



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

C. Die Schalen

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

C. Die Schalen.

79. Die Grundlagen der Berechnung.

Die Schalen sind einfach oder doppelt gekrümmte Flächentragwerke, deren Dicke h ebenso wie bei den Platten im Vergleich zu den anderen Abmessungen klein ist. Die Halbierungspunkte der Schalenwand bilden die Mittelfläche, die in der Regel durch eine Symmetrieachse ausgezeichnet ist. Winkelrecht dazu liegende Ebenen erzeugen meist geometrisch ähnliche Schnittlinien mit dem Krümmungshalbmesser $r_\alpha(\beta)$.

Die Breitenschnitte der rotationssymmetrischen Flächen sind Kreise mit $r_\alpha(\beta) = r_\alpha$. Ihre Lage und Größe ist durch den Winkel α zwischen der Symmetrieachse und der Flächennormalen und durch den Abschnitt R_α der Flächennormalen zwischen der Mittelfläche und der Symmetrieachse bestimmt. R_α ist der Krümmungshalbmesser eines der beiden Hauptschnitte der Rotationsfläche ($r_\alpha = R_\alpha \sin \alpha$) (Abb. 766).

Die Ebenen mit der Symmetrieachse erzeugen die Meridianschnitte. Sie werden auf einen Nullmeridian bezogen (Winkel β) und sind bei rotationssymmetrischen Flächen einander kongruent. Ihr Krümmungshalbmesser $R_\beta = R_\beta(\alpha)$ bestimmt die zweite Hauptkrümmung der Fläche. Mit $R_\beta = \text{const}$ entsteht die Kreisringschale, mit $R_\beta = R_\alpha = \text{const} = a$ die Kugelschale (Abb. 765a). Der Meridianschnitt des Kegelstumpfes ist eine Gerade mit $R_\beta = \infty$, $\alpha = \text{const}$ und $R_\alpha = y \text{ctg } \alpha$ (Abb. 765b). Durch $\alpha = 90^\circ$ wird die Kegelschale zur Zylinderschale mit senkrechter Achse und $R_\alpha = r_\alpha = \text{const} = a$ (Abb. 765c). Besondere Bedeutung besitzen die Tonnenschalen des Brücken- und Hochbaues. Die Breitenschnitte sind Teile ausgezeichneter Kurven, also nicht rotationssymmetrisch (Abschn. 82).

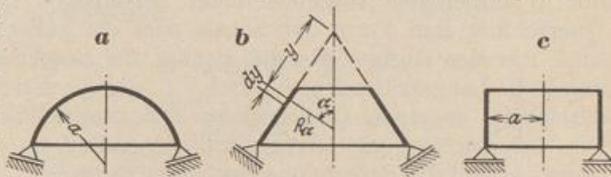


Abb. 765.

Die Schalen dienen als Dächer zum Abschluß von Räumen oder als Behälter zur Stapelung von Füllgut, so daß die elastischen Kräfte des Tragwerks aus dem Eigengewicht und seiner Ausrüstung, aus der Belastung durch Schnee, aus dem Strömungswiderstand der Schale bei Wind und aus den Seitenkräften der Füllung entstehen können. Die Belastung erscheint stets als stetige Funktion der Winkel α und β . Dasselbe gilt von den Stützkraften, so daß der Formänderungs- und Spannungszustand ebenso wie bei der Platte und Scheibe zunächst an einem differentialen Abschnitt betrachtet werden kann. Dabei wird die vorgeschriebene Belastung \hat{p} nach drei ausgezeichneten Richtungen, der Schalennormale z , der Meridiantangente y , der Tangente an den Breitenkreis x zerlegt ($dy = R_\beta d\alpha$, $dx = r_\alpha d\beta$, $\hat{p} = \hat{p}_x \hat{+} \hat{p}_y \hat{+} \hat{p}_z$).

Die allgemeinen Beziehungen der Elastizitätstheorie lassen sich auch hier zur Berechnung des Spannungs- und Verschiebungszustandes vereinfachen. Die Wanddicke $h = h(\alpha)$ ist im Vergleich zum Krümmungshalbmesser R_α , R_β der Hauptschnitte stets klein, so daß die Normalspannungen σ_z verglichen mit den Normalspannungen σ_α , σ_β stets kleine Größen zweiter Ordnung sind und daher ebenso wie in der Plattenstatik (S. 644) vernachlässigt werden. Aus demselben Grunde werden die Punkte einer Normalen zur Mittelfläche auch nach der Formänderung auf einer Normalen zur verzerrten Mittelfläche liegen, so daß die Dehnungen $\varepsilon_\alpha(z)$, $\varepsilon_\beta(z)$, $\gamma_{\alpha\beta}(z)$ eines durch Hauptschnitte begrenzten Schalenteils annähernd

lineare Funktionen von z sind, in welche die Dehnung $\varepsilon_{0\alpha}, \varepsilon_{0\beta}$ und die Krümmungsänderung $d\psi_\alpha/dy, d\psi_\beta/dx$ der Mittelfläche als Konstante eingehen.

$$\sigma_z = 0, \quad \varepsilon_\alpha = \varepsilon_{0\alpha} + z d\psi_\alpha/dy, \quad \varepsilon_\beta = \varepsilon_{0\beta} + z d\psi_\beta/dx.$$

Daher lassen sich auch die Spannungen $\sigma_\alpha, \sigma_\beta$ ebenso wie beim Stabe an einem Schnitte $\alpha = \text{const}$ von der Breite „1“ zur Längskraft N_α in t/m und zum Biegemoment M_α in mt/m, an einem Schnitte $\beta = \text{const}$ von der Breite „1“ zur Längskraft N_β in t/m und zum Biegemoment M_β in mt/m zusammenfassen. Die Schubspannungen $\tau_{\alpha z}, \tau_{\beta z}$ bilden die Querkräfte $Q_{\alpha z}, Q_{\beta z}$, die Schubspannungen $\tau_{\alpha\beta}, \tau_{\beta\alpha}$ im allgemeinen Schubkräfte $N_{\alpha\beta}, N_{\beta\alpha}$ und Drillungsmomente $M_{\alpha\beta}, M_{\beta\alpha}$. Schnittkräfte und Belastung des differentialen Flächenteils sind durch die Gleichgewichtsbedingungen, die Komponenten des Verzerrungszustandes, Dehnung, Krümmung und Verwindung sind mit den Komponenten u, v, w des Verschiebungszustandes der Schale durch geometrische Bedingungen verknüpft, während das Hookesche Gesetz Beziehungen zwischen den Schnittkräften und den Komponenten des Verzerrungszustandes* herstellt. Dabei entstehen ebenso viele Gleichungen als unbekannte Größen eingehen.

Im Bauwesen begnügt man sich allerdings in der Regel mit Näherungslösungen, um ohne allzu großen Aufwand an Rechnung zu Zahlenergebnissen zu gelangen, welche den Spannungs- und Verschiebungszustand qualitativ richtig wiedergeben. Man benützt daher den Umstand, daß die Krümmungsänderung der Mittelfläche ($d\psi_\alpha/dy, d\psi_\beta/dx, d\psi_{\alpha\beta}/dy, d\psi_{\beta\alpha}/dx$) und damit Biege- und Drillungsmomente nur in denjenigen Abschnitten der Mittelfläche Bedeutung besitzen, in welchen Querschnitt und Form der Schale oder die äußeren Kräfte in α und β un stetig sind. Für den übrigen Bereich genügt die Beschreibung des Spannungszustandes durch die Längskräfte N_α, N_β und $N_{\alpha\beta}$, die aus den drei Gleichgewichtsbedingungen der Kräfte an einem differentialen Schalenabschnitt 1 berechnet werden können. Die Untersuchung gilt streng für die unendlich dünne Schale ohne Biegezugwiderstand, so daß die Berechnung der Schnittkräfte $N_\alpha, N_\beta, N_{\alpha\beta}$ allein aus den Gleichgewichtsbedingungen auch als Membrantheorie der Schale bezeichnet wird. Die Ergebnisse sind in allen den Fällen brauchbar, bei welchen die vorgeschriebenen Randbedingungen an der Schalenbegrenzung durch die Längskräfte erfüllt werden. Die Biegespannungen sind in diesem Falle Nebenspannungen.

Um diesen Spannungszustand in einfacher Weise durch zwei sich rechtwinklig schneidende Komponenten zu beschreiben, werden an Stelle der geometrisch ausgezeichneten Schnitte $\alpha = \text{const}, \beta = \text{const}$ nach (40) in jedem Punkte die Richtungen 1, 2 der Hauptlängskräfte N_1, N_2 bestimmt, für welche $N_{12} = 0$ ist. Sie bilden die Trajektorien des Spannungszustandes.

Alle Festigkeitsuntersuchungen gelten unter der Voraussetzung der Stabilität des Verschiebungszustandes. Diese Bemerkung hat gerade für die Schalentheorie mit Rücksicht auf die außergewöhnlich kleine Wandstärke besondere Bedeutung.

Meißner, E.: Das Elastizitätsproblem für dünne Schalen von Ringflächen, Kugel- oder Kegelform. Physik. Z. 1913 S. 343. — Derselbe: Über Elastizität und Festigkeit dünner Schalen. Vjschr. Naturforsch. Ges. Zürich 1915. — Geckeler, J. W.: Elastostatik. Handbuch der Physik. Bd. VI: Mechanik der elastischen Körper S. 231. Berlin 1928. — Föppl, A. u. L.: Drang und Zwang. Bd. II, 2. Aufl. — Flügge, W.: Die Stabilität der Kreiszyinderschale. Ing.-Arch. 1932 S. 463.

80. Membrantheorie für Rotationsschalen mit stetiger Belastung $p(\alpha, \beta)$.

Der differentiale Abschnitt Abb. 766 ist geometrisch durch die Winkel α, β und durch die Krümmung $1/R_\alpha, 1/R_\beta$ der Hauptschnitte der Mittelfläche bestimmt.

$$dF = ds_\alpha \cdot ds_\beta = r_\alpha d\beta \cdot R_\beta d\alpha, \quad r_\alpha = R_\alpha \sin \alpha. \quad (1093)$$

Die Belastung $p(\alpha, \beta) = p_x \hat{+} p_y \hat{+} p_z$ steht mit den Schnittkräften

$$(N_\alpha, N_{\alpha\beta}), \quad (N_\beta, N_{\beta\alpha}), \quad \left(N_\alpha + \frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} d\alpha, N_{\alpha\beta} + \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} d\alpha \right), \\ \left(N_\beta + \frac{\partial N_\beta}{\partial \beta} d\beta, N_{\beta\alpha} + \frac{\partial N_{\beta\alpha}}{\partial \beta} d\beta \right)$$

im Gleichgewicht. Aus der virtuellen Drehung des Abschnitts um die z -Achse folgt, abgesehen von kleinen Größen zweiter Ordnung, $N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha}$. Die virtuelle Verschiebung des Abschnitts nach einer der drei ausgezeichneten Richtungen x, y, z liefert die Gleichgewichtsbedingungen:

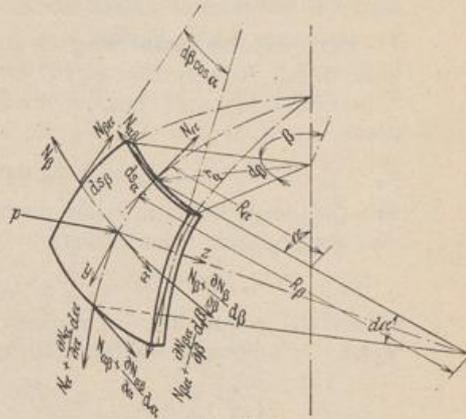


Abb. 766.

$$\begin{aligned} \text{a) } & \frac{\partial N_\beta}{\partial \beta} d\beta \cdot R_\beta d\alpha + N_{\alpha\beta} \cdot R_\beta d\alpha \cdot d\beta \cdot \cos \alpha \\ & + \frac{\partial}{\partial \alpha} (N_{\alpha\beta} \cdot r_\alpha d\beta) d\alpha + p_x \cdot r_\alpha d\beta \cdot R_\beta d\alpha = 0, \\ \text{b) } & \frac{\partial}{\partial \alpha} (N_\alpha \cdot r_\alpha d\beta) d\alpha - N_\beta \cdot R_\beta d\alpha \cdot d\beta \cdot \cos \alpha \\ & + \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \beta} d\beta R_\beta d\alpha + p_y \cdot r_\alpha d\beta \cdot R_\beta d\alpha = 0, \\ \text{c) } & N_\alpha \cdot r_\alpha d\beta \cdot d\alpha + N_\beta \cdot R_\beta d\alpha \cdot d\beta \cdot \sin \alpha \\ & + p_z \cdot r_\alpha d\beta \cdot R_\beta d\alpha = 0. \end{aligned}$$

Sie lassen sich folgendermaßen vereinfachen:

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } & \frac{\partial N_\beta}{\partial \beta} R_\beta + N_{\alpha\beta} R_\beta \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha} (N_{\alpha\beta} r_\alpha) + p_x r_\alpha R_\beta = 0, \\ \text{b) } & \frac{\partial}{\partial \alpha} (N_\alpha r_\alpha) - N_\beta R_\beta \cos \alpha + \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \beta} R_\beta + p_y r_\alpha R_\beta = 0, \\ \text{c) } & \frac{N_\alpha}{R_\beta} + \frac{N_\beta}{R_\alpha} + p_z = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1094)$$

Rotationssymmetrische Belastung. Die Belastung p_x, p_y, p_z und die Funktionen der unbekanntenen Stütz- und Schnittkräfte $N_\alpha, N_\beta, N_{\alpha\beta}$ sind vom Breitenwinkel β unabhängig, ihre Ableitungen nach β also Null, so daß die Gleichgewichtsbedingungen (1094) totale Differentialgleichungen werden.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} (N_{\alpha\beta} r_\alpha) + N_{\alpha\beta} R_\beta \cos \alpha + p_x r_\alpha R_\beta &= 0, \\ \frac{d}{d\alpha} (N_\alpha r_\alpha) - N_\beta R_\beta \cos \alpha + p_y r_\alpha R_\beta &= 0, \\ \frac{N_\alpha}{R_\beta} + \frac{N_\beta}{R_\alpha} + p_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1095)$$

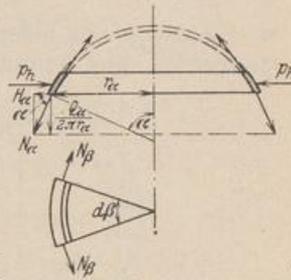


Abb. 767.

Für $p_x = 0$ ist die Schubkraft $N_{\alpha\beta}$ Null und die Schnittkraft N_α nach Elimination der Schnittkraft N_β mit der vorgeschriebenen Belastung in ähnlicher Weise wie die Schnittkräfte des Stabes (S. 27) durch eine Differentialgleichung verknüpft. Ihre Lösung läßt sich aber auch ebenso wie dort aus dem Gleichgewicht der Kräfte an einem Abschnitt des Flächentragwerks ableiten. Hierzu dient entweder der Schalenteil über einem Breitenkreis α (Belastung Q_α) oder der Ring zwischen zwei benachbarten Breitenschnitten (Abb. 767).

$$\left. \begin{aligned} Q_\alpha + 2\pi r_\alpha N_\alpha \sin \alpha = 0, \quad N_\alpha = -\frac{Q_\alpha}{2\pi r_\alpha \sin \alpha} = -\frac{Q_\alpha}{2\pi R_\alpha \sin^2 \alpha}, \\ N_\beta R_\beta d\alpha - d(r_\alpha N_\alpha \cos \alpha) + p_h r_\alpha R_\beta d\alpha = 0, \quad N_\beta = \frac{d}{R_\beta d\alpha} (r_\alpha N_\alpha \cos \alpha) - p_h r_\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (1096)$$

Der zweite Summand der rechten Seite ist bei senkrechter Belastung (Eigengewicht, Schneebelastung) Null, so daß mit $r_\alpha N_\alpha \cos \alpha = -Q_\alpha \operatorname{ctg} \alpha / 2\pi$

$$N_\beta = -\frac{1}{2\pi} \frac{d(Q_\alpha \operatorname{ctg} \alpha)}{R_\beta d\alpha}. \tag{1097}$$

Die Meridianspannungen sind also negativ, während die Ringspannungen mit $d(Q_\alpha \operatorname{ctg} \alpha) / R_\beta d\alpha = 0$ das Vorzeichen wechseln. Die Spannungen aus Eigengewicht sind bei konstanter Schalendicke von dieser unabhängig.

Periodische Belastung in β . Die Belastung kann durch Wind hervorgerufen oder durch Randbedingungen vorgeschrieben werden. Sie läßt sich stets als trigonometrische, nach ganzen Vielfachen von β fortschreitende Reihe entwickeln, deren Koeffizienten X_n, Y_n, Z_n allein Funktionen von α sind.

$$p_x = \sum X_n \sin n\beta, \quad p_y = \sum Y_n \cos n\beta, \quad p_z = \sum Z_n \cos n\beta, \quad n = 0, 1, \dots, \infty. \tag{1098}$$

Die partiellen Differentialgleichungen (1094) für das Gleichgewicht der Kräfte werden dann durch einen Ansatz

$$N_\alpha = \sum N_{\alpha n} \cos n\beta, \quad N_\beta = \sum N_{\beta n} \cos n\beta, \quad N_{\alpha\beta} = \sum N_{\alpha\beta n} \sin n\beta \tag{1099}$$

befriedigt, wenn die von α allein abhängigen Funktionen $N_{\alpha n}, N_{\beta n}, N_{\alpha\beta n}$ gliedweise die folgenden Differentialgleichungen erfüllen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} (r_\alpha N_{\alpha\beta n}) - n R_\beta N_{\beta n} + R_\beta N_{\alpha\beta n} \cos \alpha + X_n r_\alpha R_\beta &= 0, \\ \frac{d}{d\alpha} (r_\alpha N_{\alpha n}) + n R_\beta N_{\alpha\beta n} - R_\beta N_{\beta n} \cos \alpha + Y_n r_\alpha R_\beta &= 0, \\ \frac{N_{\alpha n}}{R_\beta} + \frac{N_{\beta n}}{R_\alpha} + Z_n &= 0. \end{aligned} \right\} \tag{1100}$$

Wird $N_{\beta n}$ eliminiert, so entstehen zwei simultane totale Differentialgleichungen für $N_{\alpha n}$ und $N_{\alpha\beta n}$.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} (r_\alpha N_{\alpha\beta n}) + R_\beta N_{\alpha\beta n} \cos \alpha + n R_\alpha N_{\alpha n} &= -X_n r_\alpha R_\beta - n Z_n R_\alpha R_\beta, \\ \frac{d}{d\alpha} (r_\alpha N_{\alpha n}) + R_\alpha N_{\alpha n} \cos \alpha + n R_\beta N_{\alpha\beta n} &= -Y_n r_\alpha R_\beta - Z_n R_\alpha R_\beta \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \tag{1101}$$

$n = 0$ und $n = 1$ liefern die Grundschwingungen einer zum Meridian $\beta = 0$ symmetrischen oder antisymmetrischen Belastung.

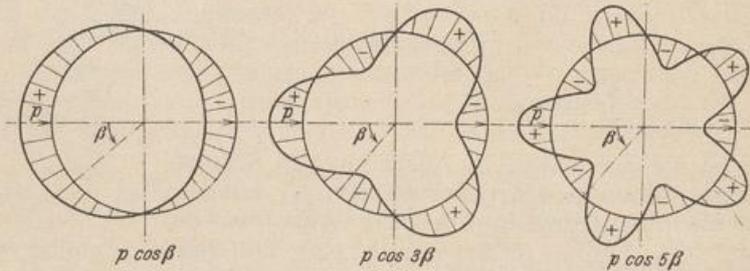


Abb. 768. Periodische Belastung $p \cos n\beta$.

Sonderfall $p_x = 0, p_y = 0, p_z = \sum Z_n(\alpha) \cos n\beta$ (Windbelastung). Die Kräfte besitzen die Periode $2\pi/n$ und bilden bei einer geraden Zahl n eine symmetrische, bei einem ungeraden n eine antisymmetrische Kräftegruppe. Ihr Moment in bezug auf die Drehachse ist Null. Die Gleichgewichtsbedingungen (1100) werden durch die Schnittkräfte $N_\alpha = \sum N_{\alpha n} \cos n\beta, N_\beta = \sum N_{\beta n} \cos n\beta$ erfüllt, die in den Meridianschnitten $\beta = 0$ und ganzzahligen Vielfachen von π/n , also $\beta = \lambda\pi/n$ Grenzwerte

$N_{\alpha n}, N_{\beta n}$ annehmen, dagegen in Meridianschnitten $\beta = \pi/2n + \lambda\pi/n$ Null sind. Hier werden die Schubkräfte $N_{\alpha\beta} = \sum N_{\alpha\beta n} \sin n\beta$ zu Grenzwerten $N_{\alpha\beta n}$. Die Grenzwerte $N_{\alpha n}, N_{\beta n}, N_{\alpha\beta n}$ sind durch die Gleichgewichtsbedingungen der äußeren Kräfte bestimmt, die an dem durch einen Breitenschnitt und zwei Nullmeridianen begrenzten Schalensektor angreifen.

Der Verschiebungszustand. Die Formänderung der Membranschalen ist durch die Verschiebung der Punkte der Mittelfläche bestimmt. Diese wird nach drei ausgezeichneten Achsen x, y, z in die Komponenten u, v, w zerlegt. Sie lassen sich aus den bezogenen Längen- und Winkeländerungen $\epsilon_x = \epsilon_\beta, \epsilon_y = \epsilon_\alpha, \gamma_{xy} = \gamma_{\alpha\beta}$ eines differentialen Flächenabschnitts berechnen. Die Dehnung ϵ_z ist auf Grund der Annahmen Null (Abb. 769).

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_\alpha &= \frac{1}{R_\beta d\alpha} \left[(R_\beta - w) d\alpha + \frac{\partial v}{R_\beta \partial \alpha} R_\beta d\alpha - R_\beta d\alpha \right] = \frac{\partial v}{R_\beta \partial \alpha} - \frac{w}{R_\beta} = \frac{v' - w}{R_\beta}, \\ \epsilon_\beta &= \frac{1}{r_\alpha d\beta} \left[(r_\alpha - w \sin \alpha + v \cos \alpha) d\beta + \frac{\partial u}{\partial \beta} d\beta - r_\alpha d\beta \right] = \frac{v \operatorname{ctg} \alpha - w}{R_\alpha} + \frac{1}{R_\alpha \sin \alpha} \frac{\partial u}{\partial \beta}. \end{aligned} \right\} \quad (1102)$$

Bei rotationssymmetrischer Belastung ist $\partial u / \partial \beta = 0$ und nach Elimination von w

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - v \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{\sin \alpha} \right) = \frac{1}{\sin \alpha} (R_\beta \epsilon_\alpha - R_\alpha \epsilon_\beta), \\ v &= \sin \alpha \left[\int \frac{R_\beta \epsilon_\alpha - R_\alpha \epsilon_\beta}{\sin \alpha} d\alpha + C_1 \right], \\ w &= v \operatorname{ctg} \alpha - R_\alpha \epsilon_\beta. \end{aligned} \right\} \quad (1103)$$

Die Winkeländerung des Flächenabschnitts ist nach (911)

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{\partial u}{R_\beta \partial \alpha} + \frac{\partial v}{r_\alpha \partial \beta} - \frac{u}{r_\alpha} \cos \alpha,$$

so daß mit v und $\gamma_{\alpha\beta}$ auch die Verschiebung u berechnet werden kann. Die Komponenten $\epsilon_\alpha, \epsilon_\beta, \gamma_{\alpha\beta}$ der Flächenverzerrung sind mit den Schnittkräften nach (913) durch das Hookesche Gesetz verknüpft.

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_\alpha &= \frac{1}{Eh} (N_\alpha - \mu N_\beta), & \epsilon_\beta &= \frac{1}{Eh} (N_\beta - \mu N_\alpha), & \gamma_{\alpha\beta} &= \frac{2(1+\mu)}{Eh} N_{\alpha\beta}, \\ N_\alpha &= \frac{hE}{1-\mu^2} (\epsilon_\alpha + \mu \epsilon_\beta), & N_\beta &= \frac{hE}{1-\mu^2} (\epsilon_\beta + \mu \epsilon_\alpha), & N_{\alpha\beta} &= \frac{hE}{2(1+\mu)} \gamma_{\alpha\beta}. \end{aligned} \right\} \quad (1104)$$

Die Krümmungsänderung in den Hauptschnitten wird mit

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R_\beta} &= \frac{d\alpha}{ds_\beta}, & \frac{1}{R_\alpha} &= \frac{\sin \alpha}{r_\alpha}, \\ \kappa_\alpha &= d \left(\frac{1}{R_\beta} \right) = \frac{d\alpha + \delta(d\alpha) - d\alpha}{ds_\beta} = \frac{\delta(d\alpha)}{ds_\beta} = \frac{d(\delta\alpha)}{ds_\beta} = \frac{d\vartheta}{R_\beta d\alpha}, \\ \kappa_\beta &= d \left(\frac{1}{R_\alpha} \right) = \frac{\sin(\alpha + \delta\alpha) - \sin \alpha}{r_\alpha} = \frac{\delta\alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha}{R_\alpha} = \frac{\vartheta \operatorname{ctg} \alpha}{R_\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (1105)$$

In der Regel begnügt man sich mit der Beschreibung des rotationssymmetrischen Verschiebungszustandes durch die Vergrößerung Δr_α des Breitenkreises und durch die Verdrehung ϑ der Tangente an die elastische Linie des Meridians.

$$\left. \begin{aligned} \Delta r_\alpha &= r_\alpha \epsilon_\beta = \frac{r_\alpha}{Eh} (N_\beta - \mu N_\alpha), \\ \vartheta &= \frac{v}{R_\beta} + \frac{\partial w}{R_\beta \partial \alpha} = \frac{1}{R_\beta} \left[(R_\beta \epsilon_\alpha - R_\alpha \epsilon_\beta) \operatorname{ctg} \alpha - \frac{\partial (R_\alpha \epsilon_\beta)}{\partial \alpha} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (1106)$$

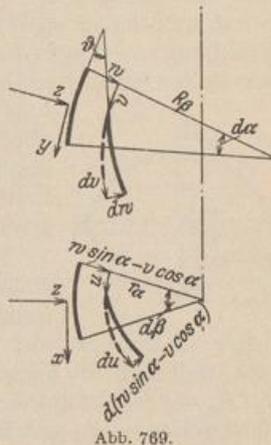


Abb. 769.

