - \frac{\Phi}{r^2} \right) \cos \alpha = - \frac{\sigma_r}{\operatorname{tg} \alpha} \end{aligned} \right\} \tag{1089}$$

liefert am Rande $\alpha = 0$ nur Schubspannungen τ_{rt} .
Aus

$$\Delta \Delta F = \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 \Phi}{dr^2} - \frac{\Phi}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} \right) \cdot \sin \alpha$$

folgt für $\Phi(r)$ die totale Differentialgleichung

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^2 \Phi = 0. \tag{1090a}$$

Ihre Lösung ist

$$\Phi = c_1 \frac{1}{\rho^3} + c_2 \frac{\ln \rho}{\rho} + c_3 \frac{1}{\rho} + c_4 \rho, \tag{1090b}$$

wobei wieder $r_2/r = \rho$ gesetzt wurde.

Die Integrationskonstanten c_1, c_2, c_4 lassen sich aus den Bedingungen

$$\sigma_r = \left(2c_1 \frac{1}{\rho} - c_2 \rho - 2c_4 \rho^3 \right) \frac{\sin \alpha}{r^2} = -\tau_{rt} \operatorname{tg} \alpha = 0$$

an den Rändern $r = r_1$ und $r = r_2$ und aus der Bedingung $\int_{r_1}^{r_2} \tau_{rt} dr = Q_a$ am Rande

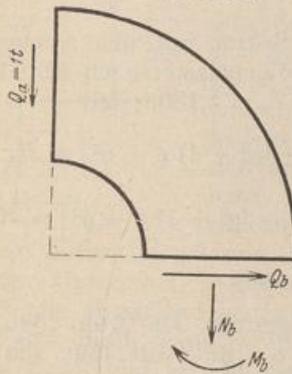


Abb. 757.

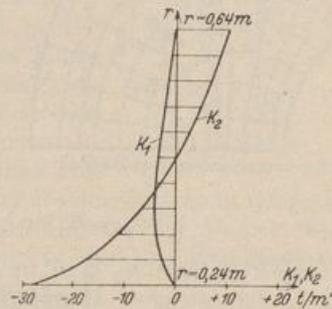


Abb. 758.

$\alpha = 0$ ermitteln. Die Integrationskonstante c_3 ist ohne Einfluß auf die Spannungen und daher beliebig. Mit der Abkürzung

$$\left. \begin{aligned} T_2 &= r_2^{-1} [(\rho_1^2 + 1) \ln \rho_1 - (\rho_1^2 - 1)] \\ c_1 &= \frac{\rho_1^2}{2} \frac{Q_a}{T_2}, & c_2 &= (\rho_1^2 + 1) \frac{Q_a}{T_2}, & c_4 &= -\frac{1}{2} \frac{Q_a}{T_2} \end{aligned} \right\} \tag{1091a}$$

und damit

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{Q_a}{T_2} \left[\frac{\varrho_1^2}{\varrho} - (\varrho_1^2 + 1) \varrho + \varrho^3 \right] \sin \alpha, & \tau_{rt} &= -\frac{\sigma_r}{\operatorname{tg} \alpha}, \\ \sigma_t &= \frac{Q_a}{T_2} \left[3 \frac{\varrho_1^2}{\varrho} - (\varrho_1^2 + 1) \varrho - \varrho^3 \right] \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (1091 b)$$

Die Spannungsergebnisse im Schnitt $b (\alpha = \alpha_0)$ stehen mit Q_a im Gleichgewicht:

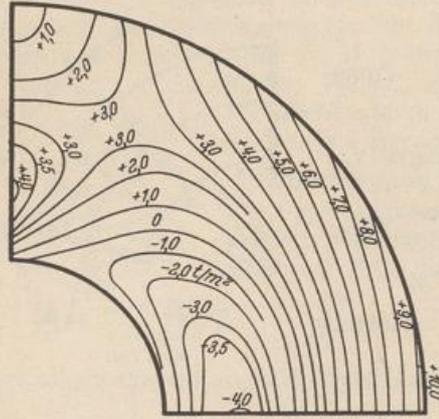


Abb. 759 a. Linien gleicher Hauptspannung σ_1 .

