Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Übertragung zweier Biegungsmomente

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

gen an rechtwinkligen, auf Biegung beanspruchten Stabecken gemessen worden. Darnach ist der ausspringende Bereich der Ecke fast spannungsfrei. Aus diesem Grunde liegt es nahe, das vorgeschriebene polygonale Kraftfeld durch einen Kreisringsektor mit konzentrischen Rändern zu begrenzen und die Spannungsaufgabe mit Polarkoordinaten zu lösen, wenn dabei sich voraussichtlich auch der Verschiebungszustand ändern wird.

Um die Randbedingungen und damit auch die Zahlenrechnung zu vereinfachen, wird über die Eintragung der Schnittkräfte an den Querschnitten der Scheibe nichts ausgesagt. Hier gelten vielmehr nur die Gleichgewichtsbedingungen zwischen den bekannten Schnittkräften N, M, Q des Rahmenstabes und den errechneten Spannungen σ_t, τ_{tr}, die ebenso wie die Spannungsfunktion mit Rücksicht auf die Randbedingungen in Polarkoordinaten angeschrieben werden.

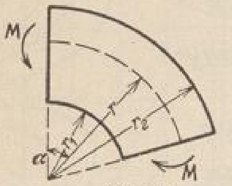

Abb. 754.

Übertragung zweier Biegungsmomente M (Abb. 754). Die Spannungen sind unabhängig vom Winkel α, so daß die partielle Differentialgleichung (1057) ebenso wie die Plattengleichung (947) in bezug auf die Veränderliche r total wird.

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2F}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dF}{dr}\right)=0\,; \qquad \sigma_r=\frac{1}{r}\frac{dF}{dr}, \qquad \sigma_t=\frac{d^2F}{dr^2}, \qquad \tau_{rt}=0\,.$$

Ihre allgemeine Lösung steht bereits auf S. 650 und lautet mit $r_2/r=\varrho$ und $r_2/r_1=\varrho_1$

$$F=c_0+c_1\ln\varrho+c_2\frac{1}{\varrho^2}+c_3\frac{1}{\varrho^2}\ln\varrho\,. \tag{1086}$$

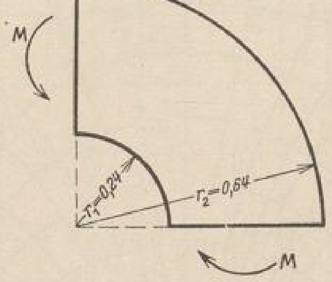

Abb. 755a.

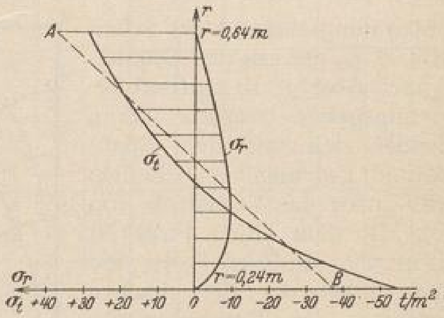

Abb. 755b.

Die Integrationskonstanten lassen sich aus den Bedingungen

$$\sigma_r=-\frac{1}{r_2^2}\left(c_1\varrho^2-2c_2+c_3-2c_3\ln\varrho\right)=0$$

an den Rändern $r=r_1$ und $r=r_2$ und $\mathsf{M}=\int_{r_1}^{r_2}\sigma_t\,r\,dr$ bestimmen. Man erhält mit

$$\left.\begin{aligned} T_1&=r_1^2\left[(\varrho_1^2-1)^2-4\varrho_1^2(\ln\varrho_1)^2\right],\\ c_1=-\frac{\mathsf{M}}{T_1}r_2^2\cdot 4\ln\varrho_1\,,\quad c_2&=\frac{\mathsf{M}}{T_1}r_2^2(1-\varrho_1^2-2\ln\varrho_1)\,,\quad c_3=\frac{\mathsf{M}}{T_1}r_2^2\cdot 2\,(1-\varrho_1^2)\end{aligned}\right\} \tag{1087a}$$

und daraus

$$\sigma_r=\frac{4\mathsf{M}}{T_1}\left(-\ln\frac{\varrho_1}{\varrho}-\varrho_1^2\ln\varrho+\varrho^2\ln\varrho_1\right),\quad \sigma_t=\frac{4\mathsf{M}}{T_1}\left(\varrho_1^2-1-\ln\frac{\varrho_1}{\varrho}-\varrho_1^2\ln\varrho-\varrho^2\ln\varrho_1\right). \tag{1087b}$$

σ_r und σ_t sind Hauptspannungen, die Querschnitte bleiben eben.