Die Randbedingungen. Die Berechnung der Schalen nach der Membrantheorie verlangt neben der stetigen Eintragung der Belastung die stetige Änderung der Wandstärke und die stetige Krümmung der Mittelfläche. Um die Verbiegung dieser Schalen auszuschließen und den Spannungszustand abgesehen von Nebenspannungen allein durch die Längskräfte N_α , N_β und durch die Schubkräfte $N_{\alpha\beta}$, also statisch bestimmt beschreiben zu können, müssen zunächst die statischen Randbedingungen durch die Eintragung der äußeren Kräfte am Schalenrande erfüllt werden. Hierzu dienen Ringträger, um Einzelkräfte am Schalenrande gleichförmig zu verteilen und die stetige Randbelastung der Mittelfläche in Richtung der Meridiantangente zuzuführen. Daher besitzen in der Regel die geschlossenen Schalen einen Fußring, die offenen Schalen Kopf- und Fußring, die je nach ihrer Lage zum Flächentragwerk auf Zug oder Druck beansprucht werden (Abb. 770). Dabei bleibt der Membranspannungszustand der Schale nur erhalten, wenn die Dehnung der Ringträger mit der Dehnung der Schalenränder übereinstimmt. Die Begrenzung der Schale durch Ringträger ist bei stetiger Abstützung nur dann unnötig, wenn die Hauptschnitte der Ränder mit der Drehachse rechte Winkel einschließen ($\alpha_1 = 90^\circ$, $\alpha_2 = 90^\circ$), also die Endtangente der Meridianschnitte senkrecht sind. Um die Dehnung der Schalenränder in allen anderen Fällen mit der Längenänderung der Ringträger in Einklang zu bringen und Biegungsspannungen in der Nähe des Schalenrandes zu vermeiden, kann nach einem von F. Dischinger ausgesprochenen und der Dyckerhoff & Widmann A.-G. patentierten Gedanken die Krümmung der Meridiankurve durch einen Übergangsbogen zum Ringträger derart verändert werden, daß die Randbedingungen zwischen Schalenrand und Ringträger ganz oder teilweise erfüllt sind (Abschn. 80d).

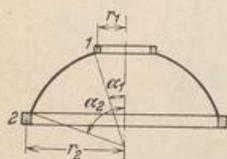


Abb. 770.

Neben den statischen Randbedingungen müssen auch die geometrischen Randbedingungen des statisch bestimmten Spannungszustandes befriedigt werden. Das Flächentragwerk muß daher so gelagert, der Überbau derart auf dem Kopfring der Schale abgestützt sein, daß sich die Verschiebungen Δr_1 , Δr_2 der Endpunkte und die Verdrehungen ϑ_1 , ϑ_2 der Endtangente der Meridiankurve zwanglos einstellen können. Nur auf diese Weise lassen sich Biegungsspannungen in der Nachbarschaft der Schalenränder vermeiden. Die äußeren Kräfte können auch aus diesem Grunde an den Schalenrändern nur in Richtung der Tangenten an die Hauptschnitte der Mittelfläche eingetragen werden.

Die Belastung der Rotationsschalen. Bisher sind unter den allgemeinen Belastungsfällen nur die rotationssymmetrische Belastung und die von β periodisch abhängige Belastung hervorgehoben worden, für welche sich die Gleichgewichtsbedingungen (1094) integrieren lassen. In physikalischer Beziehung wird das Eigengewicht der Schale $p_x = 0$, $p_y = g \sin \alpha$, $p_z = g \cos \alpha$, die Schneelast $p_x = 0$, $p_y = p_s \sin \alpha \cos \alpha$, $p_z = p_s \cos^2 \alpha$ und der Seitendruck von Flüssigkeiten $p_x = 0$, $p_y = 0$, $p_z = \gamma f$ unterschieden. Außerdem kann noch der Seitendruck und die Reibungskraft des Füllgutes nach den Ansätzen in Abschn. 6 zur Wirkung kommen. Durch die Verwendung der Schalen zur Überdachung von Räumen gewinnt auch der Strömungswiderstand \mathfrak{B} des Windes an gekrümmten Oberflächen als äußere Ursache innerer Kräfte Bedeutung (1). Er wird in Übereinstimmung mit den baupolizeilichen Bestimmungen für die statische Untersuchung von ebenen Dachflächen in der Regel nach der Newtonschen Widerstandstheorie festgesetzt, ohne auf die Form der Schale, auf die Rauigkeit ihrer Oberfläche oder auf die Turbulenz der Strömung Rücksicht zu nehmen und entweder nach

$$p_x = 0, \quad p_y = 0, \quad p_z = p_w \sin^2 \alpha \cos^2 \beta \quad (1107)$$

oder in Anlehnung an Versuche von M. v. Löbl nach

$$p_x = 0, \quad p_y = 0, \quad p_z = p_w \sin \alpha \cos \beta, \quad (1108)$$

allein auf den angeströmten Teil der Oberfläche verteilt. Wenn auch nach der gegenwärtigen physikalischen Erkenntnis an der Oberfläche der Schale ein vollständig andersgeartetes Kraftfeld entsteht, so begnügt man sich doch mit diesen einfachen Ansätzen, solange die Spannungen aus Wind nur einen geringen Bruchteil

der zulässigen Beanspruchung des Baustoffes ausmachen. Dies gilt zunächst erfahrungsgemäß allein für die ebenen und räumlichen Stabwerke des Brücken- und Hochbaues, während die Spannungen in Schalen wesentlich von der Druckintensität p_w und von der Verteilung $p_z(\alpha, \beta)$ des Strömungswiderstandes abhängen. Diese muß, falls einfache Ansätze vorgeschrieben werden sollen, nach S. 748 im Bereiche der Schalenoberfläche stetig sein, auf Grund von Beobachtungen antimetrischen Charakter erhalten und mit dem Staudruck p_w der Ansätze (1107) oder (1108) angenommen werden. Die Integration liefert ebenfalls einen Strömungswiderstand des Baukörpers, der aber nicht mit den Versuchsergebnissen an ähnlichen Körpern im Windkanal oder mit dem Strömungswiderstand nach (1107) oder (1108) verglichen werden kann.

Die Bedingungen für $p_z(\alpha, \beta)$ werden am einfachsten durch die Gleichungen (1108) mit $0 \leq \beta \leq 360^\circ$ erfüllt. Um eine in β quadratische Druckverteilung im Sinne der baupolizeilichen Vorschriften als stetige antimetrische Funktion zu verwenden, wird der Ansatz (1107) für $0 \leq \beta \leq 90^\circ$ mit $+\cos^2\beta$, für $90^\circ \leq \beta \leq 180^\circ$ mit $-\cos^2\beta$ als Fouriersche Reihe entwickelt.

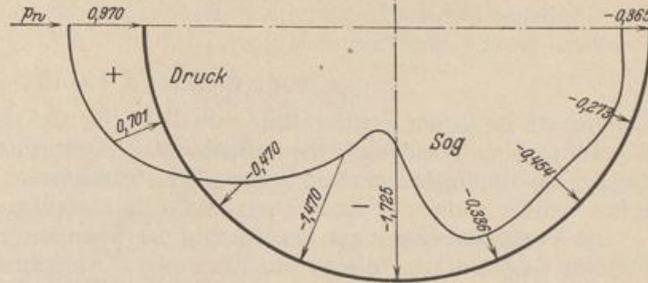


Abb. 771. Druckverteilung an einem Gasometermodell bei $v = 35$ m/sec Windgeschwindigkeit, bezogen auf den Staudruck $p_w = 1$ t/m².

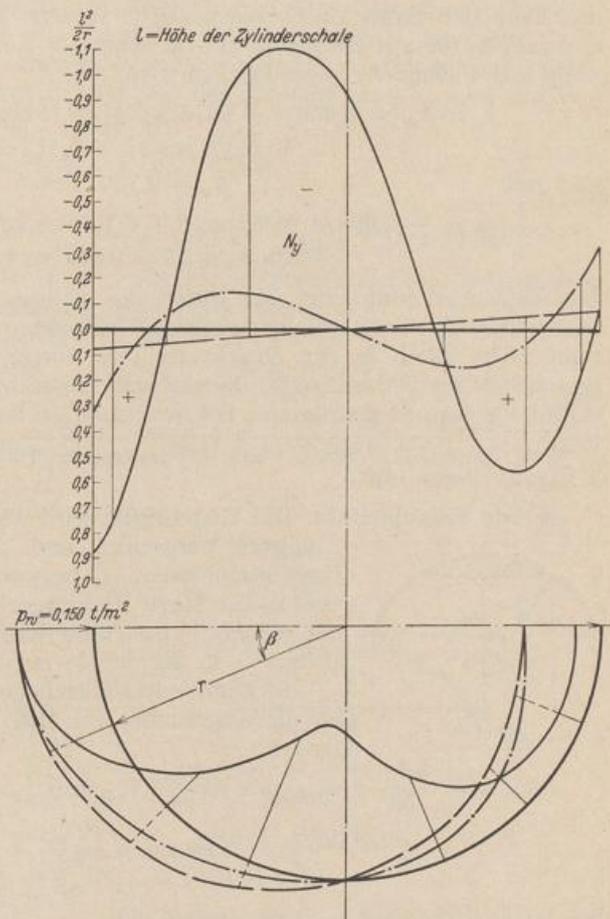


Abb. 772. Windgesetz und Meridianschnittkraft für eine Zylinderschale (l, r).
 — Windgesetz (1111) nach den Göttinger Versuchen.
 - - - Quadratisches Windgesetz (1109).
 - - - Antimetrisches Windgesetz (1108). »

$$p_z = p_w \sin^2 \alpha \cos^2 \beta = p_w \sin^2 \alpha (0,8493 \cos \beta + 0,1699 \cos 3\beta - 0,0243 \cos 5\beta + 0,0081 \cos 7\beta - 0,0037 \cos 9\beta \pm \dots). \quad (1109)$$

Ein ähnliches Ergebnis wird von F. Dischinger auf andere Weise erzielt. Es besteht aus zwei Gliedern und lautet

$$p_z = p_w \sin^2 \alpha (0,85 \cos \beta + 0,15 \cos 3\beta). \quad (1110)$$

Der Ansatz ist in der Reihe (1109) enthalten, die also die Spannungen aus einem in β quadratischen Windgesetz namentlich mit Rücksicht auf die schlechte Konvergenz der zur Spannungsberechnung notwendigen abgeleiteten Funktionen besser wiedergeben würde, wenn der Ansatz physikalische Bedeutung hätte.

Die Voraussetzungen zur Berechnung der Spannungen in kreisrunden Zylindern sind im Gegensatz zu diesen unzuverlässigen Annahmen durch die Versuche der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen beim Anströmen von Gasometermodellen wesentlich verbessert worden. Die Abb. 771 zeigt das Ergebnis der Druckmessung im Bereiche eines mittleren Breitenschnittes. Die Schaulinie ist periodisch und läßt sich daher durch harmonische Analyse in eine trigonometrische Reihe entwickeln, die mit Rücksicht auf die schlechte Konvergenz der Spannungsberechnung mit 6 Gliedern angeschrieben wird.

$$\left. \begin{aligned} p_z &= p_w (-0,655 + 0,280 \cos \beta + 1,115 \cos 2\beta \\ &\quad + 0,400 \cos 3\beta - 0,113 \cos 4\beta - 0,027 \cos 5\beta) \\ \text{und mit} \quad p_w &= 0,150 \text{ t/m}^2, \\ p_z &= -0,098 + 0,042 \cos \beta + 0,167 \cos 2\beta \\ &\quad + 0,060 \cos 3\beta - 0,017 \cos 4\beta - 0,004 \cos 5\beta. \end{aligned} \right\} (1111)$$

Die Zahlenrechnung läßt sich durch die gemessene Druckverteilung (Abb. 771) nachprüfen. Ein Vergleich der einzelnen Windgesetze für den Kreiszyylinder (Abb. 772) zeigt nicht allein in der Druckverteilung, sondern auch im Spannungszustand grundsätzliche Unterschiede, die auf die Brauchbarkeit der Ansätze (1107) und (1108) für doppelt gekrümmte Schalen schließen lassen.

Dischinger, F.: Schalen- und Rippenkuppeln. Handbuch für Eisenbetonbau. Bd. VI, 2. Kapitel. Berlin 1930.

a) Die Kugelschale. Die Kugelschale wird als geschlossenes oder als offenes Tragwerk verwendet und dabei durch einen oder zwei Breitenschnitte α_1, α_2 begrenzt (Abb. 773). An den Rändern sind in der Regel Ringträger vorhanden, da hier nach S. 748 nur tangential gerichtete Kräfte ohne Störung des Membranzustandes in die Schale eingetragen werden.

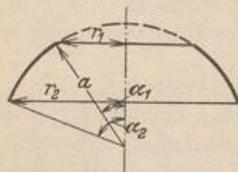


Abb. 773.

Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen (1094) lauten für die Kugelschale mit $R_\alpha = R_\beta = a, r_\alpha = a \sin \alpha$ folgendermaßen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_\beta}{\partial \beta} + N_{\alpha\beta} \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha} (N_{\alpha\beta} \sin \alpha) + p_x a \sin \alpha &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} (N_\alpha \sin \alpha) - N_\beta \cos \alpha + \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \beta} + p_y a \sin \alpha &= 0, \\ N_\alpha + N_\beta + a p_z &= 0. \end{aligned} \right\} (1112)$$

Sie lassen sich mathematisch vereinfachen.

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial N_\beta}{\partial \beta} + 2 N_{\alpha\beta} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} + a p_x &= 0, \\ \frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} + (N_\alpha - N_\beta) \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \beta} + a p_y &= 0, \\ N_\alpha + N_\beta + a p_z &= 0. \end{aligned} \right\} (1113)$$

Bei rotationssymmetrischer Belastung sind die Ableitungen nach β Null. Das Gleichgewicht der inneren und äußeren Kräfte wird dann durch drei simultane totale Differentialgleichungen beschrieben. Aus diesen folgt, daß

$$\left. \begin{aligned} N_{\alpha\beta} &= -\frac{a}{\sin^2 \alpha} \int \dot{p}_x \sin^2 \alpha \, d\alpha + C_1, & N_\beta &= -N_\alpha - \dot{p}_z a, \\ N_\alpha &= -\frac{a}{\sin^2 \alpha} \int (\dot{p}_v + \dot{p}_z \operatorname{ctg} \alpha) \sin^2 \alpha \, d\alpha + C_2. \end{aligned} \right\} \quad (1114)$$

Bedingung für C_2 bei geschlossener Kugelschale:

$$\alpha = 0: \quad N_\alpha = N_\beta, \quad (1115)$$

Bedingung für C_2 bei offener Kugelschale:

$$\alpha = \alpha_1: \quad N_\alpha = 0 \quad (1116)$$

oder einem vorgeschriebenen Betrage.

Ist $\dot{p}_x = 0$, so wird $N_{\alpha\beta} = 0$.

Die Gleichung (b) in (1094) kann bei rotationssymmetrischer Belastung durch die Bedingung für das Gleichgewicht aller senkrechten Kräfte oberhalb eines Breitenkreises α ersetzt werden (S. 745). Sie liefert N_α . Damit ist auch N_β bestimmt.

Zur Beschreibung des Verschiebungszustandes genügt bei rotationssymmetrischer Belastung nach S. 747 die Vergrößerung Δr_α des Breitenkreises r_α und die Verdrehung ϑ der Meridiantangente.

$$\left. \begin{aligned} \Delta r_\alpha &= -\frac{r_\alpha}{Eh} (\dot{p}_z a + N_\alpha (1 + \mu)), \\ \vartheta &= \frac{1}{Eh} \left[(N_\alpha - N_\beta) (1 + \mu) \operatorname{ctg} \alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha} (\mu N_\alpha - N_\beta) \right] = \frac{a}{Eh} [\dot{p}'_z - (1 + \mu) \dot{p}_v] \end{aligned} \right\} \quad (1117)$$

Die offene Kugelschale mit rotationssymmetrischer Belastung.

Für $\alpha = \alpha_1$ ist N_α Null oder ein vorgeschriebener Betrag $N_{\alpha,1}$.

Schnittkräfte für Eigengewicht g der Schale (Abb. 774).

$$\left. \begin{aligned} N_\alpha &= -a g \frac{\cos \alpha_1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}, & N_\beta &= a g \left(\frac{\cos \alpha_1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - \cos \alpha \right), \\ \Delta r_\alpha &= \frac{a^2 g}{Eh} \sin \alpha \left[\frac{\cos \alpha_1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} (1 + \mu) - \cos \alpha \right], \\ \vartheta &= -\frac{a g}{Eh} (2 + \mu) \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (1118)$$

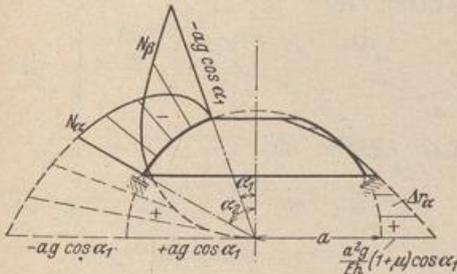


Abb. 774. Schaulinien für Eigengewicht.

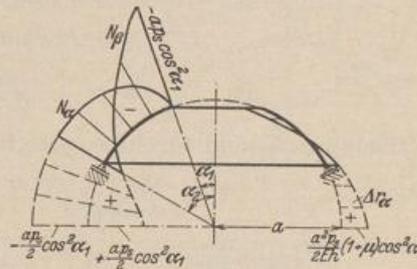


Abb. 775. Schaulinien für Schneelast.

Schnittkräfte für Schneebelastung $\dot{p}_s, N_{\alpha,1} = 0$ (Abb. 775).

$$\left. \begin{aligned} N_\alpha &= -\frac{a \dot{p}_s}{2} \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha_1}{\sin^2 \alpha} \right), & N_\beta &= \frac{a \dot{p}_s}{2} \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha_1}{\sin^2 \alpha} - 2 \cos^2 \alpha \right), \\ \Delta r_\alpha &= \frac{a^2 \dot{p}_s}{Eh} \frac{\sin \alpha}{2} \left[\left(1 - \frac{\sin^2 \alpha_1}{\sin^2 \alpha} \right) (1 + \mu) - 2 \cos^2 \alpha \right], \\ \vartheta &= -\frac{a \dot{p}_s}{Eh} (3 + \mu) \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (1119)$$

Schnittkräfte aus der Belastung $G_L = 2\pi a P \sin \alpha_1$ durch die Laterne und den Laternenring. $N_{\alpha,1} = -P/\sin \alpha_1$ (Abb. 776).

$$N_\alpha = -N_\beta = -P \frac{\sin \alpha_1}{\sin^2 \alpha}, \quad \Delta r = \frac{Pa}{Eh} (1 + \mu) \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha}, \quad \vartheta = 0. \quad (1120)$$

Äußere Kraft H zur tangentialen Eintragung der Laternenlast P : $H = P \operatorname{ctg} \alpha_1$, Längskraft im Laternenring $N_L = -Pa \cos \alpha_1$.

Die geschlossene Kugelschale mit rotationssymmetrischer Belastung. Für $\alpha = 0$ ist $N_\alpha = N_\beta$.

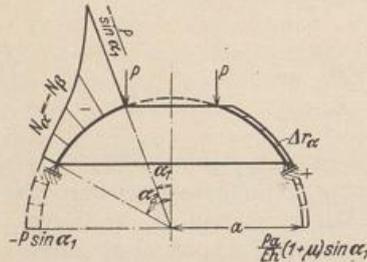


Abb. 776. Schaulinien für Laternenlast.

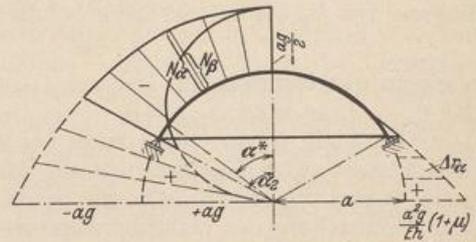


Abb. 777. Schaulinien für Eigengewicht.

Schnittkräfte für Eigengewicht $p_x = 0$, $p_y = g \sin \alpha$, $p_z = g \cos \alpha$ (Abb. 777).

$$N_\alpha = -\frac{ag}{1 + \cos \alpha}, \quad N_\beta = \frac{ag}{1 + \cos \alpha} (1 - \cos \alpha - \cos^2 \alpha), \quad N_{\alpha\beta} = 0. \quad (1121)$$

Die Längskraft N_α in Richtung des Meridians erzeugt für alle Winkel α zwischen 0° und 90° Druckspannungen. Das Vorzeichen der Längskraft N_β wechselt bei $\alpha = \alpha^*$. N_β erzeugt für alle Winkel $\alpha > \alpha^*$ Zugspannungen. Der Breitenkreis α^* mit dem Spannungswechsel $N_\beta = 0$ ist durch die Bedingung $(1 - \cos \alpha^* - \cos^2 \alpha^*) = 0$ bestimmt, so daß $\alpha^* = 51^\circ 50'$.

$$\alpha = 0: \quad N_\alpha = N_\beta = -\frac{ag}{2}.$$

Um den senkrechten Auflagerdruck der Schale tangential zuzuführen, ist eine waagerechte Kraft $H = N_{\alpha_2} \cos \alpha_2$ notwendig. Sie erzeugt den Ringzug (Abb. 778)

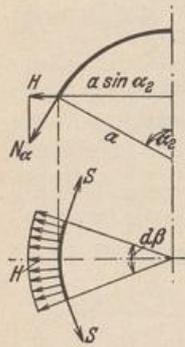


Abb. 778.

$$\text{ist } \left. \begin{aligned} S &= H a \sin \alpha_2, & \text{Mit } H &= ag \frac{\cos \alpha_2}{1 + \cos \alpha_2} \\ S &= \frac{a^2 g}{2} \frac{\sin 2\alpha_2}{1 + \cos \alpha_2}. \end{aligned} \right\} \quad (1122)$$

Verschiebungszustand für Eigengewicht nach Abschn. 80:

$$\epsilon_\alpha = -\frac{ag}{Eh} \frac{1 + \mu(1 - \cos \alpha - \cos^2 \alpha)}{1 + \cos \alpha}, \quad \epsilon_\beta = \frac{ag}{Eh} \frac{1 - \cos \alpha - \cos^2 \alpha + \mu}{1 + \cos \alpha}, \quad (1123)$$

$$R_\beta \epsilon_\alpha - R_\alpha \epsilon_\beta = -A \frac{2 - \cos \alpha - \cos^2 \alpha}{1 + \cos \alpha}, \quad A = \frac{a^2 g (1 + \mu)}{Eh},$$

$$\int \frac{(R_\beta \epsilon_\alpha - R_\alpha \epsilon_\beta)}{\sin \alpha} d\alpha = A \left[\ln(1 + \cos \alpha) - \frac{1}{1 + \cos \alpha} \right] + C_1$$

und daher nach (1103)

$$\left. \begin{aligned} v &= \sin \alpha \left[A \left(\ln(1 + \cos \alpha) - \frac{1}{1 + \cos \alpha} \right) + C_1 \right], \\ w &= A \cos \alpha \left[\ln(1 + \cos \alpha) + \frac{1}{1 + \mu} \right] - A + C_1 \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (1124)$$

Die senkrechten und waagerechten Komponenten t , Δr_α der Verschiebung sind mit Abb. 779 nach S. 753

$$t = w \cos \alpha + v \sin \alpha, \quad \Delta r_\alpha = -w \sin \alpha + v \cos \alpha. \quad (1125)$$

Für $\alpha = \alpha_2$ wird $v = 0$, so daß C_1 berechnet werden kann.

$$C_1 = -A \left[\ln(1 + \cos \alpha_2) - \frac{1}{1 + \cos \alpha_2} \right],$$

so daß

$$\left. \begin{aligned} v &= A \sin \alpha \left[\ln \frac{1 + \cos \alpha}{1 + \cos \alpha_2} + \frac{1}{1 + \cos \alpha_2} - \frac{1}{1 + \cos \alpha} \right], \\ w &= A \cos \alpha \left[\ln \frac{1 + \cos \alpha}{1 + \cos \alpha_2} + \frac{1}{1 + \mu} + \frac{1}{1 + \cos \alpha_2} \right] - A, \\ \Delta r_\alpha &= \frac{a^2 g}{E h} \sin \alpha \left(\frac{1 + \mu}{1 + \cos \alpha} - \cos \alpha \right), \\ \vartheta &= -\frac{a g}{E h} (2 + \mu) \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (1126)$$

Die senkrechte Verschiebung w_0 des Scheitels ($\alpha = 0$) ist

$$w_0 = A \left[\ln \frac{2}{1 + \cos \alpha_2} + \frac{1}{(1 + \cos \alpha_2)} - \frac{\mu}{1 + \mu} \right]. \quad (1127a)$$

Sonderfall $\alpha_2 = 90^\circ$

$$w_0 = w_0^* = \frac{a^2 g}{E h} (1,69315 + 0,69315 \mu), \quad \Delta r_{\alpha_2}^* = A = \frac{a^2 g}{E h} (1 + \mu). \quad (1127b)$$

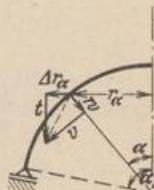


Abb. 779.

Eine gleichförmige Erwärmung der Kugelschale um t^0 erzeugt

$$\Delta r_\alpha = \alpha_1 t a \sin \alpha, \quad \vartheta = 0. \quad (1128)$$

Schnittkräfte bei Schneebelastung. $p_x = 0$, $p_y = p_s \sin \alpha \cos \alpha$, $p_z = p_s \cos^2 \alpha$ (Abb. 780).

$$N_\alpha = -\frac{a p_s}{2}, \quad N_\beta = -\frac{a p_s}{2} \cos 2\alpha. \quad (1129)$$

Bei $\alpha > 45^\circ$ entstehen daher Zugspannungen σ_β .

Die waagerechte Verschiebung beträgt

$$\Delta r_\alpha = \frac{a^2 p_s}{E h} \sin \alpha \left(\frac{1 + \mu}{2} - \cos^2 \alpha \right) \quad (1130)$$

und die Verdrehung der Meridiantangente

$$\vartheta = -\frac{a p_s}{E h} (3 + \mu) \sin \alpha \cos \alpha. \quad (1131)$$

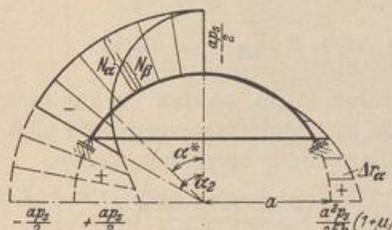


Abb. 780. Schaulinien für Schneelast.