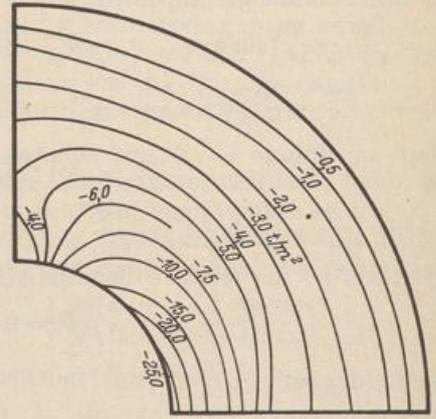


Abb. 759 b. Linien gleicher Hauptspannung σ_2 .

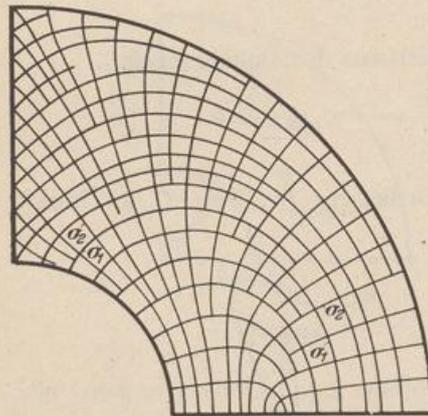


Abb. 759 c. Längsspannungstrajektorien.

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{r_2} \sigma_t dr &= N_b = -Q_a \sin \alpha_0, \\ \int_{r_1}^{r_2} \tau_{rt} dr &= Q_b = Q_a \cos \alpha_0, \\ \int_{r_1}^{r_2} \sigma_t (r - r_0) dr &= M_b = Q_a r_0 \sin \alpha_0. \end{aligned}$$

Für den Sektor mit den Abmessungen nach Abb. 755 a, belastet nach Abb. 757, ist $q_1 = 2,6667$, $T_2 = 1,1805$. Mit

$$\begin{aligned} \frac{Q_a}{T_2} \left[\frac{\varrho_1^2}{\varrho} - (\varrho_1^2 + 1) \varrho + \varrho^3 \right] &= K_1, \\ \frac{Q_a}{T_2} \left[3 \frac{\varrho_1^2}{\varrho} - (\varrho_1^2 + 1) \varrho - \varrho^3 \right] &= K_2 \end{aligned}$$

wird $\sigma_r = K_1 \sin \alpha, \quad \sigma_t = K_2 \sin \alpha.$

Die Funktionen K_1 und K_2 sind in Abb. 758 dargestellt. Die Abb. 759 a, b enthalten die Linien gleicher Hauptspannungen σ_1, σ_2 , die Abb. 759 c die Längsspannungstrajektorien für die Belastung nach Abb. 757.

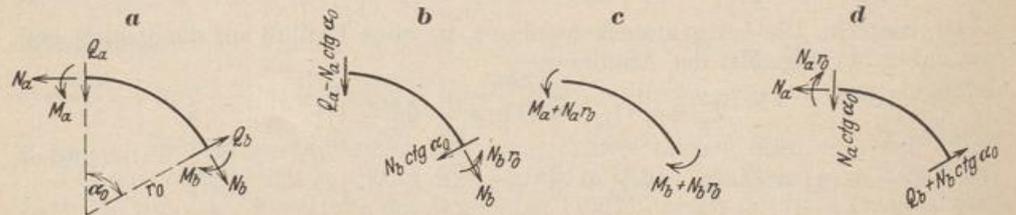


Abb. 760.

Eine Belastung des Ringsektors nach Abb. 760a läßt sich durch Aufspaltung in die drei Anteile Abb. 760b, c, d auf die beiden Grundfälle zurückführen.

Preuß, E.: Versuche über die Spannungsverminderung durch die Ausrundung scharfer Ecken. Forsch.-Arb. Ing.-Wes. Heft 126. Berlin 1912. — Grüning, M.: Die Spannungen im Knotenpunkt eines Vierecksträgers. Eisenbau 1914 S. 162. — Wyß, Th.: Die Kraftfelder in festen elastischen Körpern. Berlin 1926. — Cardinal v. Widdern, H.: Polarisationsoptische Spannungsmessungen an Stabecken. Mitteilungen aus dem Mechan.-Techn. Laboratorium der T. H. München. 3. Folge Heft 34. München 1930. — Kurzhals, H.: Polarisationsoptische Untersuchungen an rechtwinkligen, auf Biegung beanspruchten Stabecken. Mitteilungen aus dem Mechan.-Techn. Laboratorium der T. H. München. 3. Folge Heft 35. München 1931.