Für einen Sektor mit $r_1=0{,}24$ m, $r_2=0{,}64$ m (Abb. 755a) wird $\varrho_1=2{,}6667$ und $T_1=0{,}57492$. Die Auswertung der Ergebnisse (1087b) liefert mit $\mathsf{M}=1$ mt/m die für alle Radialschnitte gleiche Spannungsverteilung der Abb. 755b. Die Gerade AB zeigt den linearen Verlauf von σ_t nach Navier.

Ausgleich einer Querkraft. Die Querkraft Q_a (Abb. 756) steht mit den Schnittkräften N_b, M_b, Q_b im Gleichgewicht $[(Q_a, N_b, M_b, Q_b) \equiv 0]$. Die Spannungsfunktion

$$F = \Phi(r) \cdot \sin\alpha \tag{1088}$$

mit den Spannungskomponenten

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \left(\frac{\Phi'}{r} - \frac{\Phi}{r^2}\right)\sin\alpha, \qquad \sigma_t = \Phi'' \cdot \sin\alpha, \\ \tau_{rt} &= -\left(\frac{\Phi'}{r} - \frac{\Phi}{r^2}\right)\cos\alpha = -\frac{\sigma_r}{\operatorname{tg}\alpha} \end{aligned}\right\} \tag{1089}$$

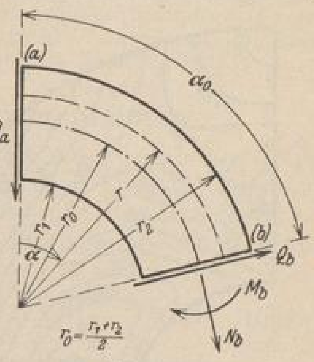

Abb. 756.

liefert am Rande $\alpha = 0$ nur Schubspannungen τ_{rt}. Aus

$$\Delta\Delta F = \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2\Phi}{dr^2} - \frac{\Phi}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dr}\right) \cdot \sin\alpha$$

folgt für $\Phi(r)$ die totale Differentialgleichung

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^2 \Phi = 0. \tag{1090a}$$

Ihre Lösung ist

$$\Phi = c_1 \frac{1}{\varrho^3} + c_2 \frac{\ln\varrho}{\varrho} + c_3 \frac{1}{\varrho} + c_4 \varrho, \tag{1090b}$$

wobei wieder $r_2/r = \varrho$ gesetzt wurde.

Die Integrationskonstanten c_1, c_2, c_4 lassen sich aus den Bedingungen

$$\sigma_r = \left(2c_1 \frac{1}{\varrho} - c_2\varrho - 2c_4\varrho^3\right)\frac{\sin\alpha}{r_2^2} = -\tau_{rt}\operatorname{tg}\alpha = 0$$

an den Rändern $r = r_1$ und $r = r_2$ und aus der Bedingung $\int_{r_1}^{r_2} \tau_{rt}\, dr = Q_a$ am Rande

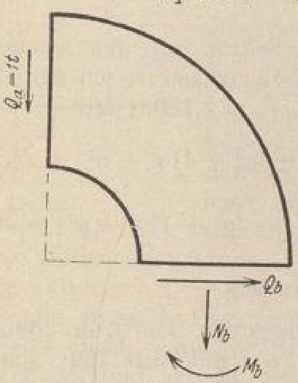

Abb. 757.

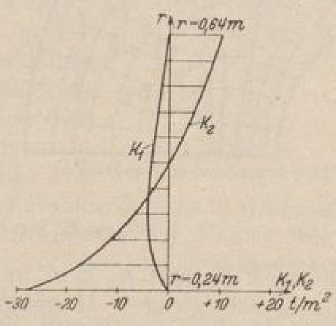

Abb. 758.

$\alpha = 0$ ermitteln. Die Integrationskonstante c_3 ist ohne Einfluß auf die Spannungen und daher beliebig. Mit der Abkürzung

ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} T_2 &= r_2^{-1}\left[(\varrho_1^2 + 1)\ln\varrho_1 - (\varrho_1^2 - 1)\right] \\ c_1 &= \frac{\varrho_1^2}{2}\frac{Q_a}{T_2}, \qquad c_2 = (\varrho_1^2 + 1)\frac{Q_a}{T_2}, \qquad c_4 = -\frac{1}{2}\frac{Q_a}{T_2} \end{aligned}\right\} \tag{1091a}$$