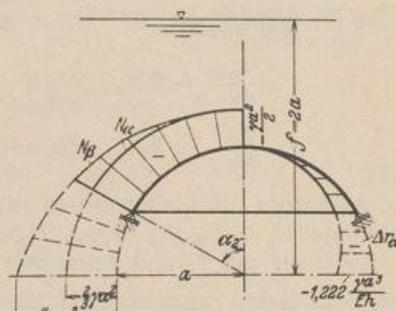


Abb. 781. Schaulinien für Wasserauflast beim Stützboden.

Wasserauflast bei Verwendung der Kugelschale als Stützboden eines Behälters (Abb. 781).

$$p_x = 0, \quad p_y = 0, \quad p_z = p_w = \gamma a \left(\frac{t}{a} - \cos \alpha \right),$$

$$\begin{aligned} N_\alpha &= -\frac{\gamma a^2}{\sin^2 \alpha} \left[\int \left(\frac{t}{a} - \cos \alpha \right) \sin \alpha \cos \alpha d\alpha + C_1 \right] \\ &= -\frac{\gamma a^2}{6 \sin^2 \alpha} \left[\frac{3t}{a} \sin^2 \alpha + 2 \cos^3 \alpha + 6 C_1 \right]. \end{aligned}$$

Da N_α für $\alpha = 0$ endlich ist, wird die Klammer Null und daher $6 C_1 = -2$.

$$\left. \begin{aligned} N_\alpha &= -\frac{\gamma a^2}{6} \left(3 \frac{f}{a} - 2 \frac{1 - \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right), & N_\beta &= -\frac{\gamma a^2}{6} \left(3 \frac{f}{a} - 6 \cos \alpha + 2 \frac{1 - \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right), \\ \Delta r_\alpha &= -\frac{\gamma a^3}{6 E h} \sin \alpha \left[3(1 - \mu) \frac{f}{a} - 6 \cos \alpha + 2(1 + \mu) \frac{1 - \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right], \\ \vartheta &= \gamma \frac{a^2}{E h} \sin \alpha. \end{aligned} \right\} (1132)$$

Wird die Kugelschale nach Abb. 782 als Hängeboden eines Wasserbehälters verwendet, so erhält die bezogene Kraft g unter Beibehaltung des Koordinatensystems in den Ergebnissen (1121) bis (1127) das negative Vorzeichen.

Schnittkräfte durch Wasserauflast bei Verwendung der Kugelschale als Hängeboden eines Behälters (Abb. 782).

$$\left. \begin{aligned} p_x &= 0, & p_y &= 0, & p_z &= -\gamma a \left(\frac{f}{a} + \cos \alpha \right), \\ N_\alpha &= \frac{\gamma a^2}{6} \left(3 \frac{f}{a} + 2 \frac{1 - \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right), & N_\beta &= \frac{\gamma a^2}{6} \left(3 \frac{f}{a} + 6 \cos \alpha - 2 \frac{1 - \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right), \\ \Delta r_\alpha &= \frac{\gamma a^3}{6 E h} \sin \alpha \left[3(1 - \mu) \frac{f}{a} + 6 \cos \alpha - 2(1 + \mu) \frac{1 - \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right], \\ \vartheta &= \frac{\gamma a^2}{E h} \sin \alpha. \end{aligned} \right\} (1133)$$

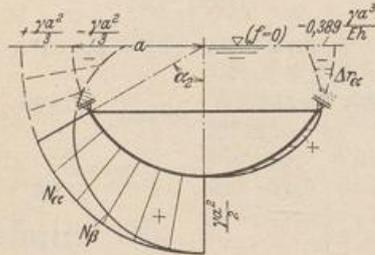


Abb. 782. Schaulinien für Wasserauflast beim Hängeboden.

Aus der Ableitung an einem Spiegelbild der Abb. 782 folgt, daß ϑ im Gegensatz zu (1132) bei Rechtsdrehung der Meridiantangente positiv ist.

Die Kugelschale mit einer vom Meridianwinkel β periodisch abhängigen Belastung. Die allgemeinen Differentialgleichungen (1101) für das Gleichgewicht der Kräfte an einer Rotationsschale lassen sich für $R_\alpha = R_\beta = a$ folgendermaßen vereinfachen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN_{\alpha\beta n}}{d\alpha} + 2N_{\alpha\beta n} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{n}{\sin \alpha} N_{\alpha n} &= -a \left(X_n + \frac{n}{\sin \alpha} Z_n \right), \\ \frac{dN_{\alpha n}}{d\alpha} + 2N_{\alpha n} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{n}{\sin \alpha} N_{\alpha\beta n} &= -a \left(Y_n + Z_n \operatorname{ctg} \alpha \right). \end{aligned} \right\} (1134)$$

Sie enthalten die Unbekannten in symmetrischer Form, so daß daraus neue Unbekannte $U_1 = N_{\alpha n} + N_{\alpha\beta n}$, $U_2 = N_{\alpha n} - N_{\alpha\beta n}$ gebildet werden, die sich nach H. Reißner auf Grund bekannter Regeln unabhängig berechnen lassen.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU_1}{d\alpha} + U_1 \left(2 \operatorname{ctg} \alpha + \frac{n}{\sin \alpha} \right) &= -a \left(X_n + Y_n + \frac{n + \cos \alpha}{\sin \alpha} Z_n \right), \\ \frac{dU_2}{d\alpha} + U_2 \left(2 \operatorname{ctg} \alpha - \frac{n}{\sin \alpha} \right) &= +a \left(X_n - Y_n + \frac{n - \cos \alpha}{\sin \alpha} Z_n \right), \end{aligned} \right\} (1135)$$

Bei Windbelastung ist $p_x = 0$, $p_y = 0$, $p_z = \sum Z_n(\alpha) \cos n\beta$. Der auf jeden Schalen-sektor von der Winkelbreite π/n entfallende Anteil bildet eine Resultierende. Je zwei sind einander symmetrisch oder antimetrisch zugeordnet, je nachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Sie geben geometrisch addiert eine senkrechte (W_v) oder eine waagerechte Kraft (W_h), deren Wirkungslinie die Drehachse im Schalenmittelpunkt schneidet (Abb. 783).

Sonderfall $Z_n(\alpha) = p \sin \alpha$, $n = 1$. Die Spannungsverteilung ist durch einen Nullmeridian ausgezeichnet.

a) Lösung der Differentialgleichungen (1135). Die Gleichungen haben die Form

$$\frac{dU}{d\alpha} + U\varphi = \psi.$$

Die Substitution $\varphi = \bar{\varphi}'/\bar{\varphi}$ führt auf

$$\bar{\varphi}U' + U\bar{\varphi}' = \psi\bar{\varphi}, \quad \bar{\varphi}U = \int \psi\bar{\varphi} d\alpha + C.$$

Durch Integration folgt

$$\int \varphi d\alpha = \int \frac{\bar{\varphi}'}{\bar{\varphi}} d\alpha = \ln \bar{\varphi}, \quad \bar{\varphi} = e^{\int \varphi d\alpha}$$

und damit die Lösung

$$U = e^{-\int \varphi d\alpha} \left[\int \psi e^{\int \varphi d\alpha} d\alpha + C \right].$$

Die Integrationskonstanten ergeben sich aus der Bedingung, daß für $\alpha = 0$ die Schnittkräfte und damit auch U_1 und U_2 endlich sind. Die Integration bietet keine Schwierigkeiten; die Lösung lautet (Abb. 785)

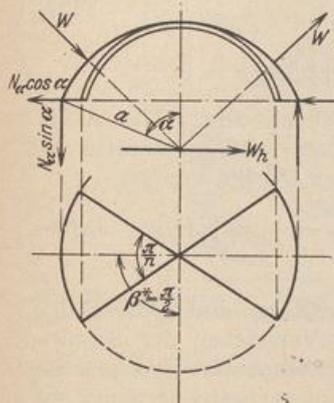
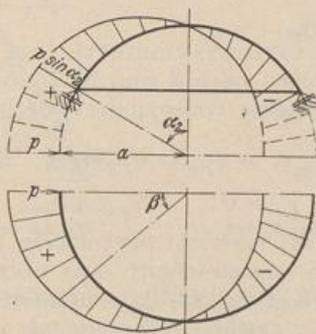
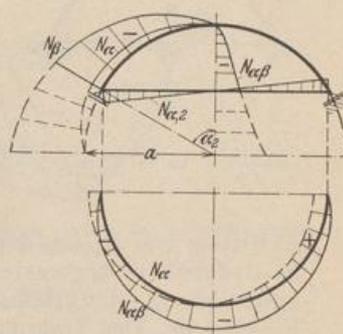


Abb. 783.

Abb. 784. Windlast $p_z = p \sin \alpha \cos \beta$.Abb. 785. Schaulinien für Windbelastung $p_z = p \sin \alpha \cos \beta$.

$$\left. \begin{aligned} N_\alpha &= -\frac{pa \cos \alpha}{3 \sin^3 \alpha} (2 - 3 \cos \alpha + \cos^3 \alpha) \cos \beta, \\ N_{\alpha\beta} &= -\frac{pa}{3 \sin^3 \alpha} (2 - 3 \cos \alpha + \cos^3 \alpha) \sin \beta, \\ N_\beta &= +\frac{pa}{3 \sin^3 \alpha} (2 \cos \alpha - 3 \sin^2 \alpha - 2 \cos^4 \alpha) \cos \beta. \end{aligned} \right\} \quad (1136)$$

b) Unmittelbare Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen (Abb. 783 u. 784).

$$W_h = 4pa^2 \int_0^\alpha \sin^3 \alpha d\alpha \int_0^{\pi/2} \cos^2 \beta d\beta = p \frac{\pi a^2}{3} (2 - 3 \cos \alpha + \cos^3 \alpha).$$

Gleichgewicht aller äußeren Kräfte gegen Drehen um eine Achse $\beta^* = \pi/2$ in der Ebene des Breitenkreises:

$$W_h a \cos \alpha + 4N_{\alpha 1} a^2 \sin^3 \alpha \int_0^{\pi/2} \cos^2 \beta d\beta = 0; \quad \text{daraus } N_\alpha \text{ nach (1136).}$$

Gleichgewichtsbedingung (1113):

$$N_\beta = N_{\beta 1} \cos \beta = -(pa \sin \alpha + N_{\alpha 1}) \cos \beta; \quad \text{daraus } N_\beta \text{ nach (1136).}$$

48*

Gleichgewicht gegen Verschieben durch W_h und durch die Komponenten der Schnittkräfte $N_\alpha, N_{\alpha\beta}$ in Richtung W_h :

$$W_h - 4N_{\alpha 1} a \sin \alpha \cos \alpha \int_0^{\pi/2} \cos^2 \beta d\beta + 4N_{\alpha\beta 1} a \sin \alpha \int_0^{\pi/2} \sin^2 \beta d\beta = 0,$$

daraus $N_{\alpha\beta}$ nach (1136).

Reißner, H.: Spannungen in Kugelschalen. Müller-Breslau-Festschrift S. 192. Leipzig 1912.
 — Pasternak, P.: Die praktische Berechnung biegefestiger Kugelschalen usw. Z. angew. Math. Mech. 1926 S. 1.

b) Die Kegelschale. Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen für die äußeren Kräfte am unteren differentialen Abschnitt der Fläche erhalten mit $R_\beta = \infty$, $R_\beta d\alpha = dy$, $r_\alpha \rightarrow r_z = y \cos \alpha$, $N_\alpha \rightarrow N_y$, $N_{\alpha\beta} \rightarrow N_{y\beta}$ folgende Form (Abb. 786):

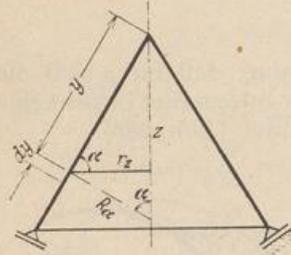


Abb. 786.

$$\left. \begin{aligned} y \frac{\partial N_{y\beta}}{\partial y} + 2N_{y\beta} + \frac{1}{\cos \alpha} \frac{\partial N_\beta}{\partial \beta} y p_x &= 0, \\ y \frac{\partial N_y}{\partial y} + (N_y - N_\beta) + \frac{1}{\cos \alpha} \frac{\partial N_{y\beta}}{\partial \beta} + y p_y &= 0, \\ N_\beta + y p_z \operatorname{ctg} \alpha &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1137)$$

Rotationssymmetrische Belastung: Die Ableitungen nach β sind Null, so daß die Schnittkräfte unabhängig voneinander berechnet werden können.

$$\frac{d(N_{y\beta} y^2)}{dy} = -y^2 p_x, \quad \frac{d(N_y y)}{dy} = -y p_y - y p_z \operatorname{ctg} \alpha, \quad N_\beta = -y p_z \operatorname{ctg} \alpha. \quad (1138)$$

$p_x = 0: \quad N_{y\beta} = 0.$

Ableitung von N_y aus dem Gleichgewicht der äußeren Kräfte an einem durch den Breitenkreis r_z begrenzten Schalenabschnitt. Das obere Vorzeichen der Schnittkräfte gilt für die gestützte Kegelschale, das untere Vorzeichen für die hängende Kegelschale. Der Tragring der gestützten Kegelschale wird gezogen, derjenige der hängenden Kegelschale gedrückt.

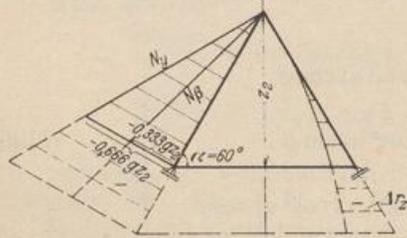


Abb. 787. Schaulinien für Eigengewicht.

$$N_y = \mp \frac{Q}{2\pi r_z \sin \alpha} = \mp \frac{Q}{\pi y \sin 2\alpha}. \quad (1139)$$

Verschiebungszustand bei rotationssymmetrischer Belastung

$$\left. \begin{aligned} r &\rightarrow r + \Delta r_z, \\ \Delta r_z &= \frac{r_z}{E h} (N_\beta - \mu N_y) \\ &= \frac{y \cos \alpha}{E h} (N_\beta - \mu N_y), \end{aligned} \right\} \quad (1140)$$

$$\begin{aligned} \vartheta &= \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{E h} \left[(1 + \mu) (N_y - N_\beta) - y \frac{\partial}{\partial y} (N_\beta - \mu N_y) \right] \\ &= \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{E h} \left[\operatorname{ctg} \alpha \frac{\partial}{\partial y} (y^2 p_z) - \mu y p_y + N_y \right]. \end{aligned} \quad (1141)$$

Eigengewicht einer geschlossenen Kegelschale mit gleichbleibender Wanddicke h (Abb. 787).

$$\left. \begin{aligned} p_z &= g \cos \alpha, & p_y &= g \sin \alpha, & G &= \pi r_z y g, \\ N_y &= \mp \frac{g z}{2 \sin^2 \alpha}, & N_\beta &= \mp g z \operatorname{ctg}^2 \alpha, \\ \Delta r_z &= \mp \frac{g z^2 \operatorname{ctg} \alpha}{2 E h \sin^2 \alpha} (2 \cos^2 \alpha - \mu), & \vartheta &= \mp \frac{g z \operatorname{ctg} \alpha}{E h \sin^2 \alpha} [1 + \mu - (2 + \mu) \cos^2 \alpha]. \end{aligned} \right\} \quad (1142)$$

Zur Berechnung der Schnittkräfte aus Schneelast wird $g = p_s \cos \alpha$ eingesetzt.
 Waagrecht abgeglichene Auflast (Abb. 788 u. 789):

$$\left. \begin{aligned} G &= \gamma \pi r_z^2 (f \pm \frac{2}{3} z), \quad N_y = \mp \frac{\gamma z \operatorname{ctg} \alpha}{6 \sin \alpha} (3f \pm 2z), \quad N_\beta = \mp \gamma z (f \pm z) \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha}, \\ \Delta r_z &= \mp \frac{\gamma z^2 \cos^2 \alpha}{E h \sin^3 \alpha} \left[(f \pm z) - \frac{\mu}{6} (3f \pm 2z) \right], \\ \vartheta &= \pm \frac{\gamma z \cos^2 \alpha}{E h \sin^3 \alpha} \left(\frac{3}{2} f \pm \frac{8}{3} z \right). \end{aligned} \right\} (1143)$$

Eigengewicht (g) einer offenen Kegelschale (Abb. 790)

$$\left. \begin{aligned} N_y &= -\frac{g z}{2 \sin^2 \alpha} \left(1 - \frac{z_1^2}{z^2} \right), \quad N_\beta = -g z \operatorname{ctg}^2 \alpha, \\ \Delta r_z &= -\frac{g z^2}{E h} \operatorname{ctg}^3 \alpha \left[1 - \frac{\mu}{2 \cos^2 \alpha} \left(1 - \frac{z_1^2}{z^2} \right) \right], \\ \vartheta &= -\frac{g z \operatorname{ctg} \alpha}{E h \sin^2 \alpha} \times \\ &\quad \times \left[\frac{1}{2} + \mu - (2 + \mu) \cos^2 \alpha - \frac{1}{2} \frac{z_1^2}{z^2} \right]. \end{aligned} \right\} (1144)$$

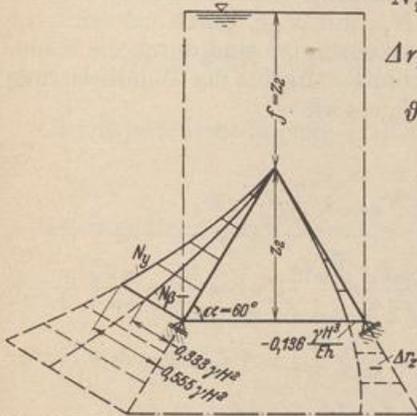


Abb. 788. Schaulinien für Auflast bei der aufgestützten Kegelschale.

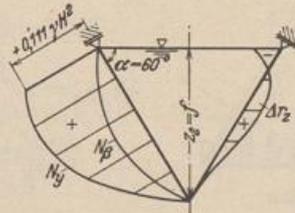


Abb. 789. Schaulinien für Auflast bei der aufgehängten Kegelschale.

Offene Kegelschale mit Kopfring und Ringlast G_0 (Abb. 791)

$$\left. \begin{aligned} N_y &= -\frac{G_0}{2 \pi z \cos \alpha}, \quad N_\beta = 0, \\ \Delta r_z &= \frac{\mu G_0}{2 \pi E h \sin \alpha}, \quad \vartheta = -\frac{G_0}{E h} \frac{1}{2 \pi z \sin \alpha}. \end{aligned} \right\} (1145)$$

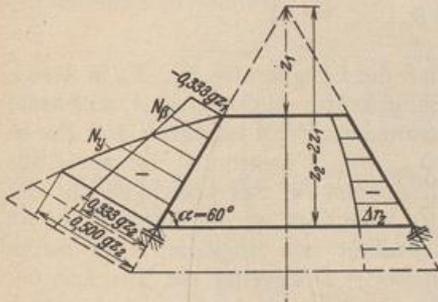


Abb. 790. Schaulinien für Eigengewicht.

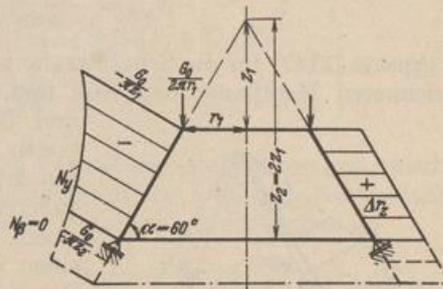


Abb. 791. Schaulinien für Ringlast.

Periodische Belastung. Entwicklung als trigonometrische, nach ganzen Vielfachen von β fortschreitende Reihe. Die Koeffizienten sind Funktionen von z .

$$p_x = \sum X_n \sin n\beta, \quad p_y = \sum Y_n \cos n\beta, \quad p_z = \sum Z_n \cos n\beta, \quad n = 0, 1 \dots \infty.$$

Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen (1113) werden durch den Ansatz

$$N_y = \sum N_{y n} \cos n\beta, \quad N_\beta = \sum N_{\beta n} \cos n\beta, \quad N_{y\beta} = \sum N_{y\beta n} \sin n\beta$$

erfüllt, wenn die allein von z abhängigen Funktionen N_{yn} , $N_{\beta n}$, $N_{y\beta n}$ den folgenden beiden simultanen totalen Differentialgleichungen genügen.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN_{y\beta n}}{dy} + \frac{2}{y} N_{y\beta n} + X_n + \frac{n}{\sin \alpha} Z_n &= 0, \\ \frac{d}{dy} (y N_{yn}) + \frac{n}{\cos \alpha} N_{y\beta n} + y Y_n + y Z_n \operatorname{ctg} \alpha &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1146)$$

Außerdem ist

$$N_{\beta n} = -y Z_n \operatorname{ctg} \alpha.$$

Darnach kann $N_{y\beta n}$ unabhängig von den beiden anderen Schnittkräften aus (1146) berechnet werden. Die allgemeine Lösung dieser linearen Differentialgleichung ist bekannt (Hütte 26. Aufl. Bd. 1 S. 101), so daß N_{yn} mit $N_{y\beta n}$ durch eine einfache Quadratur gefunden wird. Die beiden Integrationskonstanten sind durch die Randbedingungen bestimmt. Die Lösung liefert die Schnittkräfte aus der Windbelastung eines Kegeldaches mit $p_x = 0$, $p_y = 0$, $p_z = \sum Z_n \cos n\beta$.

Lösung für $Z_n = Z_n(y) = \text{const.}$

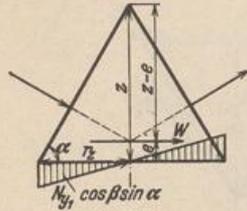


Abb. 792.

$$\begin{aligned} \frac{dN_{y\beta n}}{dy} + \frac{2}{y} N_{y\beta n} + \frac{n Z_n}{\sin \alpha} &= 0, \\ N_{y\beta n} &= e^{-\int \frac{2}{y} dy} \left[C_1 - \int \frac{n Z_n}{\sin \alpha} e^{\int \frac{2}{y} dy} dy \right] = \frac{C_1}{y^2} - \frac{n Z_n}{\sin \alpha} \frac{y}{3}, \\ \frac{d(y N_{yn})}{dy} + \frac{n}{\cos \alpha} \left(\frac{C_1}{y^2} - \frac{n Z_n}{\sin \alpha} \frac{y}{3} \right) + y Z_n \operatorname{ctg} \alpha &= 0, \\ N_{yn} &= Z_n y \frac{n^2 - 3 \cos^2 \alpha}{6 \sin \alpha \cos \alpha} + \frac{n C_1}{y^2 \cos \alpha} + \frac{C_2}{y}. \end{aligned}$$

Damit für $y = 0$ die Schnittkräfte endlich bleiben, ist $C_1 = 0$, $C_2 = 0$.

$$\left. \begin{aligned} N_y &= -\frac{Z_n z}{6} \frac{n^2 - 3 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos \alpha} \cos n\beta, \\ N_\beta &= -Z_n z \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sin \alpha} \cos n\beta, \\ N_{y\beta} &= -\frac{n Z_n z}{3 \sin^2 \alpha} \sin n\beta. \end{aligned} \right\} \quad (1147)$$

Der Ansatz (1147) für die Schnittkräfte zeigt, daß die Längskräfte N_y , N_β in n ausgezeichneten Meridianebenen Null und die Schubkräfte gleichzeitig Grenzwerte sind. Der Spannungszustand ist durch drei drei Funktionen N_{yn} , $N_{\beta n}$, $N_{y\beta n}$ bestimmt, die auch aus den drei Bedingungen für das Gleichgewicht der äußeren Kräfte berechnet werden können, die an einem Schalensektor π/n angreifen, der durch einen Breitenschnitt z begrenzt ist. Die aus der Belastung herrührenden Kräfte schneiden sich auf der Drehachse. Sie sind bei einer geraden Zahl n symmetrisch, ihre Resultierende senkrecht, dagegen bei einer ungeraden Zahl n antimetrisch, so daß eine waagrecht gerichtete resultierende Kraft entsteht. Die Untersuchung kann in beiden Fällen auf den halben Sektor beschränkt werden.

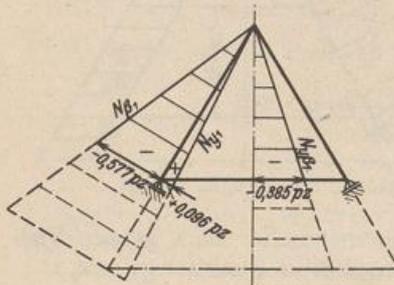


Abb. 793. Schaulinien für Windbelastung $p \sin \alpha \cos \beta$.

Lösung für $p_x = 0$, $p_y = 0$, $p_z = p \sin \alpha \cos \beta$ (Abb. 793).
Waagrechte Resultierende der äußeren Kräfte (Abb. 792).

$$W = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^y p_z \sin \alpha \cos \beta dy r_z d\beta = 4 p \sin^2 \alpha \cos \alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^y y \cos^2 \beta dy d\beta = \frac{\pi}{2} p z^2 \cos \alpha.$$

$$W \cdot (z - \epsilon) = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^y p_z \sin \alpha \cos \beta \frac{s}{\sin \alpha} r_z dy d\beta = \pi p \frac{z^3}{3} \sin \alpha \cos \alpha, \quad (z - \epsilon) = \frac{2y}{3 \sin \alpha}.$$

Gleichgewicht aller äußeren Kräfte gegen Drehen um eine Achse $\beta^* = \frac{\pi}{2}$ in der Ebene des Breitenkreises.

$$W_e = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} N_{y\beta} \cos \beta \sin \alpha \cdot r_z \cos \beta \cdot r_z d\beta, \quad N_y = \frac{p z}{6} \frac{1 - 3 \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} \cos \beta.$$

Gleichgewichtsbedingung (1137)

$$N_\beta = -p z \operatorname{ctg} \alpha \cos \beta.$$

Gleichgewicht gegen Verschieben in der Richtung W

$$4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} N_y \cos \alpha \cos \beta \cdot r_z d\beta + 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} N_{y\beta} \sin^2 \beta \cdot r_z d\beta - W = 0,$$

$$N_{y\beta} = -\frac{p z}{3 \sin \alpha} \sin \beta.$$

c) Die Zylinderschale. Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen (1137) der Kegelschale vereinfachen sich mit $r = a = \text{const}$ und $\alpha = 90^\circ$. Sie lauten

$$\frac{\partial N_\beta}{\partial \beta} + a \frac{\partial N_{y\beta}}{\partial y} + a p_x = 0, \quad \frac{\partial N_{y\beta}}{\partial \beta} + a \frac{\partial N_y}{\partial y} + a p_y = 0, \quad N_\beta + a p_x = 0, \quad (1148)$$

so daß die Schnittkräfte N_β , $N_{y\beta}$, N_y in Verbindung mit zwei Integrationskonstanten der Reihe nach berechnet werden können. Diese sind durch die Randbedingungen bestimmt.

$$\left. \begin{aligned} N_\beta &= -p_x a, & N_{y\beta} &= \int \left(\frac{\partial p_x}{\partial \beta} - p_x \right) dy + C_1(\beta), \\ N_y &= -\int \left[p_y + \frac{1}{a} \int \left(\frac{\partial^2 p_x}{\partial \beta^2} - \frac{\partial p_x}{\partial \beta} \right) dy + \frac{dC_1(\beta)}{d\beta} \right] dy + C_2(\beta). \end{aligned} \right\} \quad (1149)$$

Die Formänderung der Zylinderschale ist den Verträglichkeitsbedingungen zwischen den Komponenten u , v , w des Verschiebungszustandes und den Komponenten ϵ_y , ϵ_β , $\gamma_{y\beta}$ der Verzerrung eines differentialen Abschnitts unterworfen.