78. Der Spannungszustand in Rahmenknoten.

Die Lösung der Aufgabe ist angenähert für eine durch die Querschnitte a, b, c begrenzte rechteckige Knotenscheibe (Abb. 761) mit Hilfe einer Spannungsfunktion versucht worden, die zwar die Differentialgleichung (1055) und die Gleichgewichtsbedingungen in a, b, c befriedigt, dagegen nicht den Randbedingungen gerecht wird. Für das Kräftebild Abb. 761 ohne Querkraft in c ist nach M. Grüning

$$F = \frac{3Q}{8e^3f^3} \left[xy(f^2 - \frac{1}{3}y^2)(x^2l + 2e^3 - 3e^2l) + \frac{1}{5}xy l(f^2 - y^2)^2 - \frac{2}{3}f^3lx^3 \right], \quad (1092a)$$

für das Kräftebild Abb. 762 mit einer Querkraft in c (Stockwerkrahmen)

$$F = \frac{P}{16e^3f} [x^3(y+f)^2 - (y+f)^4x + (8f^2 - 3e^2)x(y+f)^2 + 2e^3y^2]. \quad (1092b)$$

Die Spannungen lassen sich daraus mit (1054b) leicht ableiten. Die Lösung gibt jedoch ohne die ausreichende Berücksichtigung der Randbedingungen kein zutreffendes Bild des Kraftfeldes, da nicht der Spannungszustand in den einspringenden Ecken erfaßt und sein Einfluß auf den Kern des Kraftfeldes bewertet wird.

Das Problem ist neuerdings durch Spannungsmessungen und vor allem durch optische Beobachtungen geklärt und von Th. Wyß an Kraftfeldern studiert worden, die sich an Hand des Versuchsmaterials mit Hilfe der analytischen Beziehungen über Tra-

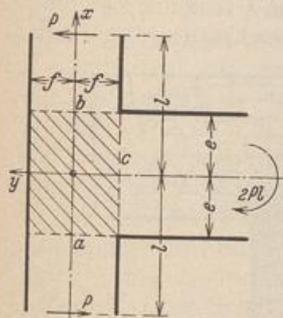


Abb. 761.

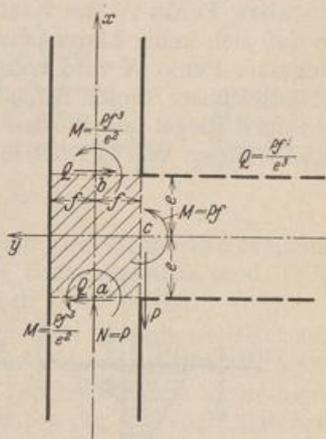


Abb. 762.

jektorien aufzeichnen lassen. Dabei wird der Rahmenknoten in denjenigen Querschnitten abgegrenzt, in denen die einfachen Gesetze der Navierschen Balkenbiegung als zutreffend angenommen werden, so daß die Randbedingungen des Kraftfeldes durch Schnittkräfte bekannt sind.

Das Kräftebild zerfällt bei symmetrischen Knotenscheiben, die hier vorausgesetzt werden sollen, in den symmetrischen und in den antisymmetrischen Anteil mit grundsätzlich verschiedenen, ausgezeichneten Kraftfeldern.

a) Symmetrie der Belastung. Die Biegemomente, Quer- und Längskräfte der Querschnitte a, b sind einander gleich, am Querschnitt c ist nur die Längskraft $N_c = 2Q_a$ von Null verschieden (Abb. 763a). Die Schubspannungen sind in der Symmetrielinie Null, die Hauptspannungen σ_1, σ_2 parallel zur x - und y -Achse. Das Kraftfeld stimmt mit demjenigen eines im Bereich c verstärkten Balkenabschnitts überein, der hier eine gleichförmig verteilte Belastung aufnimmt (Abb. 763b). Die Kraftlinien α beschreiben im wesentlichen den Kraftfluß und die Beziehungen