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \epsilon_\beta &= \frac{\partial u}{a \partial \beta} - \frac{w}{a}, & \gamma_{y\beta} &= \frac{\partial v}{a \partial \beta} + \frac{\partial u}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (1150)$$

so daß

$$v = \int \epsilon_y dy + C_3(\beta), \quad u = \int \left(\gamma_{y\beta} - \frac{\partial v}{a \partial \beta} \right) dy + C_4(\beta), \quad w = \frac{\partial u}{\partial \beta} - a \epsilon_\beta.$$

Die Dehnungen ϵ_y , ϵ_β und die Winkeländerung $\gamma_{y\beta}$ sind durch das Elastizitätsgesetz bestimmt (1104). Darnach ist

$$\epsilon_y = \frac{1}{E h} (N_y - \mu N_\beta), \quad \epsilon_\beta = \frac{1}{E h} (N_\beta - \mu N_y), \quad \gamma_{y\beta} = \frac{2(1 + \mu)}{E h} N_{y\beta}. \quad (1151)$$

Rotationssymmetrische Belastung. Die Ableitung der Funktionen der Schnittkräfte nach β sind Null, so daß nach (1148) folgender Ansatz verwendet werden kann.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN_{y\beta}}{dy} + p_x = 0, \quad \frac{dN_y}{dy} + p_y = 0, \quad N_\beta + a p_z = 0, \\ -w = \Delta a = \frac{a}{Eh} (N_\beta - \mu N_y), \quad \vartheta = dw/dy. \end{aligned} \right\} \quad (1152)$$

Schnittkräfte aus dem Eigengewicht g einer Zylinderschale mit Aufbau (Gewicht G_0 , Abb. 794)

$$N_y = -gy - \frac{G_0}{2a\pi}, \quad N_\beta = 0, \quad Ehw = -\mu \left(a y g + \frac{G_0}{2\pi} \right), \quad Eh\vartheta = -\mu a g. \quad (1153)$$

Bei den folgenden Belastungsarten ist die Meridianschnittkraft N_y Null.

1. Wasserfüllung mit $p_z = -\gamma y$:

$$N_\beta = \gamma y a, \quad Ehw = -\gamma y a^2, \quad Eh\vartheta = -\gamma a^2. \quad (1154)$$

2. Silodruck nach S. 14 mit $p_s = p_{s, \max} (1 - e^{-y/v_0})$, $p_z = -p_s$:

$$N_\beta = a p_s, \quad Ehw = -a^2 p_s, \quad Eh\vartheta = -p_{s, \max} \frac{a^2}{y_0} e^{-y/v_0}. \quad (1155)$$

3. Erddruck nach S. 9 mit $e = \gamma_e \operatorname{tg}^2(45 - \varphi/2)$, $p_z = e(y + q/\gamma_e)$:

$$N_\beta = -ae(y + q/\gamma_e), \quad Ehw = a^2 e(y + q/\gamma_e), \quad Eh\vartheta = a^2 e. \quad (1156)$$

4. Temperatur und Schwinden:

$$w = -\alpha_t t a, \quad \vartheta = 0. \quad (1157)$$

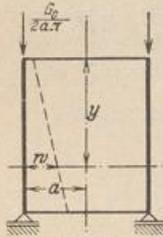


Abb. 794.

Periodische Belastung. Entwicklung als trigonometrische, nach ganzen Vielfachen von β fortschreitende Reihe. Die Koeffizienten X_n, Y_n, Z_n sind Funktionen von y .

$$p_x = \sum X_n \sin n\beta, \quad p_y = \sum Y_n \cos n\beta, \quad p_z = \sum Z_n \cos n\beta. \quad (1158)$$

Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen (1148) werden durch den Ansatz

$$N_y = \sum N_{yn} \cos n\beta, \quad N_\beta = \sum N_{\beta n} \cos n\beta, \quad N_{y\beta} = \sum N_{y\beta n} \sin n\beta \quad (1159)$$

erfüllt, wenn die allein von y abhängigen Funktionen $N_{yn}, N_{\beta n}, N_{y\beta n}$ den folgenden beiden simultanen totalen Differentialgleichungen genügen.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN_{y\beta n}}{dy} + X_n + n Z_n = 0, \quad \frac{dN_{yn}}{dy} + \frac{n}{a} N_{y\beta n} + Y_n = 0, \\ N_{\beta n} + a Z_n = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1160)$$

Berechnung einer Zylinderschale (Abb. 795).

(Kühlturm im Kraftwerk Golpa-Zschornewitz.)

Geometrische Abmessungen.

$$a = 16,7\text{m}, \quad l = 32,0\text{m}.$$

Belastung. Windgesetz (1111) der Göttinger Versuchsanstalt mit $p_w = 0,200 \text{ t/m}^2$.

$$p_x = 0, \quad p_y = 0, \quad p_z = \sum Z_n \cos n\beta = -0,131 + 0,056 \cos \beta + 0,223 \cos 2\beta + 0,080 \cos 3\beta.$$

Lösung der Differentialgleichungen (1160).

$$X_n = 0, \quad Y_n = 0, \quad Z_n = \text{const.}$$

$$N_{y\beta n} = -n Z_n (y + C_1),$$

$$N_{yn} = \frac{n^2 Z_n}{a} \left(\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2 \right),$$

$$N_{\beta n} = -a Z_n.$$

Für $y = 0$ ist $N_{y n} = 0, N_{y \beta n} = 0$, daher $C_1 = 0, C_2 = 0$.

$$N_y = \frac{y^2}{2a} \sum n^2 Z_n \cos n \beta,$$

$$N_\beta = -a \sum Z_n \cos n \beta,$$

$$N_{y \beta} = -y \sum n Z_n \sin n \beta.$$

Schnittkräfte und Trajektorien der Hauptspannungen sind in Abb. 795 u. 796 dargestellt.

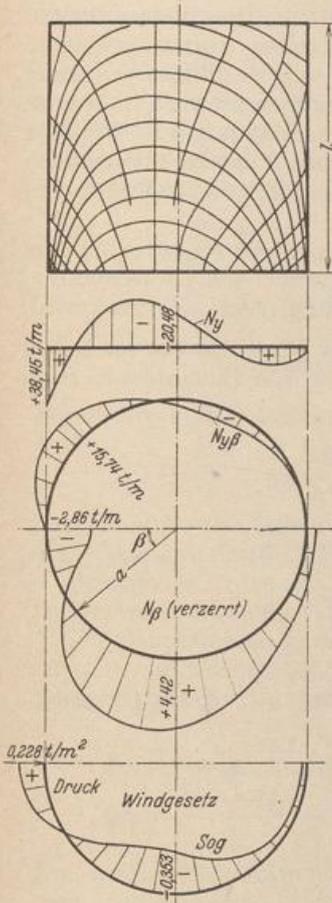


Abb. 795.

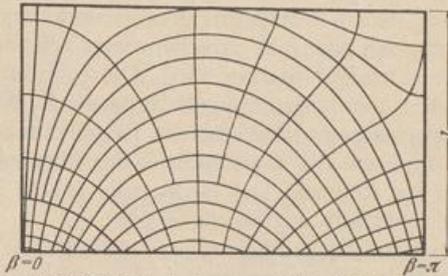


Abb. 796. Trajektorien im abgewinkelten Zylindermantel.

d) Der Schalenrand. Ein Längsspannungszustand kann sich auch bei stetiger Krümmung der Mittelfläche, bei stetiger Änderung der Wanddicke und bei stetiger Belastung der Schale nur dann ausbilden, wenn die äußeren Kräfte am Rande in Richtung der Meridian-tangente eingetragen werden, ohne daß die Form-änderung des Längsspannungszustandes infolge Belastung und Temperaturänderung durch die Stützung oder den biegeungssteifen Anschluß anderer Bauteile gestört wird. Diese Bedingungen lassen sich nur bei Schalen mit senkrechter Endtangente erfüllen. Der Meridian wird dabei zum Halbkreis, zur Ellipse, Zy-kloide, Parabel oder zu einem Korbbogen mit annähernd stetiger Änderung der Krümmung (Abb. 799).

Um Schalen ohne senkrechte Endtangente abzu-stützen oder senkrechte Lasten in den oberen Rand offener Schalen einzuführen und Schalen in einem Breitenkreis mit unstetiger Krümmung zu verbinden, sind Ringträger notwendig, deren Längskraft an den Unstetigkeitsstellen das Gleichgewicht der inneren Kräfte herstellt. Sie lassen sich auch zur Eintragung von Einzellasten verwenden, die als stetige Funktionen

des Winkels β vorgegeben sind. Längskräfte in Ringträgern bei rotationssymme-trischer Belastung (Abb. 770).

$$\begin{array}{ll} \text{Druckring:} & \text{Zugring:} \\ D = -\frac{Q_1}{2\pi} \text{ctg } \alpha_1, & Z = +\frac{Q_2}{2\pi} \text{ctg } \alpha_2, \end{array} \quad (1161)$$

Zwischenring k zwischen zwei Meridianabschnitten mit den Tangenten-winkeln $\alpha_k^{(o)}, \alpha_k^{(u)}$ (Abb. 797).

$$S_k = -\frac{Q_k}{2\pi} (\text{ctg } \alpha_k^{(u)} - \text{ctg } \alpha_k^{(o)}). \quad (1162)$$

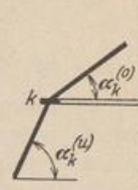


Abb. 797.

Störungen des Längsspannungszustandes werden jedoch hier nur vermieden, wenn

die Ringdehnung ε_β der Schale mit der Dehnung $\bar{\varepsilon}_\beta$ des Ringträgers übereinstimmt, also für $\alpha \rightarrow \alpha_2$ (Abb. 798).

$$E \varepsilon_{\beta 2} = \frac{1}{h} (N_{\beta 2} - \mu N_{\alpha 2}) = E \bar{\varepsilon}_{\beta 2} = - \left(\frac{r_2 N_{\alpha 2} \cos \alpha_2}{F_2} + \frac{\mu N_{\alpha 2} \sin \alpha_2}{b_2} \right),$$

$$- \frac{N_{\beta 2}}{N_{\alpha 2}} + \mu = \frac{h}{F_2} r_2 \cos \alpha_2 + \mu \frac{h}{b_2} \sin \alpha_2. \quad (1163)$$

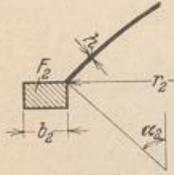


Abb. 798.

Ein Zugintringträger kann daher nur unterhalb der Bruchfuge der Schale angeordnet werden ($N_{\beta 2} > 0$), so daß flache Kugel- oder Kegelschalen nach F. Dischinger einen Übergangsbogen zum Ringträger erhalten müssen, in welchem ein Teil des Bogenschubes durch Ringkräfte aufgenommen wird. Diese sind nach (1097) um so größer, je kleiner der Krümmungshalbmesser R_β der Kurve und damit auch die Länge des Übergangsbogens wird. In der Regel nimmt die Krümmung mit dem Winkel α stetig zu, um auch die Wanddicke h der Randzone gegen den Randträger allmählich vergrößern zu können. Die Bedingung (1163) kann dann durch Veränderung von h , F_2 oder α_2 erfüllt werden (s. S. 765).

Der Übergangsbogen leistet auch bei offenen Schalen gute Dienste, wenn an dem oberen Rande das Eigengewicht einer Laterne aufgenommen werden soll. Die Dehnung ε_β der Schale ist nahezu Null, während die Dehnung $\bar{\varepsilon}_\beta$ des Ringträgers sehr groß wird.

e) Rotationssymmetrische Schalen mit beliebiger Meridiankurve. Neben der Kugel-, Kegel- und Zylinderschale werden zur Lösung von Bauaufgaben noch

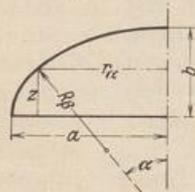


Abb. 799 a. Ellipse.

$$r_\alpha = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - z^2} = \frac{a^2 \sin \alpha}{(a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)^{1/2}},$$

$$R_\beta = \frac{a^2 b^2}{(a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)^{3/2}}, \quad \text{ctg } \alpha = \frac{dr_\alpha}{dz} = - \frac{a}{b} \frac{z}{\sqrt{b^2 - z^2}},$$

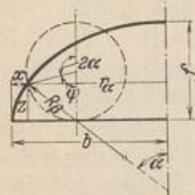


Abb. 799 b. Zykloide.

$$x = \frac{f}{2} (\varphi - \sin \varphi), \quad z = \frac{f}{2} (1 - \cos \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq 180^\circ,$$

$$b = \frac{\pi f}{2}, \quad r_\alpha = \frac{f}{2} (2\alpha + \sin 2\alpha), \quad R_\beta = 2f \cos \alpha,$$

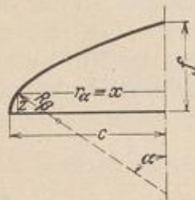


Abb. 799 c. Parabel.

$$x = \frac{2pc - z^2}{2p}, \quad f = \sqrt{2pc},$$

$$\sin \alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2 + z^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{z}{\sqrt{p^2 + z^2}},$$

$$R_\alpha = \frac{x}{\sin \alpha}, \quad R_\beta = 2 \sqrt{\frac{2}{p} \left(c - x + \frac{p}{2} \right)^3},$$

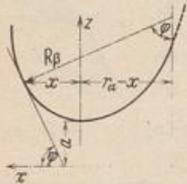


Abb. 799 d. Kettenlinie.

$$z = a \operatorname{Coj} \left(\frac{x}{a} \right), \quad \sin \varphi = \operatorname{Tg} \left(\frac{x}{a} \right), \quad \cos \varphi = \frac{1}{\operatorname{Coj} \left(\frac{x}{a} \right)},$$

$$R_\alpha = r_\alpha \operatorname{Ctg} \left(\frac{x}{a} \right), \quad R_\beta = a \operatorname{Coj}^2 \left(\frac{x}{a} \right).$$

rotationssymmetrische Schalen mit einer Ellipse, Zykloide, Parabel oder Kettenlinie als Meridiankurve verwendet (Abb. 799). Die analytische Berechnung ihrer Längskräfte bereitet nach S. 745 keine Schwierigkeiten. Dagegen sind zur Untersuchung von Schalen mit beliebiger Meridiankurve noch einige Bemerkungen notwendig, die sich auch zur angenäherten Berechnung von Schalen mit mathematisch definierter Meridianlinie und veränderlicher Wanddicke eignen.

a) Rotationssymmetrische Belastung. Die Schnittkräfte werden aus dem Gleichgewicht der äußeren Kräfte an einem geeigneten Abschnitt des Flächentragwerks berechnet. An dem Schalenteil über einem Breitenschnitt mit dem Halbmesser r_α wirken neben der stetigen Belastung $p = p_x + p_z$ die Längskräfte N_α . Die Schubkräfte $N_{\alpha\beta}$ sind Null, da $N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha}$ und diese bei rotationssymmetrischer Belastung wegfällen. Mit Q_α als senkrechter Komponente der resultierenden Belastung und $p_x \sin \alpha - p_y \cos \alpha = p_h$ als waagerechter Komponente der stetigen Belastung p lauten die Gleichgewichtsbedingungen für die Kräfte an den Abschnitten Abb. 767 nach S. 745

$$\left. \begin{aligned} r_\alpha N_\alpha &= -\frac{1}{\sin \alpha} \frac{Q_\alpha}{2\pi}, \\ N_\beta &= -N_\alpha \frac{R_\alpha}{R_\beta} - p_z R_\alpha \\ &= \frac{d}{ds} (r_\alpha N_\alpha \cos \alpha) - p_h r_\alpha. \end{aligned} \right\} (1164)$$

Bei senkrechter Belastung ist also

$$N_\beta = -\frac{1}{2\pi} \frac{d(Q_\alpha \operatorname{ctg} \alpha)}{ds} \quad (1165)$$

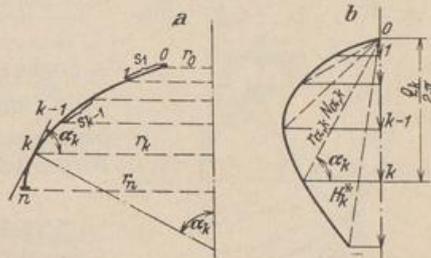


Abb. 800.

Die Schnittkräfte lassen sich daher rechnerisch oder zeichnerisch bei jeder Form des Meridianschnittes angeben, wenn dieser mit der Punktfolge $O \dots k \dots n$ in n gleichgroße Intervalle s geteilt und der Differentialquotient (1165) durch den Differenzenquotienten (1166) ersetzt wird.

Die Buchstaben α_k bezeichnen die Winkel der Tangenten in den Intervallgrenzen, die Buchstaben r_k den Halbmesser der Breitenschnitte k . Ihnen sind die Kräfte Q_k und der Bogenschub $H_k^* = Q_k / 2\pi \cdot \operatorname{ctg} \alpha_k$ zugeordnet.

$$\left. \begin{aligned} r_{\alpha,k} N_{\alpha,k} &= \frac{1}{\sin \alpha_k} \cdot \frac{Q_{\alpha,k}}{2\pi}, \\ N_{\beta,k} &= \frac{H_k^* - H_{k-1}^*}{s_k} - \frac{p_{h,k} + p_{h,(k-1)}}{2} \cdot \frac{r_k + r_{k-1}}{2}. \end{aligned} \right\} (1166)$$

Die numerische Anwendung der Rechenvorschrift ist in dem Zahlenbeispiel auf S. 764 enthalten. Die zeichnerische Lösung besteht aus einem Kräfteplan mit $Q_0/2\pi \dots Q_k/2\pi \dots Q_n/2\pi$, aus dem zunächst $(r_{\alpha,k} N_{\alpha,k})$, also auch $N_{\alpha,k}$ und $(r_{\alpha,k} N_{\alpha,k} \cos \alpha_k) = H_k^*$ erhalten werden (Abb. 800). Die Ringkräfte $N_{\beta,k}$ wechseln bei senkrechter Belastung ($p_h = 0$) mit $\Delta H_k^* = H_k^* - H_{k-1}^* = 0$ das Vorzeichen.

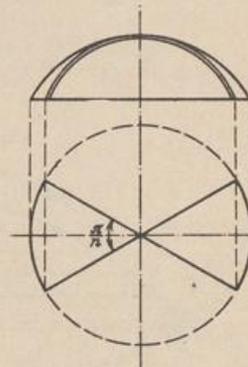


Abb. 801.

b) Windbelastung. Die Belastung $p_w = p_z$ kann nach S. 746 stets als trigonometrische, nach ganzen Vielfachen n von β fortschreitende Reihe entwickelt und damit in Teile zerlegt werden, die zu einer ausgezeichneten Meridianebene ($\beta = 90^\circ$) symmetrisch oder antisymmetrisch sind, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist ($p_w = \sum p_{wn}$). Die Spannungen werden für jeden Anteil p_{wn} einzeln berechnet und darauf überlagert. Die Spannungen aus dem Anteil p_{wn} eines Breitenschnittes sind nach S. 746 durch 3 Parameter bestimmt.

h	α_k^0	s_k	$r_{\alpha,k}$	$\Delta Q_{\alpha,k}/2\pi$	$Q_{\alpha,k}/2\pi$	$r_{\alpha,k}$	$\sin \alpha_k$	$r_{\alpha,k} \sin \alpha_k$	$N_{\alpha,k}$	$\text{ctg } \alpha_k$	$\frac{Q_{\alpha,k} \text{ctg } \alpha_k}{2\pi}$	$\frac{\Delta(Q_{\alpha,k} \text{ctg } \alpha_k)}{2\pi}$	$N_{\beta,k}$
		m	m	t	t	m			t/m				t/m
0	30				- 9,06	11,88	0,5	5,94	- 1,53	1,732	- 15,70		(- 0,94)
1	35	1,78	12,72	- 2,72	- 11,78	13,48	0,574	7,73	- 1,52	1,428	- 16,81	- 1,11	- 0,62
2	40	1,38	14,03	- 2,32	- 14,10	14,55	0,643	9,36	- 1,51	1,192	- 16,82	- 0,01	- 0,01
3	45	0,86	14,88	- 1,54	- 15,64	15,19	0,707	10,72	- 1,46	1,000	- 15,64	- 1,18	+ 1,38
4	55	0,67	15,39	- 1,24	- 16,88	15,61	0,819	12,76	- 1,32	0,700	- 11,81	- 3,83	+ 5,72
5	65	0,35	15,69	- 0,66	- 17,54	15,81	0,906	14,32	- 1,23	0,466	- 8,19	- 3,62	+ 10,34

Die günstigste Lage und der Querschnitt des Zugrings folgt aus (1163) mit $h = 0,05$ m und $h/b \ll 1$.

$$F_k = (0,05 r_{\alpha,k} \cos \alpha_k) : \left(\frac{N_{\beta,k}}{-N_{\alpha,k}} + \mu \right) = \frac{3}{\mathfrak{R}}$$

h	$\cos \alpha_k$	\mathfrak{B}	$\frac{N_{\beta,k}}{-N_{\alpha,k}}$	\mathfrak{R}	F_k
					cm ²
2	0,766	0,557	- 0,005	0,16	34800
3	0,707	0,537	0,95	1,12	4800
4	0,574	0,448	4,34	4,51	995
5	0,423	0,335	8,40	8,57	391

Der Zugring wird bei $\alpha = 45^\circ$ angeordnet und erhält den Querschnitt 100/50 cm. Abb. 803 zeigt die neue Lage der Bruchfuge im Gegensatz zur Kugelschale.

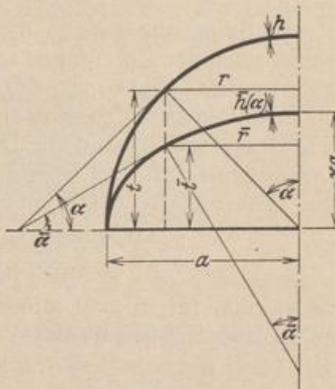


Abb. 804.

f) Schalen mit Massenausgleich. Sind die Schalen mit konstanter Wanddicke h zur Lösung einer Bauaufgabe ungeeignet, so liegt es bei der baulichen Ausbildung eines Querschnitts mit veränderlicher Wanddicke nahe, auf diejenigen elastischen Gebilde (Koordinaten $\bar{R}_\alpha, \bar{R}_\beta, \bar{\alpha}$ oder $\bar{r}, \bar{s}, \bar{t}$) zurückzugreifen, die mit einer ausgezeichneten Schale von konstanter Wanddicke (Koordinaten $R_\alpha, R_\beta, \alpha$ oder r, s, t) geometrisch verwandt sind, und deren Spannungen wiederum im wesentlichen durch Längskräfte hervorgerufen werden.

Die Lösung ist bei rotationssymmetrischen Schalen mit einer Ellipse als Meridianschnitt am einfachsten ($\bar{r}, \bar{t}, \bar{s}, \bar{h}$). Sie wird auf eine Halbkugelschale ($r, s, t, h = \text{const}$) bezogen, die mit ihr in folgender Weise geometrisch verwandt ist (Abb. 804):

$$\bar{r} = r, \quad \bar{s} = s, \quad \bar{t} = \kappa t.$$

$$d\bar{x} = dx, \quad d\bar{y} = dy \sqrt{\cos^2 \alpha + \kappa^2 \sin^2 \alpha}, \quad d\bar{F} = d\bar{x} \cdot d\bar{y} = dF \sqrt{\cos^2 \alpha + \kappa^2 \sin^2 \alpha}. \quad (1172)$$

Wird dann für die Belastung g, \bar{g} der beiden geometrisch verwandten Schalen nachgewiesen, daß $gdF = \bar{g}d\bar{F}$, so ist auch $N_\beta dy = \bar{N}_\beta d\bar{y}$ und $N_\alpha dx \sin \alpha = \bar{N}_\alpha d\bar{x} \sin \bar{\alpha}$, also

$$\bar{N}_\beta = N_\beta \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \kappa^2 \sin^2 \alpha}}, \quad \bar{N}_\alpha = N_\alpha \frac{dt d\bar{y}}{dy d\bar{t}} = N_\alpha \frac{\sqrt{\cos^2 \alpha + \kappa^2 \sin^2 \alpha}}{\kappa} \quad (1173)$$

und für die Spannungen gilt

$$\bar{\sigma}_\alpha = \sigma_\alpha \frac{h}{\bar{h}} \frac{\sqrt{\cos^2 \alpha + \kappa^2 \sin^2 \alpha}}{\kappa}, \quad \bar{\sigma}_\beta = \sigma_\beta \frac{h}{\bar{h}} \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \kappa^2 \sin^2 \alpha}}. \quad (1174)$$

Die Lösung gilt für Eigengewicht bei veränderlicher Wanddicke \bar{h} der geometrisch verwandten Schale, wenn

$$\gamma h dF = \gamma \bar{h} d\bar{F}, \quad \text{also} \quad \bar{h} = \frac{h}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \kappa^2 \sin^2 \alpha}} \quad (1175)$$

Die Wanddicke \bar{h} stimmt also im Scheitel ($\alpha = 0$) mit der Wanddicke h überein und erreicht am Kämpfer $\alpha = 90^\circ$ ihren Grenzwert $\bar{h}^* = h/\kappa$. Die Wanddicke nimmt also bei abgeplatteten Rotationsschalen ($\kappa < 1$) gegen den Kämpfer zu und bei überhöhten Rotationsschalen ($\kappa > 1$) ab. In beiden Fällen wird das Eigen-gewicht allein durch Längsspannungen abgetragen.

Dasselbe gilt auch bei Schneebelastung, da die Bedingung $p_s \cos \alpha dF = p_s \cos \bar{\alpha} d\bar{F}$ mit $d\bar{y}/d\bar{y} = d\bar{F}/dF$ erfüllt ist.

Ähnliche Betrachtungen lassen sich auch für abgeplattete oder überhöhte Schalen mit ellipsenförmigem Grundriß wiederholen. Ihre geometrische Verwandtschaft zur Halbkugelschale kann z. B. mit $\bar{r}/r = \lambda$, $\bar{s}/s = 1$, $\bar{t}/t = \kappa$ beschrieben werden.

81. Biegesteife rotationssymmetrische Schalen.

Die Spannungen $\sigma_\alpha(z)$, $\sigma_\beta(z)$ usw. sind nach den Bemerkungen auf S. 744 lineare Funktionen der Dehnungen $\varepsilon_{0\alpha} \rightarrow \varepsilon_\alpha$, $\varepsilon_{0\beta} \rightarrow \varepsilon_\beta$ der Mittelfläche und der Krümmungsänderung $d(1/R_\beta) = \kappa_\alpha$, $d(1/R_\alpha) = \kappa_\beta$ ihrer Hauptschnitte. Sie lassen sich daher zu Schnittkräften zusammenfassen, von denen jedoch die Querkräfte $Q_{\beta z}$, die Schnittkräfte $N_{\alpha\beta}$ und die Drillungsmomente $M_{\alpha\beta}$ bei rotationssymmetrischer Belastung Null sind. Der Spannungszustand ist daher in diesem Falle durch die folgenden Schnittkräfte bestimmt:

$$\text{Schnitt } \alpha = \text{const: } N_\alpha, M_\alpha, Q_{\alpha z} = Q_\alpha,$$

$$\text{Schnitt } \beta = \text{const: } N_\beta, M_\beta, Q_{\beta z} = 0.$$

Sie werden für $\sigma_z = 0$ und $h \ll R_\beta$ nach dem Hookeschen Gesetz ebenso wie auf S. 747 und S. 645 aus der Verzerrung der Mittelfläche berechnet.

$$\left. \begin{aligned} N_\alpha &= D(\varepsilon_\alpha + \mu \varepsilon_\beta), & N_\beta &= D(\varepsilon_\beta + \mu \varepsilon_\alpha), & D &= \frac{Eh}{1 - \mu^2}, \\ M_\alpha &= -B(\kappa_\alpha + \mu \kappa_\beta), & M_\beta &= -B(\kappa_\beta + \mu \kappa_\alpha), & B &= \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}. \end{aligned} \right\} (1176)$$

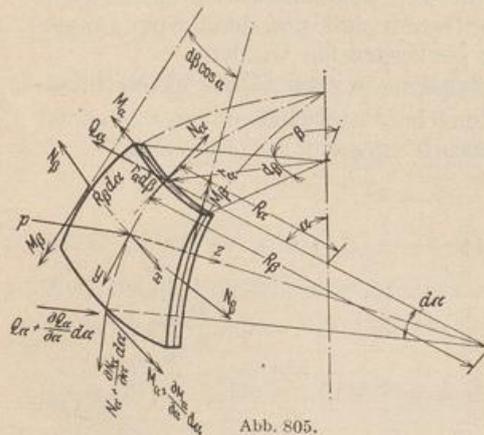


Abb. 805.

Die Verzerrung (ε_α , ε_β , κ_α , κ_β) des differentiellen Abschnitts der Mittelfläche steht mit den Komponenten v , w des Verschiebungszustandes (Abb. 769) nach S. 747 in folgenden Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= \frac{v' - w}{R_\beta}, & \varepsilon_\beta &= \frac{v \operatorname{ctg} \alpha - w}{R_\alpha}, \\ \vartheta &= \frac{v + w'}{R_\beta}, \\ \kappa_\alpha &= \frac{\vartheta'}{R_\beta}, & \kappa_\beta &= \frac{\vartheta \operatorname{ctg} \alpha}{R_\alpha}, \\ (\quad)' &= \frac{d(\quad)}{d\alpha}. \end{aligned} \right\} (1177)$$

Auf diese Weise sind 12 unbekannte Komponenten des Spannungs- und Formänderungszustandes durch 9 Bedingungen miteinander verknüpft. Ihre eindeutige Berechnung gelingt in Verbindung mit den Gleichgewichtsbedingungen für die äußeren Kräfte an einem differentiellen Schalenteil, die nach Abb. 805 folgendermaßen lauten:

$$\left. \begin{aligned} (N_\alpha R_\alpha \sin \alpha)' - N_\beta R_\beta \cos \alpha - Q_\alpha R_\alpha \sin \alpha + p_y R_\alpha R_\beta \sin \alpha &= 0, \\ (Q_\alpha R_\alpha \sin \alpha)' + N_\alpha R_\alpha \sin \alpha + N_\beta R_\beta \sin \alpha + p_z R_\alpha R_\beta \sin \alpha &= 0, \\ (M_\alpha R_\alpha \sin \alpha)' - M_\beta R_\beta \cos \alpha - Q_\alpha R_\alpha R_\beta \sin \alpha &= 0. \end{aligned} \right\} (1178)$$

Um diese 12 linearen Gleichungen in mathematischer Beziehung übersichtlich zu lösen, wird die Querkraft Q_α bei der Untersuchung von Schalen mit konstanter Wanddicke h und veränderlichem Halbmesser $R_\alpha(\alpha)$ durch die Unbekannte $V_\alpha = R_\alpha Q_\alpha$ und bei Schalen mit stetig veränderlicher Wanddicke $h(\alpha)$ durch die Unbekannte $U_\alpha = Q_\alpha R_\alpha / h^2$ ersetzt. Die Wurzeln des Ansatzes lassen sich dann durch geeignete Verknüpfung der Gleichungen allmählich ausschließen, so daß zwei simultane Differentialgleichungen zwischen den Unbekannten V oder U und der Verdrehung ϑ der Meridiantangente entstehen, die sich durch gleichartigen Aufbau auszeichnen. Sie lauten in Symbolen

$$\mathfrak{L}(\vartheta) + \vartheta \cdot F_1(\alpha) = -\lambda_1 U, \quad \mathfrak{L}(U) + U \cdot F_2(\alpha) = \lambda_2 \vartheta + \Phi(\alpha), \quad (1179)$$

Die Buchstaben $\mathfrak{L}(\)$ bezeichnen Differentialoperationen, die Buchstaben $F_1(\alpha)$, $F_2(\alpha)$ bekannte, mit der Schalenform vorgeschriebene Funktionen. Die Buchstaben λ_1, λ_2 sind konstante Größen, die von den elastischen Eigenschaften des Baustoffs abhängen, während die Funktion $\Phi(\alpha)$ mit der Belastung p_y, p_z der Oberfläche verschwindet.

Die vollständige Lösung J enthält neben der allgemeinen Lösung \bar{J} der homogenen Gleichungen (1179) mit $\Phi(\alpha) = 0$ ein partikuläres Integral J_0 des inhomogenen Ansatzes ($\Phi(\alpha) \neq 0$). Dieses stimmt mit großer Genauigkeit mit der Lösung für den Längsspannungszustand der statisch bestimmt abgestützten Schale (Abschn. 80) überein. Daher wird die vollständige Lösung für die biegungssteife Schale durch die Überlagerung der Schnittkräfte $N_{\alpha,0}, N_{\beta,0}, M_{\alpha,0} = M_{\beta,0} = Q_{\alpha,0} = 0$ aus dem Längsspannungszustand mit den Schnittkräften $\bar{N}_\alpha, \bar{N}_\beta, \bar{M}_\alpha, \bar{M}_\beta, \bar{Q}_\alpha$ aus der Randstörung erhalten.

Die allgemeine Lösung des homogenen Ansatzes enthält vier Integrationskonstanten, so daß neben den statischen oder geometrischen Bedingungen des Längsspannungszustandes noch zwei Bedingungen an jedem Schalenrande vorgeschrieben werden können.

- Freier Rand $U = 0, M_\alpha = 0$.
- Frei drehbare Lagerung des Schalenrandes $\Delta r_\alpha = 0, M_\alpha = 0$.
- Eingespannter Schalenrand $\Delta r_\alpha = 0, \vartheta = 0$.
- Bei einer Verbindung des Schalenrandes mit anderen Bauteilen sind die gegenseitige Verschiebung δ_1 und die gegenseitige Verdrehung δ_2 der Anschlußflächen Null.

Geckeler, J. W.: Über die Festigkeit achsensymmetrischer Schalen. Forsch.-Arb. Ing.-Wes. Heft 276. Berlin 1926.

a) Die Kugelschale mit gleichbleibender Wandstärke. Die Krümmung der Mittelfläche ist konstant ($R_\alpha = R_\beta = a$). Dasselbe gilt von der Schalendicke h und daher auch von der Dehnungssteifigkeit D und der Biegungssteifigkeit B ($h = \text{const}, D = \text{const}, B = \text{const}$). Unter diesen Umständen lassen sich durch Verknüpfung von (1177) die allgemeinen Beziehungen zwischen den Komponenten des Verschiebungszustandes der Mittelfläche und der Verzerrung des Schalendifferentials folgendermaßen ergänzen:

$$\vartheta = (\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta) \operatorname{ctg} \alpha - \varepsilon'_\beta, \quad d(\)/d\alpha = (\)'. \quad (1180)$$

Die Schnittkräfte unterliegen den Gleichgewichtsbedingungen (1178). Sie lauten für $R_\alpha = R_\beta = a$

$$\left. \begin{aligned} (N_\alpha \sin \alpha)' - N_\beta \cos \alpha - Q_\alpha \sin \alpha + p_y a \sin \alpha &= 0, \\ (Q_\alpha \sin \alpha)' + N_\alpha \sin \alpha + N_\beta \sin \alpha + p_z a \sin \alpha &= 0, \\ M'_\alpha - (M_\beta - M_\alpha) \operatorname{ctg} \alpha - Q_\alpha a &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1181)$$

Die letzte Bedingung liefert mit (1176), also mit

$$M_\alpha = -\frac{B}{a}(\vartheta' + \mu \vartheta \operatorname{ctg} \alpha), \quad M_\beta = -\frac{B}{a}(\vartheta \operatorname{ctg} \alpha + \mu \vartheta'),$$

$$L(\vartheta) - \mu \vartheta = \vartheta'' + \vartheta' \operatorname{ctg} \alpha - \vartheta \operatorname{ctg}^2 \alpha - \mu \vartheta = -\frac{a^2}{B} Q_\alpha. \quad (1182)$$

Aus den anderen beiden Gleichgewichtsbedingungen folgt

$$N_\alpha = -Q_\alpha \operatorname{ctg} \alpha - \frac{aF}{\sin^2 \alpha}, \quad N_\beta = \frac{aF}{\sin^2 \alpha} - Q_\alpha - p_z a$$

mit

$$dF/d\alpha = p_z \sin \alpha \cos \alpha + p_y \sin^2 \alpha$$

und daher in Verbindung mit (1176) und (1180)

$$L(Q_\alpha) + \mu Q_\alpha = Q_\alpha'' + Q_\alpha' \operatorname{ctg} \alpha - Q_\alpha \operatorname{ctg}^2 \alpha + \mu Q_\alpha = Eh\vartheta - a[p_z' - (1 + \mu)p_y]. \quad (1183)$$

Auf diese Weise ist ein System von zwei simultanen Differentialgleichungen zweiter Ordnung entstanden, aus dem jede der beiden Unbekannten durch Wiederholung der Differentialoperation $L(\quad)$ mit einer Differentialgleichung vierter Ordnung berechnet werden kann. Die Partikularlösung $\vartheta_0, Q_{\alpha 0}$ der vollständigen Gleichung läßt sich nach E. Meißner für die wesentlichen Belastungsfälle angeben. Z. B. wird bei Eigengewicht mit $p_y = g \sin \alpha, p_z = g \cos \alpha$ in (1183)

$$-a[p_z' - (1 + \mu)p_y] = ag(2 + \mu) \sin \alpha.$$

Die simultanen Differentialgleichungen (1182) und (1183) für $\vartheta_0, Q_{\alpha 0}$ werden durch den Ansatz $\vartheta_0 = A_1 \sin \alpha, Q_{\alpha 0} = A_2 \sin \alpha$ erfüllt, wenn

$$A_1 = -\frac{(2 + \mu)a^3 g}{(1 - \mu^2)[1 + 12(a/h)^2]B} = \frac{a^2 A_2}{(1 + \mu)B}.$$

Damit sind $\vartheta_0, Q_{\alpha 0}$ und in Verbindung mit (1176) auch $M_{\alpha 0}, M_{\beta 0}$ bestimmt.

$$M_{\alpha 0} = M_{\beta 0} = -\frac{B}{a} A_1 (1 + \mu) \cos \alpha.$$

Diese Schnittkräfte sind im Vergleich zu dem Anteil aus den Randstörungen nach S. 770 klein von höherer Ordnung und werden daher vernachlässigt. Mit

$$Q_{\alpha 0} = 0, \quad M_{\alpha 0} = 0, \quad M_{\beta 0} = 0$$

stimmt der Spannungszustand der biegesteifen Schale bei statisch bestimmter Stützung mit dem Längsspannungszustand auf S. 751 überein. Dasselbe gilt damit auch für den Verschiebungszustand. Das Ergebnis wiederholt sich bei den Partikularlösungen für die anderen rotationssymmetrischen Belastungsfälle.

Die Schnittkräfte und Verschiebungen der biegesteifen Kugelschale lassen sich daher, wie bereits auf S. 767 bemerkt, mit großer Genauigkeit aus zwei voneinander unabhängigen Anteilen zusammensetzen. Der eine besteht aus den Schnittkräften und Verschiebungen des Längsspannungszustandes durch die vorgeschriebene stetige Belastung, der andere aus den Schnittkräften und Verschiebungen der biegesteifen Schale infolge der Randkräfte $M_{\alpha 2}, Q_{\alpha 2}$ usw., die zur Befriedigung der vorgeschriebenen Stützung notwendig sind.

Die Schnittkräfte und Verschiebungen des Längsspannungszustandes sind für die regelmäßigen Belastungsfälle auf S. 751 ff. angeschrieben. Die Schnittkräfte und Verschiebungen der biegesteifen Kugelschale aus vorgeschriebenen Randkräften werden aus den homogenen Differentialgleichungen (1182), (1183) für $\bar{\vartheta}$ und \bar{Q}_α berechnet.

Das Integral der homogenen Gl. (1182), (1183) kann als Reihenentwicklung angeschrieben werden. Die Lösungen für $\bar{\vartheta}, \bar{Q}_\alpha$ und für alle daraus abgeleiteten Schnittkräfte und Verschiebungen klingen vom Rande aus schnell ab. Da jede Ableitung im

Vergleich zu der nächst höheren Ableitung dann klein von zweiter Ordnung ist, können nach einem Vorschlage von J. W. Geckeler die Funktionen $\bar{\vartheta}$ und $\bar{\vartheta}'$ gegenüber $\bar{\vartheta}''$ in (1182) und die Funktionen \bar{Q}_α und \bar{Q}_α' gegenüber \bar{Q}_α'' in (1183) vernachlässigt werden, um schnell zu einer übersichtlichen, für technische Aufgaben brauchbaren Näherungslösung zu kommen.

Die Näherungslösung für $\bar{\vartheta}(\alpha)$ und $\bar{Q}(\alpha)$ entsteht also aus den Gleichungen

$$\bar{\vartheta}'' = -\frac{a^2}{B} \bar{Q}_\alpha, \quad \bar{Q}_\alpha'' = E h \bar{\vartheta}. \quad (1184)$$

Die Elimination von \bar{Q}_α liefert mit

$$4 k^4 = \frac{a^2}{B} E h = \frac{12(1-\mu^2)a^2}{h^2}, \quad k = \sqrt{\frac{a}{h} \sqrt{3(1-\mu^2)}}, \quad (1185)$$

$$\bar{\vartheta}_\alpha^{IV} + 4 k^4 \bar{\vartheta} = 0. \quad (1186)$$

Durch Elimination von $\bar{\vartheta}$ entsteht

$$\bar{Q}_\alpha^{IV} + 4 k^4 \bar{Q}_\alpha = 0. \quad (1187)$$

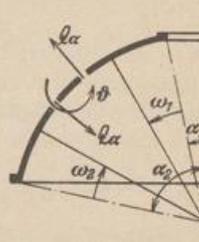


Abb. 806.

Die Gleichungen werden mit dem aus Abschn. 22 bekannten Exponentialansatz gelöst. Da hiernach beide Funktionen $\bar{\vartheta}$, \bar{Q}_α ebenso wie alle daraus abgeleiteten Schnittkräfte und Verschiebungen schnell vom Rande aus abklingen, werden sie je nach der Betrachtung der oberen oder unteren Randzone auf den Winkel $\omega_1 = (\alpha - \alpha_1)$, $d\omega_1 = d\alpha$ oder $\omega_2 = (\alpha_2 - \alpha)$, $d\omega_2 = -d\alpha$ als unabhängiger Veränderlicher bezogen (Abb. 806). Daher ist in beiden Fällen

$$\left. \begin{aligned} \bar{\vartheta} &= e^{-k\omega} (\bar{A}_1 \cos k\omega + \bar{A}_2 \sin k\omega) + e^{k\omega} (\bar{A}_3 \cos k\omega + \bar{A}_4 \sin k\omega), \\ \bar{Q}_\alpha &= e^{-k\omega} (A_1 \cos k\omega + A_2 \sin k\omega) + e^{k\omega} (A_3 \cos k\omega + A_4 \sin k\omega), \end{aligned} \right\} (1188a)$$

oder nach S. 141 auch

$$\bar{Q}_\alpha = C_1 e^{-k\omega} \cos(k\omega + \psi_1) + C_2 e^{k\omega} \cos(k\omega + \psi_2). \quad (1188b)$$

Die Integrationskonstanten \bar{A}_3, \bar{A}_4 und A_3, A_4 oder C_2, ψ_2 einer Lösung für die geschlossene Kugelschale mit $\omega_2 = \alpha_2 - \alpha$ als unabhängiger Veränderlicher sind Null, da die Bedingungen $\vartheta = 0, Q_\alpha = 0$ im Scheitel nur auf diese Weise erfüllt werden können. Die Funktion $\vartheta(\omega)$ und $Q_\alpha(\omega)$ verlaufen daher ebenso wie alle abgeleiteten Funktionen der übrigen Schnittkräfte und Verschiebungen nach gedämpften Schwingungen mit dem Winkel $2\pi/k$ als Schwingungslänge und π als logarithmischem Dekrement. Sie klingen mit wachsendem ω um so schneller ab, je größer k ist. Der Einfluß der von den Randstörungen des Längsspannungszustandes herrührenden Randkräfte $M_{\alpha_2}, Q_{\alpha_2}$ ist daher auf eine schmale Randzone beschränkt. Das Ergebnis läßt sich auch leicht auf Grund des St. Venantschen Prinzips einsehen, da die Randkräfte im Gleichgewicht stehen. Es bestätigt die Richtigkeit der Annahmen für die Näherungslösung, da die zweiten Ableitungen $\bar{\vartheta}'', \bar{Q}_\alpha''$ den Betrag k^2 als Faktor enthalten, und daher als Glieder des linearen Ansatzes (1182) oder (1183) wesentlich größere Bedeutung besitzen als $\bar{\vartheta}', \bar{\vartheta}$ oder $\bar{Q}_\alpha', \bar{Q}_\alpha$.

Die Lösung $\bar{\vartheta}$ und \bar{Q}_α offener Schalen nach (1187) enthält streng genommen vier Integrationskonstante, die aus vier Bedingungen für die Verschiebungen oder für die Schnittkräfte an den beiden Schalenrändern berechnet werden können. Ist die Schalenzone $(\alpha_2 - \alpha_1)$ jedoch breit, so klingen die von jeder Randbelastung herrührenden Komponenten des Spannungs- und Verschiebungszustandes so weit ab, daß je zwei Integrationskonstante A_1, A_2 und A_3, A_4 oder C_1, ψ_1 und C_2, ψ_2 unabhängig voneinander aus

$$\bar{Q}_\alpha = e^{-k\omega} (A_1 \cos k\omega + A_2 \sin k\omega) \quad \text{und} \quad \bar{Q}_\alpha = e^{-k\omega} (A_3 \cos k\omega + A_4 \sin k\omega) \quad (1189)$$

angegeben werden können, je nachdem der Breitenunterschied $\omega_2 = \alpha_2 - \alpha$ oder $\omega_1 = \alpha - \alpha_1$ vom unteren oder oberen Rande gerechnet wird.

Rechenvorschrift. Im Bereiche des oberen Randes der offenen Kugelschale ist

$$\bar{Q}_\alpha = C e^{-k\omega_1} \cos(k\omega_1 + \psi) \quad (1190)$$

im Bereiche des unteren Randes

$$\bar{Q}_\alpha = C e^{-k\omega_2} \cos(k\omega_2 + \psi). \quad (1191)$$

Die Gleichungen bilden die Grundlage für die Berechnung aller Komponenten des Spannungs- und Formänderungszustandes aus den Gleichgewichtsbedingungen (1181) und den Verträglichkeitsbedingungen (1177). Das obere Vorzeichen gilt in der oberen, das untere in der unteren Randzone der Schale.

$$\left. \begin{aligned} \bar{N}_\alpha &= -\bar{Q}_\alpha \operatorname{ctg} \alpha = -C e^{-k\omega} \cos(k\omega + \psi) \operatorname{ctg} \alpha, \\ \bar{N}_\beta &= -\bar{Q}_\alpha = \pm C k \sqrt{2} e^{-k\omega} \sin\left(k\omega + \psi + \frac{\pi}{4}\right), \\ \bar{\vartheta} &= \frac{\bar{Q}'_\alpha}{hE} = +C \frac{2k^2}{hE} e^{-k\omega} \sin(k\omega + \psi), \\ \bar{M}_\alpha &= -\frac{B}{a} (\bar{\vartheta}' + \mu \bar{\vartheta} \operatorname{ctg} \alpha) \approx -\frac{B}{a} \bar{\vartheta}' = \mp C \frac{B}{a h E} 2k^3 \sqrt{2} e^{-k\omega} \cos\left(k\omega + \psi + \frac{\pi}{4}\right), \\ \bar{M}_\beta &= \mu \bar{M}_\alpha - \frac{B \operatorname{ctg} \alpha}{a} \bar{\vartheta}, \\ \bar{\Delta r} &= r_\alpha \bar{\varepsilon}_\beta = \frac{r_\alpha}{hE} (\bar{N}_\beta - \mu \bar{N}_\alpha) = -\frac{r_\alpha}{hE} (\bar{Q}'_\alpha - \mu \bar{Q}_\alpha \operatorname{ctg} \alpha) \approx -\frac{r_\alpha \bar{Q}'_\alpha}{hE}. \end{aligned} \right\} (1192)$$

Die Näherungslösungen für \bar{M}_α und $\bar{\varepsilon}_\beta$ lassen sich ebenso begründen wie die Vernachlässigung von \bar{Q}_α neben \bar{Q}'_α in (1183).

Die Integrationskonstanten C, ψ sind bei starrem Unterbau durch die Stützung der Schale, am oberen Rande durch vorgeschriebene äußere Kräfte bestimmt.

1. Der untere Rand ist unverschieblich, aber frei drehbar gestützt

$$\left. \begin{aligned} \omega = 0, \alpha = \alpha_2: \quad \varepsilon_{\beta 2,0} + \bar{\varepsilon}_{\beta 2} = \varepsilon_{\beta 2} = 0, \\ M_{\alpha 2,0} + \bar{M}_{\alpha 2} = M_{\alpha 2} = 0 = \bar{M}_{\alpha 2}, \end{aligned} \right\} (1193)$$

wenn die Dehnungen des Längsspannungszustandes wieder mit $\varepsilon_{\beta,0}$ bezeichnet werden. Die Biegemomente $M_{\alpha,0}$ sind Null.

$$\left. \begin{aligned} M_{\alpha 2} = C \frac{B}{a h E} 2k^3 \sqrt{2} \cos\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad \text{d. h. } \psi = \frac{\pi}{4}, \\ \varepsilon_{\beta 2} = \varepsilon_{\beta 2,0} - C \frac{k \sqrt{2}}{h E} \sin\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad \text{d. h. } C = \frac{\varepsilon_{\beta 2,0}}{h \sqrt{2}} h E. \end{aligned} \right\} (1194)$$

2. Der untere Rand ist starr eingespannt. $\omega = 0, \alpha = \alpha_2$.

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_2 = \vartheta_{2,0} + C \frac{2k^2}{hE} \sin \psi = 0, \\ \varepsilon_{\beta 2} = \varepsilon_{\beta 2,0} - C \frac{k \sqrt{2}}{h E} \sin\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) = 0, \\ \text{für } \vartheta_{2,0} \approx 0 \text{ ist } \psi = 0 \text{ und } C = \frac{\varepsilon_{\beta 2,0}}{h} h E. \end{aligned} \right\} (1195)$$

3. Der obere Rand ist durch einen starren Druckring abgeschlossen. $\omega = 0, \alpha = \alpha_1$.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\beta 1} &= \varepsilon_{\beta 1,0} + C \frac{k\sqrt{2}}{hE} \sin\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) = 0, \\ \vartheta_1 &= \vartheta_{1,0} + C \frac{2k^2}{hE} \sin\psi = 0, \\ \text{für } \vartheta_{1,0} &\approx 0 \text{ ist } \psi = 0 \text{ und } C = -\frac{\varepsilon_{\beta 1,0}}{k} hE. \end{aligned} \right\} \quad (1196)$$

Damit sind in Verbindung mit (1192) auch alle Komponenten des Spannungs- und Verschiebungszustandes aus einer Randstörung der statisch bestimmt gestützten Schale bekannt (S. 766). Sie werden mit den zugeordneten Komponenten des Längsspannungszustandes überlagert.

Biegungsspannungen am Rand einer Kugelschale bei Belastung durch Eigengewicht.
(Vgl. Abb. 777, $\alpha_2 = 60^\circ$.)

1. Der untere Rand ist unverschieblich, aber frei drehbar gestützt. Nach (1123) ist für den Längsspannungszustand

$$\varepsilon_{\beta,0} = \frac{1}{Eh} (N_{\beta,0} - \mu N_{\alpha,0}) = \frac{ag}{Eh} \frac{1 + \mu - \cos\alpha - \cos^2\alpha}{1 + \cos\alpha} \quad \text{und mit } \mu = \frac{1}{6}, \alpha \rightarrow \alpha_2$$

$$\varepsilon_{\beta,0} = \frac{ag}{Eh} \frac{1,1667 - 0,5 - 0,25}{1 + 0,5} = 0,278 \frac{ag}{Eh}.$$

Für $a/h = 200$ ist nach (1185)

$$k = \sqrt{200 \sqrt{3} \cdot 0,9722} = 18,49,$$

so daß nach (1194)

$$C = ag \frac{0,278}{k\sqrt{2}} = 0,01064 ag, \quad \psi = \frac{\pi}{4}.$$

Die Schnittkräfte nach (1192) infolge der Randstörung werden nun

$$\bar{N}_\alpha = -0,01064 ag e^{-k\omega} \cos\left(k\omega + \frac{\pi}{4}\right) \text{ctg}\alpha,$$

$$\bar{N}_\beta = -0,278 ag e^{-k\omega} \cos(k\omega),$$

$$\bar{M}_\alpha = -0,0815 ag h e^{-k\omega} \sin(k\omega),$$

$$\frac{B \text{ctg}\alpha}{a} \bar{\vartheta} = 0,00311 ag h \text{ctg}\alpha e^{-k\omega} \sin\left(k\omega + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\bar{M}_\beta = \mu \bar{M}_\alpha - \frac{B \text{ctg}\alpha}{a} \bar{\vartheta}.$$

Die Längskräfte \bar{N}_α sind gegenüber $N_{\alpha,0}$ aus dem Längsspannungszustand zu vernachlässigen. Die Längskräfte $N_\beta = N_{\beta,0} + \bar{N}_\beta$ sind in Abb. 807a für die Randzone $50^\circ < \alpha < 60^\circ$ dargestellt. Abb. 807b zeigt die Biegemomente der Randzone.

2. Der untere Rand ist starr eingespannt.

Für den Längsspannungszustand ist nach (1123) und (1126)

$$\varepsilon_{\beta,0} = 0,278 \frac{ag}{Eh}, \quad \vartheta_{2,0} = -\frac{ag}{Eh} (2 + \mu) \sin\alpha_2 = -1,878 \frac{ag}{Eh}.$$

Die Randbedingungen (1195) lauten dann mit $C = C_1 ag$

$$-1,878 + C_1 \cdot 683 \sin\psi = 0,$$

$$0,278 - C_1 26,12 \sin\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

oder

$$-49 \sin\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) + 190,1 \sin\psi = 0,$$

$$\text{tg}\psi = \frac{49}{190,1\sqrt{2} - 49} = 0,223, \quad \psi = 12^\circ 30' \equiv 0,2182,$$

$$C_1 = \frac{1,878}{683 \sin\psi} = 0,0127, \quad C = 0,0127 ag.$$

(Für $\vartheta_{2,0} \approx 0$ ist $\psi = 0$, $C \approx 0,0151 ag$.)

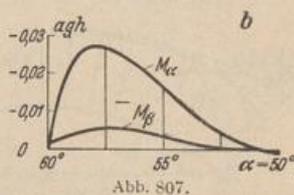
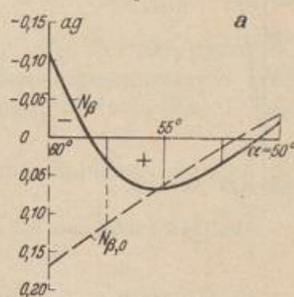
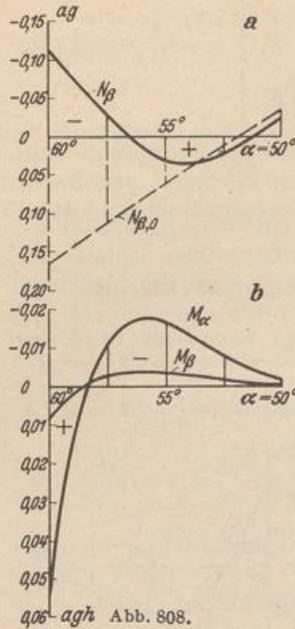


Abb. 807.

Die Schnittkräfte nach (1192) infolge der Randstörung werden nun



$$\begin{aligned} \bar{N}_\alpha &= -0,0127 a g e^{-k\omega} \cos(k\omega + \psi) \operatorname{ctg} \alpha, \\ \bar{N}_\beta &= -0,332 a g e^{-k\omega} \sin\left(k\omega + \psi + \frac{\pi}{4}\right), \\ \bar{M}_\alpha &= 0,0973 a g h e^{-k\omega} \cos\left(k\omega + \psi + \frac{\pi}{4}\right), \\ \frac{B \operatorname{ctg} \alpha}{a} \bar{\vartheta} &= 0,00372 a g h \operatorname{ctg} \alpha e^{-k\omega} \sin(k\omega + \psi), \\ \bar{M}_\beta &= \mu \bar{M}_\alpha - \frac{B \operatorname{ctg} \alpha}{a} \bar{\vartheta}. \end{aligned}$$

Die Schnittkräfte sind für die Randzone $50^\circ < \alpha < 60^\circ$ in Abb. 808 dargestellt.

Schnittkräfte in einem Stützboden bei Wasserauflast $f = 2a$.
(Vgl. Abb. 781, $\alpha_2 = 40^\circ$.)

Der Rand der Schale ist starr eingespannt.
Nach (1132) ist mit $f = 2a$, $\mu = 1/6$, $\alpha_2 = 40^\circ$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\beta 2,0} &= -\frac{1}{Eh} \frac{\gamma a^2}{6} \left[3 \frac{f}{a} (1 - \mu) - 6 \cos \alpha_2 + 2(1 + \mu) \frac{1 - \cos^3 \alpha_2}{\sin^2 \alpha_2} \right] \\ &= -0,585 \frac{\gamma a^2}{Eh}, \\ \vartheta_{2,0} &= \frac{\gamma a^2}{Eh} \sin \alpha_2 = 0,643 \frac{\gamma a^2}{Eh} \end{aligned}$$

Aus (1185) folgt mit $a/h = 25$

$$k = \sqrt{25 \sqrt{3} \cdot 0,9722} = 6,53.$$

Die Randbedingungen (1195) lauten nunmehr mit $C = C_1 \gamma a^2$

$$0,643 + C_1 85,3 \sin \psi = 0,$$

$$-0,585 - C_1 9,22 \sin\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) = 0;$$

oder

$$-5,93 \sin\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) + 49,9 \sin \psi = 0,$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{5,93}{49,9 \sqrt{2} - 5,93} = 0,0917,$$

$$\psi = 5^\circ 14' \equiv 0,0915,$$

$$C_1 = -0,0826, \quad C = -0,0826 \gamma a^2.$$

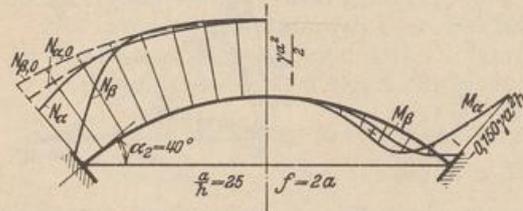


Abb. 809. Schnittkräfte im eingespannten Stützboden.

(Für $\vartheta_{2,0} \approx 0$ ist $\psi = 0$, $C \approx -0,0896 \gamma a^2$.)

Die Schnittkräfte infolge der Randstörung sind nach (1192)

$$\begin{aligned} \bar{N}_\alpha &= 0,0826 \gamma a^2 e^{-k\omega} \cos(k\omega + \psi) \operatorname{ctg} \alpha, \\ \bar{N}_\beta &= 0,762 \gamma a^2 e^{-k\omega} \sin\left(k\omega + \psi + \frac{\pi}{4}\right), \\ \bar{M}_\alpha &= -0,223 \gamma a^2 h e^{-k\omega} \cos\left(k\omega + \psi + \frac{\pi}{4}\right), \\ \frac{B \operatorname{ctg} \alpha}{a} \bar{\vartheta} &= -0,0242 \gamma a^2 h \operatorname{ctg} \alpha e^{-k\omega} \sin(k\omega + \psi), \\ \bar{M}_\beta &= \mu \bar{M}_\alpha - \frac{B \operatorname{ctg} \alpha}{a} \bar{\vartheta}. \end{aligned}$$

Die Schnittkräfte sind in Abb. 809 dargestellt.

Verbindung einer Kugelschale mit verwandten Tragwerken. Der Spannungszustand eines elastischen Gebildes aus einer Kugelschale mit verwandten Tragwerken erfährt keine Änderung, wenn die Verbindung am Anschluß der Kugel-

schale durch einen Breitenschnitt gelöst wird und die inneren Kräfte an beiden Ufern als äußere Kräfte zur Belastung hinzutreten. Diese sind rotationssymmetrisch, die Längskraft N_α nach S. 745 aus den Gleichgewichtsbedingungen bekannt, die Querkraft Q_α oder ihre waagerechte Komponente $H = X_1$ und das Anschlußmoment $M_\alpha = X_2$ statisch unbestimmt. Sie lassen sich aus der Bedingung berechnen, daß die gegenseitige Verschiebung δ_1 (positiv im Sinne von X_1) und die gegenseitige Verdrehung δ_2 (positiv im Sinne von X_2) der beiden Ufer des Breitenschnittes Null sein müssen, wenn die Formänderung des vorgegebenen Flächentragwerks mit der Formänderung des Hauptsystems durch die Belastung und die überzähligen Schnittkräfte X_1, X_2 übereinstimmt. Diese wird ebenso wie in Abschn. 24 als virtuelle Arbeit berechnet. Nach Abb. 810 ist

$$I_1 \delta_1 = I_1 (\delta_{10} + X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12}) = 0,$$

$$I_2 \delta_2 = I_2 (\delta_{20} + X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22}) = 0.$$

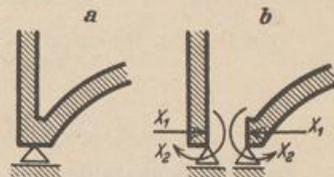


Abb. 810.

Jede Komponente δ_{10}, δ_{11} usw. des Verschiebungszustandes besteht aus zwei Teilen ($\delta_{10} = \delta_{10,1} + \delta_{10,2}$, $\delta_{11} = \delta_{11,1} + \delta_{11,2}$ usw.), von denen $\delta_{10,1}, \delta_{11,1}$ usw. durch die Formänderung der Kugelschale, $\delta_{10,2}, \delta_{11,2}$ usw. durch die Formänderung des angeschlossenen Tragwerks, also durch die Formänderung torsionssteifer Ringe, Platten, Kegel- oder Zylinderschalen hervorgerufen werden.

Die Vorzahlen $\delta_{11,1}, \delta_{12,1}$ werden aus (1192) für die Randbedingungen der Abb. 810 berechnet.

1. Belastungszustand $X_1 = 1$ (Abb. 810).

Randbedingungen:

$$M_{\alpha 2,1} = 0, \quad Q_{\alpha 2,1} = -\sin \alpha_2; \quad \psi = \frac{\pi}{4}, \quad C = -\sqrt{2} \sin \alpha_2.$$

$$\delta_{11,1} = \frac{2ka}{Eh} \sin^2 \alpha_2, \quad \delta_{21,1} = -\frac{2k^2}{Eh} \sin \alpha_2. \quad (1197)$$

Schnittkräfte nach (1192).

$$\left. \begin{aligned} N_{\alpha,1} &= \sqrt{2} \sin \alpha_2 e^{-k\omega} \cos \left(k\omega + \frac{\pi}{4} \right) \operatorname{ctg} \alpha, \\ N_{\beta,1} &= 2k \sin \alpha_2 e^{-k\omega} \cos(k\omega), \\ \vartheta_{\alpha,1} &= -\frac{2\sqrt{2}k^2}{hE} e^{-k\omega} \sin \alpha_2 \sin \left(k\omega + \frac{\pi}{4} \right), \\ M_{\alpha,1} &= \frac{kh}{\sqrt{3}(1-\mu^2)} e^{-k\omega} \sin \alpha_2 \sin(k\omega), \\ Q_{\alpha,1} &= -\sqrt{2} e^{-k\omega} \sin \alpha_2 \cos \left(k\omega + \frac{\pi}{4} \right), \\ \Delta r_{\alpha,1} &= \frac{2ka}{Eh} \sin \alpha_2 e^{-k\omega} \cos(k\omega) \sin \alpha. \end{aligned} \right\} (1198)$$

2. Belastungszustand $X_2 = 1$ (Abb. 810).

Randbedingungen:

$$M_{\alpha 2,2} = -1, \quad Q_{\alpha 2,2} = 0; \quad \psi = \frac{\pi}{2}, \quad C = \frac{ahE}{2k^3B}.$$

$$\delta_{22,1} = \frac{a}{kB}, \quad \delta_{12,1} = -\frac{a^2}{2k^2B} \sin \alpha_2 = -\frac{2k^2}{Eh} \sin \alpha_2. \quad (1199)$$

Schnittkräfte nach (1192).

$$\left. \begin{aligned} N_{\alpha,2} &= \frac{a h E}{2 k^3 B} e^{-k\omega} \sin(k\omega) \operatorname{ctg} \alpha, \\ N_{\beta,2} &= -\frac{a h E}{\sqrt{2} k^3 B} e^{-k\omega} \cos\left(k\omega + \frac{\pi}{4}\right), \\ \vartheta_{\alpha,2} &= \frac{a}{k B} e^{-k\omega} \cos(k\omega), \\ M_{\alpha,2} &= -\sqrt{2} e^{-k\omega} \sin\left(k\omega + \frac{\pi}{4}\right), \\ Q_{\alpha,2} &= -\frac{a h E}{2 k^3 B} e^{-k\omega} \sin(k\omega), \\ \Delta r_{\alpha,2} &= -\frac{a^2}{\sqrt{2} k^3 B} e^{-k\omega} \sin \alpha \cos\left(k\omega + \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned} \right\} (1200)$$

Die Belastungszahlen $\delta_{10,1}$, $\delta_{20,1}$ gelten für die nach Abb. 810 b abgestützte Kugelschale. Ihr Spannungszustand ist statisch unbestimmt, da die Stützkkräfte nicht tangential zur Mittelfläche eingetragen werden. Hierzu ist noch eine Schubkraft $H = -N_{\alpha} \cos \alpha$ notwendig (vgl. S. 752). Die Belastungszahlen werden daher in die Anteile $\bar{\delta}_{10,1}$, $\bar{\delta}_{20,1}$ für die statisch bestimmt gestützte Kugelschale und die Anteile $\delta'_{10,1}$, $\delta'_{20,1}$ für die Kugelschale mit den Randkräften $X_1 = H$, $X_2 = 0$ zerlegt. Die Anteile $\bar{\delta}_{10,1}$, $\bar{\delta}_{20,1}$ sind nahezu die gleichen wie beim Membranzustand und daher nach S. 751 ff. bekannt. Die Anteile $\delta'_{10,1}$, $\delta'_{20,1}$ sind mit (1197)

$$\delta'_{10,1} = H \delta_{11,1}, \quad \delta'_{20,1} = H \delta_{21,1}. \quad (1201)$$

Damit lauten die vollständigen Belastungszahlen

$$\delta_{10,1} = \bar{\delta}_{10,1} + \delta'_{10,1}, \quad \delta_{20,1} = \bar{\delta}_{20,1} + \delta'_{20,1}.$$

Bolle, E.: Festigkeitsberechnung von Kugelschalen. Zürich 1916. — Lichtenstern, E.: Die biegegesteifste Kugelschale mit linear veränderlicher Wandstärke. Z. angew. Math. Mech. 1932 S. 347.

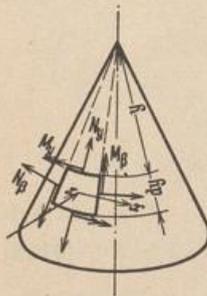


Abb. 811.

b) Die biegegesteife Kegelschale mit gleichbleibender Wandstärke. Der Krümmungshalbmesser R_{β} ist unendlich, der Winkel α konstant und daher nicht mehr als ortsbestimmende Koordinate geeignet. Er wird durch den Abschnitt y der Mantellinie ersetzt, so daß $ds = R_{\beta} d\alpha = dy$, $R_{\alpha} = y \operatorname{ctg} \alpha$. Damit lassen sich die allgemeinen Beziehungen (1176), (1177) zwischen den Komponenten des Spannungs- und Verschiebungszustandes mit ()' für $d()/dy$ folgendermaßen anschreiben:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\alpha} = \varepsilon_{\nu} = v', \quad \varepsilon_{\beta} = \frac{v - w \operatorname{tg} \alpha}{y}, \quad \kappa_{\alpha} = \kappa_{\nu} = \vartheta', \\ \kappa_{\beta} = \frac{\vartheta}{y}, \quad \vartheta = w', \end{aligned} \right\} (1202)$$

$$\left. \begin{aligned} N_{\nu} = D \left(v' + \mu \frac{v - w \operatorname{tg} \alpha}{y} \right), \quad N_{\beta} = D \left(\frac{v - w \operatorname{tg} \alpha}{y} + \mu v' \right), \quad D = \frac{h E}{1 - \mu^2}, \\ M_{\nu} = -B \left(\vartheta' + \mu \frac{\vartheta}{y} \right), \quad M_{\beta} = -B \left(\mu \vartheta' + \frac{\vartheta}{y} \right), \quad B = \frac{E h^3}{12 (1 - \mu^2)}. \end{aligned} \right\} (1203)$$

Belastung und Schnittkräfte eines differentialen Schalenabschnitts unterliegen den Gleichgewichtsbedingungen (1178). Sie lauten für die Längskräfte

$$(N_{\nu} y)' - N_{\beta} + p_{\nu} y = 0 \quad \text{und} \quad (Q_{\nu} y)' + N_{\beta} \operatorname{tg} \alpha + p_z y = 0 \quad (1204)$$

oder in einer Gleichung zusammengefaßt und integriert

$$(N_{\nu} \operatorname{tg} \alpha + Q_{\nu}) y + \int (p_{\nu} \operatorname{tg} \alpha + p_z) y dy + c = 0. \quad (1205)$$

Dazu tritt

$$(M_y y)' - M_\beta - Q_y y = 0 \quad \text{oder} \quad y M_y' + M_y - M_\beta - Q_y y = 0. \quad (1206)$$

Aus dieser wird mit (1203)

$$y \vartheta'' + \vartheta' - \frac{\vartheta}{y} = -\frac{Q_y y}{B}. \quad (1207)$$

Durch die Verknüpfung der Beziehungen (1202) entsteht

$$(y \varepsilon_\beta)' = \varepsilon_y - \vartheta \operatorname{tg} \alpha. \quad (1208)$$

Die Dehnungen ε_β und ε_y werden aus (1104) berechnet. Hierin ist nach (1204)

$$N_\beta = -(Q_y y)' \operatorname{ctg} \alpha - p_z y \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$N_y = -Q_y \operatorname{ctg} \alpha - \frac{F}{y} \operatorname{ctg} \alpha \quad \text{mit} \quad F(y) = \int (p_y \operatorname{tg} \alpha + p_z) y dy + c.$$

Damit N_y für $y = 0$ endlich bleibt, ist die Integrationskonstante c für die geschlossene Kegelschale Null. Auf diese Weise kann aus (1208) die folgende zu (1207) simultane Differentialgleichung entwickelt werden:

$$\text{mit} \quad \left. \begin{aligned} y(Q_y y)'' + (Q_y y)' - \frac{(Q_y y)}{y} &= h E \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \vartheta + \Phi(y) \\ \Phi(y) &= \frac{F(y)}{y} + \mu y p_y \operatorname{tg} \alpha - (p_z y^2)' \end{aligned} \right\} \quad (1209)$$

Die Lösung ϑ, Q_y besteht aus dem allgemeinen Integral der beiden homogenen Gleichungen (1207) und (1209) und aus einem partikulären Integral der inhomogenen Gleichungen, das sich für Eigengewicht $p_y = g \sin \alpha$, $p_z = g \cos \alpha$ folgendermaßen entwickeln läßt:

$$F(y) = \frac{g y^2}{2 \cos \alpha}, \quad \Phi(y) = (1 + 2\mu \sin^2 \alpha - 4 \cos^2 \alpha) \frac{g y}{2 \cos \alpha} = g_1 y. \quad (1210)$$

Wird $Q_{y0} = 0$ und $\vartheta_0 = A_1 y$ angenommen, so ergeben

$$A_1 = -\frac{g_1 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{h E}, \quad \vartheta_0 = -\frac{g_1 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{h E} y \quad (1211)$$

eine partikuläre Lösung von (1207), (1209). Aus dieser folgt mit (1203)

$$Q_{y0} = 0, \quad M_{y0} = M_{\beta 0} = \frac{g_1 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 - \mu} \cdot \frac{h^2}{12} = \text{const.} \quad (1212)$$

Die Biegungsspannungen einer statisch bestimmt gestützten Kegelschale (Abb. 786) sind also im Vergleich zu dem Anteil aus den Randstörungen nach S. 776 klein von höherer Ordnung. Der Spannungs- und Verschiebungszustand kann daher durch die Angaben auf S. 756 ff. für den Längsspannungszustand beschrieben werden. Das gleiche gilt von allen rotationssymmetrischen Belastungsfällen.

Die Integration der homogenen simultanen Differentialgleichungen

$$y \bar{\vartheta}'' + \bar{\vartheta}' - \frac{\bar{\vartheta}}{y} = -\frac{\bar{Q}_y y}{B}, \quad y(\bar{Q}_y y)'' + (\bar{Q}_y y)' - \frac{(\bar{Q}_y y)}{y} = h E \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \bar{\vartheta} \quad (1213)$$

$$\text{oder} \quad y^2 \bar{Q}_y'' + 3y \bar{Q}_y' = h E \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \bar{\vartheta}$$

kann nach den Bemerkungen auf S. 769 vereinfacht werden, da die Funktionen $\bar{\vartheta}, \bar{\vartheta}'$ und \bar{Q}_y, \bar{Q}_y' im Vergleich zu den Ableitungen $\bar{\vartheta}'' \bar{Q}_y''$ klein von zweiter Ordnung sind. Der elastische Zusammenhang läßt sich daher mit großer Genauigkeit durch die Gleichungen

$$\bar{\vartheta}'' = -\bar{Q}_y/B, \quad y^2 \bar{Q}_y'' = h E \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \bar{\vartheta} \quad (1214)$$

beschreiben, so daß entweder $\bar{\vartheta}$ oder \bar{Q}_y eliminiert und aus einer der folgenden Gleichungen berechnet werden kann:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\vartheta}^{IV} + \frac{hE \operatorname{tg}^2 \alpha}{B y^2} \bar{\vartheta} &= 0, & (y^2 \bar{Q}_y'')' + \frac{hE \operatorname{tg}^2 \alpha}{B} \bar{Q}_y &= 0 \\ \text{oder} & & (y V'')' + \frac{hE \operatorname{tg}^2 \alpha}{B y} V &= 0 \quad \text{mit} \quad y \bar{Q}_y = \bar{V}. \end{aligned} \right\} \quad (1215)$$

Die erste Gleichung stimmt bis auf den Beiwert $hE \operatorname{tg}^2 \alpha / B y^2 = 4k^4 = 4/L^4$ mit (1186) überein. Dieser ist im Vergleich zu (1185) nicht mehr konstant, sondern eine mit y veränderliche, vorgeschriebene Funktion. Da die Integration aus diesem Grunde in der Regel Schwierigkeiten bereitet, zerlegt man den Bereich $l-a$ nach J. W. Geckeler durch Breitenschnitte in Zonen mit annähernd konstantem L und begnügt sich mit dieser Näherungslösung. Dabei kann die Vorzahl $4/L^4$ in den beiden Randzonen mit $y=a$ oder $y=l$ gebildet werden. Die ortsbestimmende Koordinate des Winkels ϑ wird auf den oberen Rand ($s_1 = y - a$, $ds_1 = dy$) oder auf den unteren Rand ($s_2 = l - y$, $ds_2 = -dy$) bezogen, je nachdem die Untersuchung den Spannungen am oberen oder unteren Rande gilt (Abb. 812). Die Gleichungen (1215) lauten also

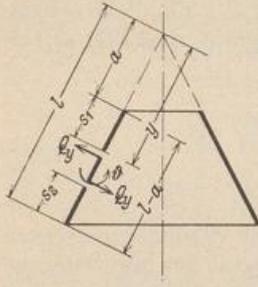


Abb. 812.

$$\frac{d^4 \bar{\vartheta}}{ds_1^4} + \frac{hE \operatorname{tg}^2 \alpha}{B a^2} \bar{\vartheta} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d^4 \bar{\vartheta}}{ds_2^4} + \frac{hE \operatorname{tg}^2 \alpha}{B l^2} \bar{\vartheta} = 0$$

oder mit

$$\frac{1}{L_1^4} = \frac{3(1-\mu^2)}{a^2 h^2} \operatorname{tg}^2 \alpha \quad \text{und} \quad \frac{1}{L_2^4} = \frac{3(1-\mu^2)}{l^2 h^2} \operatorname{tg}^2 \alpha \quad (1216)$$

allgemein

$$\frac{d^4 \bar{\vartheta}}{ds^4} + \frac{4}{L^4} \bar{\vartheta} = 0 \quad \text{und mit} \quad \frac{s}{L} = \eta \quad \text{auch} \quad \frac{d^4 \bar{\vartheta}}{d\eta^4} + 4 \bar{\vartheta} = 0. \quad (1217)$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist auf S. 769 erörtert worden. Sie enthält vier Integrationskonstante, von denen bei geschlossener Kegelschale C_2 , ψ_2 wiederum Null sind, da die Verdrehung $\bar{\vartheta}$ und die Querkraft \bar{Q}_y aus Symmetriegründen an der Spitze Null sein müssen. Die Lösung der Differentialgleichung lautet dann $\bar{\vartheta} = e^{-\eta}(A_1 \cos \eta + A_2 \sin \eta)$ oder $\bar{\vartheta} = e^{-\eta} C_1 \cos(\eta + \psi_1)$, $\eta = s_2/L_2$. (1218)

Die Integrationskonstanten A_1 , A_2 oder C_1 , ψ_2 sind durch die Randbedingungen bestimmt.

a) Frei drehbare, unverschiebliche Stützung des Randes:

$$\varepsilon_\beta = \varepsilon_{\beta 0} + \bar{\varepsilon}_\beta = 0, \quad \vartheta' = \vartheta'_0 + \bar{\vartheta}' = 0. \quad (1219)$$

b) Starre Einspannung des Randes:

$$\varepsilon_\beta = \varepsilon_{\beta 0} + \bar{\varepsilon}_\beta = 0, \quad \vartheta = \vartheta_0 + \bar{\vartheta} = 0. \quad (1220)$$

Mit $\bar{\vartheta}$ sind auch die Schnittkräfte aus der statisch unbestimmten Stützung der Kegelschale bekannt (1203).

$$\bar{M}_y = -B \bar{\vartheta}', \quad \bar{M}_\beta = -B(\mu \bar{\vartheta}' + \bar{\vartheta}/y), \quad \bar{Q}_y = -B \bar{\vartheta}'', \quad \bar{N}_y = -\bar{Q}_y \operatorname{ctg} \alpha, \quad \bar{N}_\beta = (\bar{N}_y y)'. \quad (1221)$$

Sie klingen um so schneller vom Rande aus ab, je größer η ist, und bilden zusammen mit den Schnittkräften des Längsspannungszustandes aus der Belastung (S. 756 ff.) das endgültige Ergebnis.

$$M_y = \bar{M}_y, \quad N_y = N_{y0} + \bar{N}_y, \quad \text{usw.} \quad (1222)$$

Die Gleichung (1218) dient auch zur Berechnung des Spannungs- und Verschiebungszustandes der Kegelschale für eine vorgeschriebene Belastung durch Randkräfte $X_1 = 1$, $X_2 = 1$ (Abb. 813 u. 814). Das Ergebnis wird bei der Berechnung von zusammengesetzten elastischen Tragwerken (Abb. 825 u. 828) verwendet.

a) Unterer Rand (Abb. 813).

Belastung $X_1 = 1$.

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{2L^2}{L_2 E h} \cos^2 \alpha, & \delta_{21} &= -\frac{L_2^2}{2B} \sin \alpha, \\ \bar{\vartheta} &= -\frac{L_2^2}{2B} e^{-\eta_2} \sin \alpha (\sin \eta_2 + \cos \eta_2), \\ \Delta \bar{r}_z &= \frac{2y^2 \cos^2 \alpha}{L_2 E h} e^{-\eta_2} \cos \eta_2, \\ \bar{M}_y &= L_2 e^{-\eta_2} \sin \alpha \sin \eta_2, \\ \bar{Q}_y &= e^{-\eta_2} \sin \alpha (\sin \eta_2 - \cos \eta_2). \end{aligned} \right\} (1223)$$

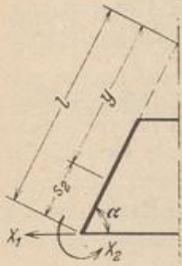


Abb. 813.

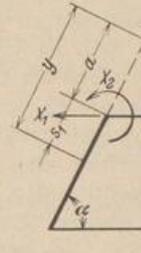


Abb. 814.

Belastung $X_2 = 1$.

$$\left. \begin{aligned} \delta_{12} &= -\frac{L_2^2}{2B} \sin \alpha, & \delta_{22} &= \frac{L_2^2}{B}, \\ \bar{\vartheta} &= \frac{L_2}{B} e^{-\eta_2} \cos \eta_2, & \Delta \bar{r}_z &= \frac{2y^2 \cos^2 \alpha}{L_2^2 E h \sin \alpha} e^{-\eta_2} (\sin \eta_2 - \cos \eta_2), \\ \bar{M}_y &= -e^{-\eta_2} (\sin \eta_2 + \cos \eta_2), & \bar{Q}_y &= -\frac{2}{L_2} e^{-\eta_2} \sin \eta_2. \end{aligned} \right\} (1224)$$

b) Oberer Rand (Abb. 814).

Belastung $X_1 = 1$.

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{2a^2}{L_1 E h} \cos^2 \alpha, & \delta_{21} &= \frac{L_1^2}{2B} \sin \alpha, \\ \bar{\vartheta} &= \frac{L_1^2}{2B} e^{-\eta_1} \sin \alpha (\sin \eta_1 + \cos \eta_1), & \Delta \bar{r}_z &= \frac{2y^2 \cos^2 \alpha}{L_1 E h} e^{-\eta_1} \cos \eta_1, \\ \bar{M}_y &= L_1 e^{-\eta_1} \sin \alpha \sin \eta_1, & \bar{Q}_y &= -e^{-\eta_1} \sin \alpha (\sin \eta_1 - \cos \eta_1). \end{aligned} \right\} (1225)$$

Belastung $X_2 = 1$.

$$\left. \begin{aligned} \delta_{12} &= \frac{L_1^2}{2B} \sin \alpha, & \delta_{22} &= \frac{L_1}{B}, \\ \bar{\vartheta} &= \frac{L_1}{B} e^{-\eta_1} \cos \eta_1, & \Delta \bar{r}_z &= -\frac{2y^2 \cos^2 \alpha}{L_1^2 E h \sin \alpha} e^{-\eta_1} (\sin \eta_1 - \cos \eta_1), \\ \bar{M}_y &= e^{-\eta_1} (\sin \eta_1 + \cos \eta_1), & \bar{Q}_y &= -\frac{2}{L_1} e^{-\eta_1} \sin \eta_1. \end{aligned} \right\} (1226)$$

Werden die Randkräfte X_1 , X_2 , mit einem anderen Richtungssinn als in Abb. 813 und 814 festgelegt, verwendet, so sind die Vorzeichen in (1223) bis (1226) entsprechend abzuändern. Für die Belastungszahlen gelten die Bemerkungen auf S. 774. (Vgl. auch die Beispiele auf S. 786 ff.)

Um die Näherungslösung (1218) mit konstantem L nach S. 776 zu verbessern, wird die Gleichung (1217) schrittweise für schmale, etwa 0,5 m breite Zonen $k-1$, k und Mittelwerte $1/L_k$ usw. aus den Abmessungen der Zonen angeschrieben. Zur Berechnung der Integrationskonstanten der Gleichung für die Randzone 1 dienen die Stützenbedingungen. Die Gleichung (1218) liefert die Randbedingungen für die Lösung der zweiten Zone. Die einzelnen Schritte der Rechenvorschrift sind also voneinander unabhängig, so daß keine mathematischen Schwierigkeiten entstehen.

Die allgemeine Lösung (1188b) der Differentialgleichung für die offene Kegelschale mit den Breitenkreisen r_1 , r_2 enthält vier Integrationskonstante C_1 , ψ_1 und C_2 , ψ_2 , die aus den vier Bedingungengleichungen für den Ver-

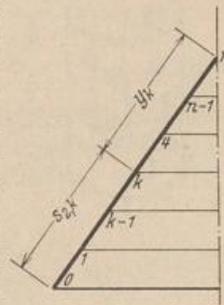


Abb. 815.

schiebungs- und Spannungszustand an den beiden Rändern bestimmt werden müssen. Da jedoch die Wirkung aus den Randstörungen schnell abklingt, genügt bei offenen Kegelschalen mit $5r_1 < r_2$ eine Näherungslösung, bei welcher die Integrationskonstanten C_1, ψ_1 zunächst ebenso wie bei der geschlossenen Kegelschale für $C_2 = 0, \psi_2 = 0$ bestimmt werden, um sie bei der Berechnung der Integrationskonstanten C_2, ψ_2 aus der vollständigen Lösung mit den Bedingungen am Rande $y = a$ zu verwenden.

Um die elastischen Eigenschaften der Kegelschale mit denjenigen der Zylinderschale zu vergleichen, können die allgemeinen Differentialgleichungen für die Spannungen und Verschiebungen auf S. 774 nach F. Kann auch dadurch vereinfacht werden, daß die Biegesteifigkeit der Schale im Breitenschnitt, die Quersummenziehung des Baustoffs und die Verschiebung v des Breitenschnittes in Richtung der y -Achse vernachlässigt werden ($M_\beta = 0, \mu = 0, v = 0$). In diesem Falle folgt aus den Gleichgewichtsbedingungen auf S. 774

$$\left. \begin{aligned} (M_y y)'' = (Q_y y)' = -N_\beta \operatorname{tg} \alpha - p_z y \quad \text{und mit } N_\beta = -D \frac{w}{y} \operatorname{tg} \alpha \\ B (y w'')'' + w \frac{D \operatorname{tg}^2 \alpha}{y} - p_z y = 0. \end{aligned} \right\} (1227)$$

Diese Differentialgleichung der Biegelinie des Meridians zerfällt nach H. Reißner in zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die mit Zylinderfunktionen integriert werden können.

Um die mathematischen Schwierigkeiten bei der Integration der Differentialgleichungen (1207) und (1209) zu umgehen, können die Ableitungen der Funktionen $\vartheta, Q_y, y^2 Q_y''$ in den Differentialgleichungen (1213) und in den Differentialbeziehungen (1221) der Schnittkräfte nach S. 130 durch Differenzenquotienten ersetzt werden, so daß fünfgliedrige Differenzgleichungen entstehen. Diese werden für die Intervallgrenzen einer Aufteilung des Integrationsbereichs $l - a$ in Strecken Δy angeschrieben und bilden zusammen mit den Randbedingungen in den Breitenschnitten $y = a$ und $y = l$ einen vollständigen Ansatz zur eindeutigen Berechnung der Unbekannten. Die Rechenvorschrift dient auf S. 789 zur Untersuchung des Spannungszustandes einer Zylinderschale mit veränderlicher Wanddicke.

Dubois, F.: Über die Festigkeit der Kegelschale. Diss. Zürich 1917. — Honegger, E.: Festigkeitsberechnung von Kegelschalen mit linear veränderlicher Wandstärke. Luzern 1919. — Kann, F.: Kegelförmige Behälterböden, Dächer und Silotrichter. Forscherarb. Eisenbeton Heft 29. Berlin 1921.

c) Die Zylinderschale. Grundlagen der Lösung. Die allgemeinen Beziehungen (1177) zwischen Verzerrung und Verschiebung der Mittelfläche werden durch die geometrischen Eigenschaften der Zylinderschale $R_\beta = \infty, R_\beta d\alpha = dy, \alpha = 90^\circ, \operatorname{ctg} \alpha = 0, R_\alpha = a = \operatorname{const}$ vereinfacht. Mit der Abkürzung $(\)'$ für $d(\)/dy$ ist nach (1177)

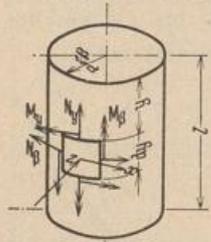


Abb. 816.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\alpha = \varepsilon_y = v', \quad \varepsilon_\beta = -\frac{w}{a}, \quad \varkappa_\alpha = \varkappa_y = \vartheta', \quad \varkappa_\beta = 0, \\ \vartheta = w' = -a \left(\frac{N_\beta - \mu N_y}{E h} \right)', \end{aligned} \right\} (1228)$$

so daß die Schnittkräfte nach dem Hookeschen Gesetz (1176) folgendermaßen angeschrieben werden können:

$$\left. \begin{aligned} N_y = D \left(v' - \mu \frac{w}{a} \right), \quad N_\beta = D \left(-\frac{w}{a} + \mu v' \right), \quad M_y = -B \vartheta', \quad M_\beta = -\mu B \vartheta', \\ D = \frac{E h}{1 - \mu^2}, \quad B = \frac{E h^3}{12(1 - \mu^2)}. \end{aligned} \right\} (1229)$$

Sie unterliegen den Gleichgewichtsbedingungen (1178)

$$N'_y + p_y = 0, \quad Q'_y + \frac{N'_z}{a} + p_z = 0, \quad M'_y - Q_y = 0. \quad (1230)$$

Lösung für unveränderliche Wandstärke h . Die Steifigkeit D der Schale gegen Dehnung und ihre Steifigkeit B gegen Biegung sind konstant. In diesem Falle liefert die dritte Gleichgewichtsbedingung (1230) und die Zusammenfassung der ersten beiden Gleichgewichtsbedingungen in Verbindung mit (1228) und (1229) zwei simultane totale Differentialgleichungen.

$$\vartheta'' = -\frac{Q_y}{B}, \quad Q''_y = \frac{D(1-\mu^2)}{a^2} \vartheta - p'_z + \frac{\mu}{a} p_y. \quad (1231)$$

Durch die Elimination der einen Unbekannten entsteht die Differentialgleichung für die andere.

$$\left. \begin{aligned} \vartheta^{IV} + \frac{4}{L^4} \vartheta &= \frac{1}{B} \left(p'_z - \frac{\mu}{a} p_y \right), & Q^{IV}_y + \frac{4}{L^4} Q_y &= - \left(p'_z - \frac{\mu}{a} p_y \right)'' \\ \frac{1}{L^4} &= \frac{3(1-\mu^2)}{h^2 \cdot a^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1232)$$

Die Verknüpfung von $M'_y = Q'_y$ mit den übrigen Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen liefert die Differentialgleichung der Biegelinie des Meridians

$$w^{IV} + \frac{4}{L^4} w = \frac{1}{B} \left(p_z + \mu \frac{N_y}{a} \right), \quad N_y = - \int p_y dy + C. \quad (1233)$$

Die vollständige Lösung der Differentialgleichungen für Q_y oder w besteht aus einem von der Belastung p_y, p_z abhängigen partikulären Integral Q_{y0}, w_0 der inhomogenen Gleichung und aus der allgemeinen Lösung \bar{Q}_y, \bar{w} der homogenen Gleichung mit vier Integrationskonstanten.

$$Q_y = Q_{y0} + \bar{Q}_y \quad w = w_0 + \bar{w}. \quad (1234)$$

Flüssigkeitsfüllung:

$$p_y = 0, \quad N_y = 0, \quad p_z = -\gamma y, \quad Q_{y0} = 0, \quad w_0 = -\frac{L^4}{4B} \gamma y = -\frac{a^2}{Eh} \gamma y. \quad (1235)$$

Füllgut im Sinne von S. 14:

$$\left. \begin{aligned} p_y = 0, \quad N_y = 0, \quad p_z &= -p_{s, \max} (1 - e^{-y/y_0}), & Q_{y0} &= \frac{p_{s, \max} y_0}{1 + 4 \left(\frac{y_0}{L} \right)^4} e^{-y/y_0}, \\ w_0 &= -p_{s, \max} \left[\frac{a^2}{Eh} - \frac{1}{B} \frac{y_0^4}{1 + 4 \left(\frac{y_0}{L} \right)^4} e^{-y/y_0} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (1236)$$

Die homogenen Differentialgleichungen

$$\frac{d^4 \bar{Q}_y}{d(y/L)^4} + 4 \bar{Q}_y = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d^4 \bar{w}}{d(y/L)^4} + 4 \bar{w} = 0 \quad (1237)$$

sind auf S. 769 gelöst worden. Das Ergebnis \bar{Q}_y, \bar{w} unterscheidet sich allein durch die Bedeutung der Integrationskonstanten. Sind diese aus den Randbedingungen bestimmt worden, so lassen sich alle Komponenten des Spannungs- und Verschiebungszustandes anschreiben. Aus $Q_y(y)$ wird

$$\left. \begin{aligned} N_y &= - \int p_y dy + C, & E h w &= a^2 (Q'_y + p_z) + \mu a N_y, \\ N_\beta &= -a (Q'_y + p_z), & E h \vartheta &= a^2 (Q''_y + p'_z) - \mu a p_y. \end{aligned} \right\} \quad (1238)$$

Aus $w(y)$ folgt

$$\left. \begin{aligned} N_y &= - \int p_y dy + C, & N_\beta &= -E h \frac{w}{a} + \mu N_y, & \vartheta &= w', \\ M_y &= -B w'', & M_\beta &= -\mu B w'', & Q_y &= -B w'''. \end{aligned} \right\} \quad (1239)$$

Die Untersuchung wird daher auf die Ableitung des Spannungszustandes aus den Verschiebungen w beschränkt. Nach Abb. 816 ist mit (1237)

$$\frac{L^4}{l^4} \frac{d^4 \bar{w}}{d(y/l)^4} + 4 \bar{w} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d^4 \bar{w}}{d(\lambda \eta)^4} + 4 \bar{w} = 0, \quad \lambda = \frac{l}{L}, \quad \eta = \frac{y}{l}. \quad (1240)$$

Der Buchstabe L bezeichnet eine für jede Zylinderschale charakteristische Länge, welche von den Abmessungen des Breitenschnittes und von den elastischen Eigenschaften des Baustoffs abhängt. Sie beträgt bei Verwendung von Eisenbeton mit $\mu = 1/6$

$$L = a : \sqrt{\frac{a}{h} \sqrt{3(1-\mu^2)}} = a : 1,31 \sqrt{\frac{a}{h}}. \quad (1241)$$

$l/L = \lambda$ ist eine Schalenkonstante, $y/l = \eta$ die unbenannte, ortsbestimmende Koordinate. Nach S. 769 ist

$$\bar{w} = C_1 e^{-\lambda \eta} \cos \lambda \eta + C_2 e^{-\lambda \eta} \sin \lambda \eta + C_3 e^{\lambda \eta} \cos \lambda \eta + C_4 e^{\lambda \eta} \sin \lambda \eta \quad (1242)$$

und mit $C_1 = A_1 \cos \gamma_1, \quad C_2 = -A_1 \sin \gamma_1$ usw.

auch $\bar{w} = A_1 e^{-\lambda \eta} \cos(\lambda \eta + \gamma_1) + A_2 e^{+\lambda \eta} \cos(\lambda \eta + \gamma_2).$

Der abklingende Anteil der Funktion allein ist eine periodisch gedämpfte Schwingung. Die halbe Wellenlänge ist $l_0 = \pi l / \lambda = \pi L$, das logarithmische Dekrement π , so daß die Amplituden der Funktion \bar{w} und aller ihrer Ableitungen mit jeder halben Welle auf $1/23,14$ des vorhergehenden Ausschlags zurückgehen. Sie klingen also um so schneller ab, je größer λ oder je kleiner L ist. Aus diesem Grunde gelten Schalen mit $l > 7L$ als unendlich lang nach einer Richtung. Bei diesen sind die Integrationskonstanten C_3, C_4 oder A_2, γ_2 Null, damit die Wirkung der Randkräfte in $\eta = 0$ für $\eta = \infty$ verschwindet.

Die allgemeine Rechenvorschrift zerfällt daher bei hohen Zylinderschalen mit $l > 7L$ in zwei Teillösungen für den unendlich langen Zylinder, bei welchen η sowohl

für w_0 wie für \bar{w} entweder vom oberen oder unteren Rande gerechnet wird (Abb. 817). In beiden Fällen ist nach (1242)

$$\left. \begin{aligned} \bar{w} &= e^{-\lambda \eta} (C_1 \cos \lambda \eta + C_2 \sin \lambda \eta) \quad \text{und mit } d\bar{w}/d(\lambda \eta) = \bar{w}' \text{ usw.} \\ \bar{w}' &= -e^{-\lambda \eta} [C_1 (\sin \lambda \eta + \cos \lambda \eta) + C_2 (\sin \lambda \eta - \cos \lambda \eta)], \\ \bar{w}'' &= 2 e^{-\lambda \eta} (C_1 \sin \lambda \eta - C_2 \cos \lambda \eta), \\ \bar{w}''' &= -2 e^{-\lambda \eta} [C_1 (\sin \lambda \eta - \cos \lambda \eta) - C_2 (\sin \lambda \eta + \cos \lambda \eta)], \end{aligned} \right\} \quad (1243)$$

$$\left. \begin{aligned} N_\beta &= -\frac{E h}{a} (w_0 + \bar{w}) + \mu N_\nu, & w' &= w'_0 + \frac{\bar{w}'}{L}, \\ M_\nu &= -B w'' = -B \left(w''_0 + \frac{\bar{w}''}{L^2} \right), & Q_\nu &= -B w''' = -B \left(w'''_0 + \frac{\bar{w}'''}{L^3} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1244)$$

Das Ergebnis (1244) gilt selbstverständlich auch für die vollständige Lösung \bar{w} (1242) der homogenen Differentialgleichung. Es bedeutet mechanisch die Überlagerung der Verschiebungen w_0 und der Schnittkräfte $N_{\nu 0}, N_{\beta 0}$ der statisch bestimmt gestützten Schale aus der vorgeschriebenen Belastung p_ν, p_z mit den Anteilen $\bar{w}, \bar{M}_\nu, \bar{M}_\beta$ aus den Biegemomenten und Querkräften (X_1 bis X_4), welche durch Randstörungen, also durch statisch unbestimmten Anschluß der Schale, unverschiebliche Lagerung und Einspannung des Schalenrandes hervorgerufen werden. Sind die Randkräfte bekannt, so läßt sich der Verschiebungs- und Spannungs-

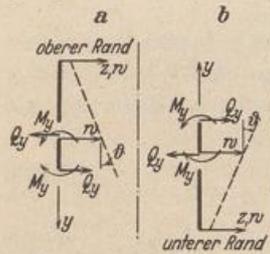


Abb. 817.

zustand der Schale nach der folgenden Rechenvorschrift anschreiben:

$$w = w_0 + \sum X_i w_i, \quad N_\beta = N_{\beta 0} + \sum X_i N_{\beta i}, \quad (i = 1, \dots, 4). \quad (1245)$$

Die Komponenten $w_0, N_{\beta 0}$ aus der Belastung der statisch bestimmt gestützten biegungssteifen Schale stimmen ebenso wie bei der Kugel- und Kegelschale nahezu mit den Schnittkräften und Verschiebungen des Längsspannungszustandes überein und sind in einzelnen Belastungsfällen mit diesen identisch. Daher können die Komponenten $w_0, N_{\beta 0}$ nach den Angaben in Abschn. 80 eingesetzt werden. Die Schnittkräfte $N_{\beta i}, M_{\nu i}$ und die Verschiebungen w_i der biegungssteifen Schale werden für $X_i = 1$ aus den homogenen Gleichungen (1237) berechnet. Dabei sind die übrigen Randkräfte Null. Die Integrationskonstanten werden dabei allerdings in der Regel für die Randbedingungen eines nach einer Richtung unendlich langen Zylinders angegeben, zumal diese Lösung bereits aus Abschn. 22 bekannt ist.

Lösung für $X_1 = 1$ (Abb. 818a):

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= \frac{2a^2}{LEh} e^{-\lambda\eta} \cos \lambda\eta, & \vartheta_1 &= -\frac{2a^2}{L^2Eh} e^{-\lambda\eta} (\sin \lambda\eta + \cos \lambda\eta), \\ N_{\beta 1} &= -\frac{2a}{L} e^{-\lambda\eta} \cos \lambda\eta, & M_{\nu 1} &= -L e^{-\lambda\eta} \sin \lambda\eta, \\ & & Q_{\nu 1} &= e^{-\lambda\eta} (\sin \lambda\eta - \cos \lambda\eta). \end{aligned} \right\} \quad (1246)$$

Lösung für $X_2 = 1$ (Abb. 818b):

$$\left. \begin{aligned} w_2 &= -\frac{2a^2}{L^2Eh} e^{-\lambda\eta} (\cos \lambda\eta - \sin \lambda\eta), & \vartheta_2 &= \frac{4a^2}{L^3Eh} e^{-\lambda\eta} \cos \lambda\eta, \\ N_{\beta 2} &= -\frac{2a}{L^2} e^{-\lambda\eta} (\cos \lambda\eta - \sin \lambda\eta), & M_{\nu 2} &= e^{-\lambda\eta} (\sin \lambda\eta + \cos \lambda\eta), \\ Q_{\nu 2} &= -\frac{2}{L} e^{-\lambda\eta} \sin \lambda\eta. \end{aligned} \right\} \quad (1247)$$

Die Anschlußkräfte $X_i (i = 1 \dots 4)$ sind durch die geometrischen oder statischen Bedingungen aus der vorgeschriebenen Abstützung $\delta_i (i = 1 \dots 4)$ der beiden Schalenränder a, b oder durch ihre Verbindung mit benachbarten Bauteilen (Platte, Kegelschale, Kugelschale) bestimmt. Die Buchstaben δ_i bedeuten dann die gegenseitige Verschiebung der Ränder oder die gegenseitige Verdrehung der Endtangentialen der benachbarten rotationssymmetrischen Flächen ($\delta_i = \delta_{i,1} + \delta_{i,2}$, vgl. S. 773). Auch hierbei wird in der Regel mit dem einseitig unendlich langen Zylinder gerechnet, um die Aufgabe zu vereinfachen. Nach (1246) und (1247) ist

$$\delta_{11,2} = \frac{2a^2}{LEh}, \quad \delta_{12,2} = \delta_{21,2} = -\frac{2a^2}{L^2Eh}, \quad \delta_{22,2} = \frac{4a^2}{L^3Eh}. \quad (1248)$$

1. Starre Einspannung des Randes $a (\eta = 0)$ eines unendlich langen Zylinders.

$$\delta_1 = X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \delta_{10} = 0,$$

$$\delta_2 = X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + \delta_{20} = 0.$$

Mit (1248) und $\delta_{10} = w_{a0}, \delta_{20} = w'_{a0}$ wird

$$\left. \begin{aligned} X_2 = M_a &= -\frac{L^2Eh}{2a^2} (w_{a0} + Lw'_{a0}), \\ X_1 = -Q_a &= -\frac{LEh}{2a^2} (2w_{a0} + Lw'_{a0}). \end{aligned} \right\} \quad (1249)$$

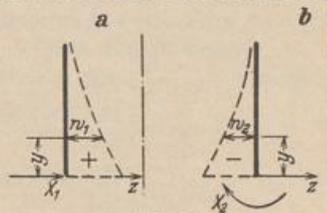


Abb. 818.

2. Gelenkige Lagerung des Randes $a(\eta = 0)$ eines unendlich langen Zylinders.

$$M_a = X_2 = 0$$

und

$$\delta_1 = X_1 \delta_{11} + \delta_{10} = 0,$$

also mit (1248)

$$X_1 = -Q_a = -\frac{L E h}{2 a^2} w_{a0}. \quad (1250)$$

Damit sind nach (1244) auch die Formänderungen und Schnittkräfte bekannt.

Zylinderschale mit $h = \text{const}$ als Behälter (Abb. 819). Der untere Rand des Mantels ist im Behälterboden starr eingespannt, der obere Rand kann frei, gelenkig gelagert oder ebenfalls eingespannt sein. Um die strenge Lösung der Aufgabe zu begründen, sollen die Abmessungen des Behälters eine relativ große charakteristische Länge L bestimmen und daher die Integrationskonstanten der Lösung (1242) von den Bedingungen an beiden Rändern abhängen. Nach S. 760 ist

$$p_z = -\gamma y = -\gamma L \lambda \eta, \quad w_0 = -\gamma \frac{L a^2}{E h} \lambda \eta. \quad (1251)$$

Die vollständige Lösung $w = w_0 + \bar{w}$ der inhomogenen Differentialgleichung lautet daher nach (260) transformiert

$$w = -\gamma \frac{L a^2}{E h} \lambda \eta + U_1 \cos \lambda \eta \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \lambda \eta + U_2 \cos \lambda \eta \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \lambda \eta + U_3 \sin \lambda \eta \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \lambda \eta + U_4 \sin \lambda \eta \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \lambda \eta. \quad (1252)$$

Werden die Ableitungen der Funktion w nach der Veränderlichen $(\lambda \eta)$ mit w' , w'' usw. bezeichnet, so sind nach (1244)

$$\vartheta = \frac{1}{L} w', \quad M_y = -\frac{B}{L^2} w'', \quad M_\beta = -\mu \frac{B}{L^2} w''', \quad Q_y = -\frac{B}{L^3} w'''. \quad (1253)$$

Die Funktionen w' usw. sind auf S. 141 angeschrieben. Die Vorzahlen sind

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{a} \sqrt[4]{3 \frac{a^2}{h^2} (1 - \mu^2)}, \quad \frac{B}{L^2} = \frac{E h^2}{4 a} \frac{1}{\sqrt[4]{3 (1 - \mu^2)}}, \quad (1254)$$

so daß die Integrationskonstanten $U_1 \dots U_4$ leicht aus den Randbedingungen für $\lambda \eta = 0$ oder $\lambda \eta = \lambda$ berechnet werden können.

1. Oberer Rand frei, $\lambda \eta = 0$ mit $w'' = 0$ und $w''' = 0$, unterer Rand eingespannt $\lambda \eta = \lambda$, mit $w = 0$, $w' = 0$.

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= -\gamma \frac{L a^2}{E h} \frac{\cos \lambda \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \lambda + \sin \lambda \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \lambda - 2 \lambda \cos \lambda \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \lambda}{\lambda (\cos^2 \lambda + \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f}^2 \lambda)}, & U_4 &= 0, \\ U_2 &= -\gamma \frac{L a^2}{E h} \frac{\cos \lambda \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \lambda - \sin \lambda \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \lambda - 1/\lambda \cdot \cos \lambda \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \lambda}{\cos^2 \lambda + \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f}^2 \lambda} = U_3. \end{aligned} \right\} \quad (1255)$$

2. Oberer Rand gelenkig gelagert $\lambda \eta = 0$ mit $w = 0$ und $w'' = 0$, unterer Rand eingespannt $\lambda \eta = \lambda$ mit $w = 0$, $w' = 0$.

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= 0, & U_2 &= -\gamma \frac{L a^2}{E h} \frac{1/\lambda \cdot \sin \lambda \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \lambda - \sin \lambda \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \lambda - \cos \lambda \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \lambda}{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \lambda \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \lambda - \cos \lambda \sin \lambda}, \\ U_4 &= 0, & U_3 &= +\gamma \frac{L a^2}{E h} \frac{1/\lambda \cdot \cos \lambda \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \lambda + \sin \lambda \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \lambda - \cos \lambda \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \lambda}{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \lambda \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \lambda - \cos \lambda \sin \lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (1256)$$

3. Oberer Rand eingespannt $\lambda \eta = 0$ mit $w = 0$ und $w' = 0$, unterer Rand eingespannt $\lambda \eta = \lambda$ mit $w = 0$ und $w' = 0$.

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= 0, & U_2 &= -\gamma \frac{L a^2}{E h} \frac{(\mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \lambda + \sin \lambda) \sin \lambda - \lambda (\sin \lambda \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \lambda + \cos \lambda \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \lambda)}{\lambda (\mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n}^2 \lambda - \sin^2 \lambda)}, \\ U_3 &= -\gamma \frac{L a^2}{E h} \frac{\lambda (\sin \lambda \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \lambda + \cos \lambda \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \lambda) - \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \lambda (\sin \lambda + \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \lambda)}{\lambda (\mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n}^2 \lambda - \sin^2 \lambda)}, \\ U_4 &= -\gamma \frac{L a^2}{E h} \frac{(\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \lambda - \cos \lambda) (\mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \lambda + \sin \lambda) - 2 \lambda \sin \lambda \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \lambda}{\lambda (\mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n}^2 \lambda - \sin^2 \lambda)}. \end{aligned} \right\} \quad (1257)$$

Damit sind auch alle Komponenten (1253) des Spannungs- und Verschiebungszustandes bekannt. Ihre Berechnung wird durch die bekannten Tabellen der hyperbolischen Funktionen von K. Hayashi erleichtert. Sind diese nicht zur Hand, so kann in der Regel ($h \ll a$)

$$\operatorname{Sin} \lambda = \operatorname{Coj} \lambda = \frac{1}{2} e^\lambda$$

gesetzt und e^λ als $\operatorname{num} \ln e^\lambda = \operatorname{num} \lambda$ nach Taschenbüchern bestimmt werden. Das Spannungsmoment ist dann für $\eta = 1$ und $\mu = 0$ in allen 3 Fällen

$$M_y \approx \gamma \frac{a^2 h^2}{6l} \lambda (\lambda - 1). \quad (1258)$$

Berechnung eines Wasserbehälters.

a) Vollständige Lösung nach (1252) für starre Einspannung des unteren Schalenrandes.

$a = 9,0 \text{ m}; \quad l = 9,0 \text{ m}; \quad h = 0,30 \text{ m}; \quad a/h = 30.$

Nach (1241) ist $L = \frac{9,0}{1,31 \sqrt{30}} = 1,258,$

$\lambda = 7,17, \quad \gamma = 1 \text{ t/m}^3, \quad E = 2100000 \text{ t/m}^2,$

$\gamma \frac{l a^2}{E h} = 1,156 \cdot 10^{-3}.$

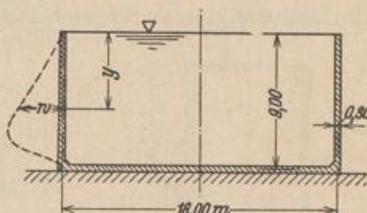


Abb. 819.

1. Oberer Rand frei. Nach (1255) ist $U_4 = 0$ und

$$U_1 = -1,156 \cdot 10^{-3} \frac{409,64 + 504,60 - 14,34 \cdot 409,64}{7,17 \cdot 423275} = 18,89 \cdot 10^{-7},$$

$$U_2 = U_3 = -1,156 \cdot 10^{-3} \frac{409,64 - 504,60 - \frac{1}{7,17} \cdot 409,64}{423275} = 4,15 \cdot 10^{-7},$$

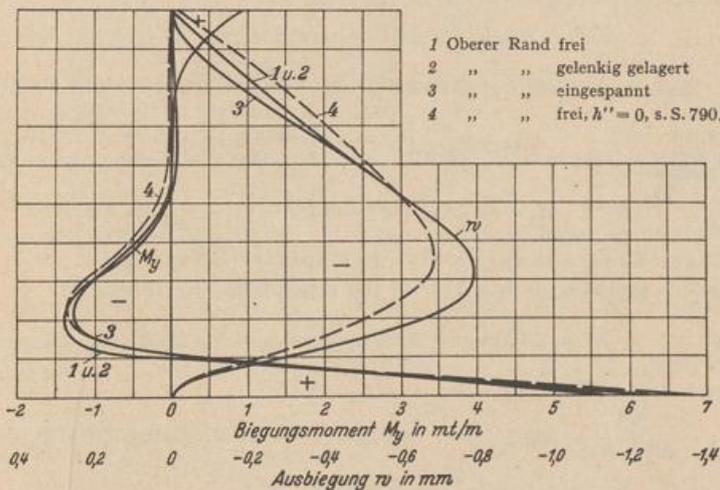


Abb. 820.

damit nach (1252) und (1253) mit (1251)

$$w = -0,161 \cdot 10^{-3} / \eta + 10^{-7} [18,89 \cos \lambda \eta \operatorname{Coj} \lambda \eta + 4,15 (\cos \lambda \eta \operatorname{Sin} \lambda \eta + \sin \lambda \eta \operatorname{Coj} \lambda \eta)],$$

$$M_y = 0,614 \cdot 10^{-3} [1,39 \sin \lambda \eta \operatorname{Sin} \lambda \eta + 4,15 (\sin \lambda \eta \operatorname{Coj} \lambda \eta - \cos \lambda \eta \operatorname{Sin} \lambda \eta)].$$

Am unteren Rand ist $M_a = 6,08 \text{ mt/m}.$

2. Oberer Rand gelenkig gelagert. Nach (1256) ist

$$U_1 = U_4 = 0, \quad U_2 = 23,05 \cdot 10^{-7}, \quad U_3 = 4,15 \cdot 10^{-7}.$$

3. Oberer Rand starr eingespannt. Nach (1257) ist

$$U_1 = 0, \quad U_2 = 23,06 \cdot 10^{-7}, \quad U_3 = 1,598 \cdot 10^{-4}, \quad U_4 = -1,585 \cdot 10^{-4}.$$

Die Ausbiegung w und die Biegemomente M_v sind in Abb. 820 dargestellt. Die Ringkraft N_β ist nach (1244) proportional der Ausbiegung w .

b) Näherungsweise ist für alle 3 Randbedingungen nach (1258)

$$M_a \approx 1,0 \frac{9,0^2 \cdot 0,30^2}{6 \cdot 9,0} \cdot 7,17 \cdot 6,17 = 5,97 \text{ mt/m.}$$

c) Die Teillösung (1243) für den unendlich langen Zylinder ergibt nach (1249)

$$M_a = \frac{L^3 \gamma}{2} (\lambda - 1) = 6,12 \text{ mt/m.}$$

Der Verlauf der Funktionen w und M_v stimmt mit den Kurven 1 und 2 Abb. 820 so gut überein, daß der Unterschied in der Zeichnung nicht hervortritt.

Untersuchung eines Wasserbehälters nach (1234) bei verschiedenen Randbedingungen.

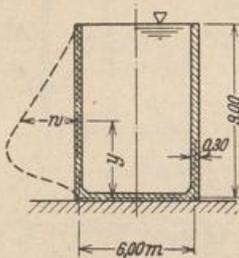


Abb. 821.

a) Starre Einspannung des unteren Schalenrandes.

$$a = 3,0 \text{ m}, \quad l = 9,0 \text{ m}, \quad h = 0,3 \text{ m}, \quad a/h = 10.$$

$$\text{Nach (1241) ist } L = \frac{3,0}{1,31 \sqrt{10}} = 0,723,$$

$$\lambda = 12,45, \quad \gamma = 1,0 \text{ t/m}^3, \quad E h = 0,63 \cdot 10^6.$$

Für den Längsspannungszustand ist nach (1154)

$$w_0 = -\gamma \frac{a^2}{E h} (l - y), \quad w'_0 = \gamma \frac{a^2}{E h}.$$

Damit wird nach (1249) das Einspannungsmoment

$$M_a = X_2 = -\frac{L^2 E h}{2 a^2} \left(-\gamma \frac{a^2 l}{E h} + L \gamma \frac{a^2}{E h} \right) = \frac{L^3 \gamma}{2} (\lambda - 1) = 2,165 \text{ mt/m}$$

und

$$X_1 = \frac{L^2}{2} \gamma (2 \lambda - 1) = 6,25 \text{ t/m,}$$

so daß nach (1243) und (1244) Formänderung und Schnittkräfte bestimmt sind (Abb. 824a).

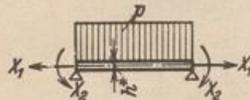


Abb. 822.

$$w = -\gamma \frac{a^2 l}{E h} \left[1 - \eta - e^{-\lambda \eta} \left(\cos \lambda \eta + \left(1 - \frac{L}{l} \right) \sin \lambda \eta \right) \right],$$

$$M_v = -L^2 \frac{l \gamma}{2} e^{-\lambda \eta} \left(\sin \lambda \eta - \left(1 - \frac{L}{l} \right) \cos \lambda \eta \right).$$

b) Elastische Einspannung in eine Kreisplatte (Abb. 824b).

1. Formänderungsgrößen nach S. 773 für die Kreisplatte mit Tabelle 63.

$$h^* = 0,40 \text{ m}, \quad N = \frac{E h^{*3}}{12(1 - \mu^2)} = 11520 \text{ mt.}$$

$$X_1 = 1: \delta_{11,1} = \delta_{21,1} = 0, \quad w_1^* = 0, \quad M_{r,1} = 0.$$

$$X_2 = 1: \delta_{22,1} = \frac{3,0}{N(1 + \mu)} = 223,2 \cdot 10^{-6}, \quad w_2^* = -\frac{a^2}{2N(1 + \mu)} \Phi_1 = -335 \cdot 10^{-6} \cdot \Phi_1; \quad M_{r,2} = -1.$$

$$p = \gamma l: \delta_{10,1} = 0, \quad \delta_{20,1} = -\gamma \frac{l a^3}{8N(1 + \mu)} = -2265 \cdot 10^{-6}.$$

$$w_0^* = \gamma \frac{l a^4}{64N(1 + \mu)} [2(3 + \mu) \Phi_1 - (1 + \mu) \Phi_0] = 5365 \cdot 10^{-6} (\Phi_1 - 0,184 \Phi_0).$$

$$M_{r,0} = \gamma \frac{l a^2}{16} (3 + \mu) \Phi_1 = 16,07 \Phi_1.$$

2. Formänderungsgrößen für die Zylinderschale nach (1248)

$$\delta_{11,2} = 39,5 \cdot 10^{-6}, \quad \delta_{12,2} = -54,7 \cdot 10^{-6}, \quad \delta_{22,2} = 151,2 \cdot 10^{-6},$$

$$\delta_{10,2} = w_{0a} = -128,6 \cdot 10^{-6}, \quad \delta_{20,2} = w'_{0a} = 14,3 \cdot 10^{-6}.$$

3. Berechnung der Anschlußkräfte nach S. 773 mit $\delta_{ik} = \delta_{ik,1} + \delta_{ik,2}$.

X_1	X_2		
39,5	-54,7	128,6	$X_1 = 14,518 \text{ t/m}$,
-54,7	374,4	2250,7	$X_2 = 8,133 \text{ mt/m}$.

4. Formänderung und Schnittkräfte der Schale Abb. 824b. Nach (1243) und (1244) ist

$$w = -\gamma \frac{a^2 l}{E h} (1 - \eta) + 14,518 w_1 + 8,133 w_2$$

$$= -128,6 \cdot 10^{-6} [(1 - \eta) - e^{-\lambda \eta} (\cos \lambda \eta + 3,44 \sin \lambda \eta)],$$

$$M_v = 14,518 M_1 + 8,133 M_2$$

$$= -2,358 e^{-\lambda \eta} (\sin \lambda \eta - 3,44 \cos \lambda \eta).$$

5. Formänderung und Schnittkräfte der Platte. Abb. 824b.

$$w^* = 5365 \cdot 10^{-6} (\Phi_1 - 0,184 \Phi_0) - 8,133 \cdot 335 \cdot 10^{-6} \Phi_1$$

$$= 10^{-6} (2640 \Phi_1 - 987 \Phi_0),$$

$$M_r = 16,07 \Phi_1 - 8,133.$$

c) Elastische Einspannung in eine Kugelschale. Abb. 824c.

1. Formänderungsgrößen für die Kugelschale nach (1197) und (1199) mit

$$a^* = 4,67 \text{ m}, \quad h^* = 0,20 \text{ m}, \quad a^*/h^* = 23,35.$$

Nach (1185) ist

$$k = \sqrt{23,35 \sqrt{3 \cdot 0,9722}} = 6,32, \quad \frac{1}{B} = 695 \cdot 10^{-6},$$

und mit $\alpha_2 = 40^\circ$, $\sin \alpha_2 = 0,6428$, $E h^* = 0,42 \cdot 10^6$,

$$\delta_{11,1} = 58,1 \cdot 10^{-6}, \quad \delta_{12,1} = -122,5 \cdot 10^{-6}, \quad \delta_{22,1} = 513 \cdot 10^{-6}.$$

Mit $f = 9 + 4,67 \cdot \cos \alpha_2 = 12,58 \text{ m}$ und $f/a^* = 2,69$ wird nach (1132)

$$\bar{\delta}_{10,1} = \Delta \gamma_{\alpha_2} = -136 \cdot 10^{-6} \quad \text{und} \quad \bar{\delta}_{20,1} = \vartheta_{\alpha_2} = 33,3 \cdot 10^{-6}.$$

Die Horizontalkraft H beträgt nach S. 752 mit (1132)

$$H = -N_{\alpha_2} \cos \alpha_2 = +\gamma \frac{a^{*2}}{6} \left(3 \frac{f}{a^*} - 2 \frac{1 - \cos^3 \alpha_2}{\sin^2 \alpha_2} \right) \cos \alpha_2 = +15,1 \text{ t/m}$$

und damit nach (1201)

$$\delta'_{10,1} = 15,1 \cdot 58,1 \cdot 10^{-6} = 878 \cdot 10^{-6}, \quad \delta'_{20,1} = -15,1 \cdot 122,5 \cdot 10^{-6} = -1850 \cdot 10^{-6},$$

so daß

$$\delta_{10,1} = (-136 + 878) \cdot 10^{-6} = 742 \cdot 10^{-6}, \quad \delta_{20,1} = (33,3 - 1850) \cdot 10^{-6} = -1816,7 \cdot 10^{-6}$$

2. Formänderungsgrößen der Zylinderschale wie unter b).

3. Berechnung der Anschlußkräfte nach S. 773 mit $\delta_{ik} = \delta_{ik,1} + \delta_{ik,2}$.

X_1	X_2		
97,6	-177,2	-613,4	$X_1 = -2,634 \text{ t/m}$,
-177,2	664,2	1802,4	$X_2 = 2,011 \text{ mt/m}$.

4. Formänderungen und Schnittkräfte der Zylinderschale nach (1243) und (1244)

$$w = -10^{-6} \cdot 128,6 [(1 - \eta) + 1,67 e^{-\lambda \eta} (\cos \lambda \eta - 0,513 \sin \lambda \eta)],$$

$$M_v = 3,917 e^{-\lambda \eta} (\sin \lambda \eta + 0,513 \cos \lambda \eta).$$

5. Schnittkräfte in der Kugelschale nach (1192)

$$M_\alpha = (X_1 + H) M_1 + X_2 M_2 = e^{-k \omega} \left[5,94 \sin(k \omega) - 2,84 \sin \left(k \omega + \frac{\pi}{4} \right) \right].$$

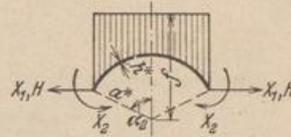


Abb. 823.

d) Berechnung für Temperatur und Schwinden bei eingespanntem unterem Rand.

Die Formänderungsgrößen aus $X_1 = 1, X_2 = 1$ werden wie auf S. 784

$$\delta_{11} = 39,5 \cdot 10^{-6}, \quad \delta_{12} = -54,7 \cdot 10^{-6}, \quad \delta_{22} = 151,2 \cdot 10^{-6}.$$

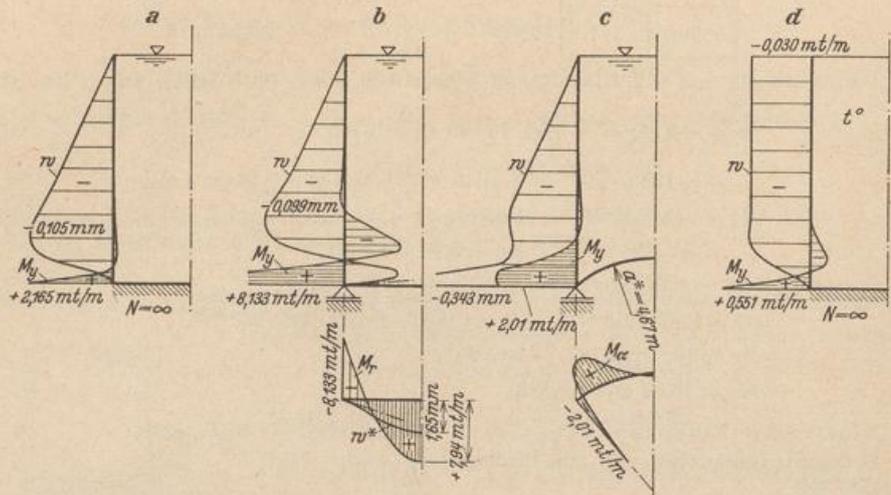


Abb. 824.

Für Temperaturwirkung ist nach (1157) mit $\alpha_t = 10 \cdot 10^{-6}$

$$\delta_{10} = w_{0a} = -\alpha_t \cdot t \cdot a = -30 \cdot t \cdot 10^{-6}, \quad \delta_{20} = 0.$$

Damit lauten die Gleichungen auf S. 773

X_1	X_2		
39,5	- 54,7	$30 \cdot t$	$X_1 = 1,522 \cdot t \text{ t/m},$
- 54,7	151,2	0	$X_2 = 0,551 \cdot t \text{ mt/m}.$

Formänderung und Schnittkräfte betragen nach (1243), (1244) Abb. 824 d

$$w = -30 \cdot t \cdot 10^{-6} [1 - e^{-\lambda \eta} (\cos \lambda \eta + \sin \lambda \eta)],$$

$$M = -0,551 e^{-\lambda \eta} (\sin \lambda \eta - \cos \lambda \eta) \cdot t = 1.$$

Berechnung eines Silos.

1. Geometrische Grundlagen.

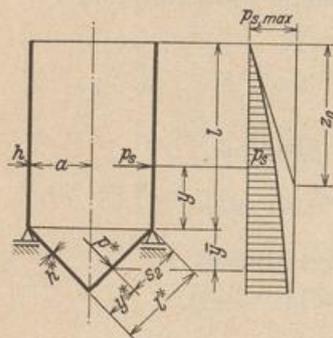


Abb. 825.

Zylinderschale: $a = 3,0 \text{ m}, l = 9,0 \text{ m}, h = 0,20 \text{ m},$

$$E h = 0,42 \cdot 10^6, \quad a/h = 15, \quad L = 0,591 \text{ m},$$

$$\lambda = 15,25, \quad \eta = y/l.$$

Kegelschale: $\alpha = 45^\circ, l^* = 4,24 \text{ m}, h^* = 0,25 \text{ m},$

$$E h^* = 0,525 \cdot 10^6, \quad L_2^* = 0,788 \text{ m}, \quad B^* = 10^6/355,$$

$$\eta_2 = s_2/L_2^*.$$

2. Belastung. Füllgut: Roggen. Nach S. 14 ist (Abb. 825)

$$\gamma = 0,7 \text{ t/m}^3, \quad h_1 = 0,248, \quad \mu' = 0,44, \quad F/U = 3/2,$$

$$p_{s, \max} = \frac{0,7}{0,44} \frac{3}{2} = 2,39, \quad p_{b, \max} = \frac{2,39}{0,248} = 9,62,$$

$$z_0 = \frac{1,5}{0,44 \cdot 0,248} = 13,75,$$

$$p_s = 2,39 (1 - e^{-x}), \quad p_b = 9,62 (1 - e^{-x}), \quad x = \frac{l - y}{z_0} = \frac{9 - y}{13,75}.$$

Zylinderschale: $p_z = -2,39 (1 - e^{-x})$.

Kegelschale: $p_z^* = -p_s \sin^2 \alpha - p_b \cos^2 \alpha = -6,01 \left(1 - e^{-\frac{l+y}{z_0}}\right)$,
 $p_z^* = -6,01 (1 - e^{-x^*})$, $x^* = \frac{16,96 - y^*}{19,43}$.

3. Formänderung der Zylinderschale.

a) Membranzustand. Nach (1155) ist

$$w_0 = -\frac{3,0^2}{0,42} \cdot 10^{-6} \cdot 2,39 (1 - e^{-x}) = -51,3 \cdot 10^{-6} (1 - e^{-x}),$$

$$\vartheta_0 = \frac{51,3 \cdot 10^{-6}}{13,75} e^{-x} = 3,73 \cdot 10^{-6} e^{-x},$$

so daß mit $y = 0$:

$$\delta_{10,2} = -24,6 \cdot 10^{-6}, \quad \delta_{20,2} = 1,94 \cdot 10^{-6}.$$

b) Für die Belastung aus $X_1 = 1, X_2 = 1$ (Abb. 826) ist nach (1248)

$$\delta_{11,2} = 72,5 \cdot 10^{-6}, \quad \delta_{12,2} = -122,6 \cdot 10^{-6}, \quad \delta_{22,2} = 415,0 \cdot 10^{-6}.$$

4. Formänderung der Kegelschale.

a) Membranzustand. Aus den Gleichgewichtsbedingungen (1138) folgt

$$N_{\beta 0} = -\gamma^* p_z = 6,01 \gamma^* (1 - e^{-x^*})$$

und

$$(N_{\gamma 0} \gamma^*)' = 6,01 \gamma^* (1 - e^{-x^*}),$$

woraus

$$N_{\gamma 0} = 6,01 \left[\frac{\gamma^*}{2} - 19,43 e^{-x^*} + \frac{19,43^2}{\gamma^*} (e^{-x^*} - e^{-0,872}) \right].$$

Damit wird nach (1140)

$$\Delta r_{z,0} = 8,1 \cdot 10^{-6} \gamma^* \left\{ \gamma^* (1 - e^{-x^*}) - \mu \left[\frac{\gamma^*}{2} - 19,43 e^{-x^*} \left(1 - \frac{19,43}{\gamma^*}\right) - \frac{19,43^2}{\gamma^*} e^{-0,872} \right] \right\},$$

und nach (1141)

$$\vartheta_0^* = -11,46 \cdot 10^{-6} \left[\frac{3}{2} \gamma^* - e^{-x^*} \left(\frac{19,43^2}{\gamma^*} - 19,43 + 2 \gamma^* + \frac{\gamma^{*2}}{19,43} \right) + \frac{19,43^2}{\gamma^*} \cdot e^{-0,872} \right].$$

Die Formänderungen am Rande im Sinne der Definition nach Abb. 826 betragen daher

$$\bar{\delta}_{10,1} = (\Delta r_{z,0})_{\gamma^*=1} = 63,3 \cdot 10^{-6},$$

$$\bar{\delta}_{20,1} = -(\vartheta_0^*)_{\gamma^*=1} = 29,3 \cdot 10^{-6}.$$

b) Für die Belastung aus $X_1 = 1, X_2 = 1$ ist nach (1223) und (1224) unter Beachtung des Wirkungssinnes von X_2 nach Abb. 826

$$\delta_{11,1} = 43,4 \cdot 10^{-6}, \quad \delta_{12,1} = 77,9 \cdot 10^{-6}, \quad \delta_{22,1} = 279,5 \cdot 10^{-6}.$$

c) Belastung H . Nach Abb. 767 ist

$$H = -(N_{\gamma 0})_{\gamma^*=1} \cdot \cos \alpha = -4,67 \text{ t}$$

und nach (1201)

$$\delta'_{10,1} = -4,67 \cdot 43,4 \cdot 10^{-6} = -202,5 \cdot 10^{-6},$$

$$\delta'_{20,1} = -4,67 \cdot 77,9 \cdot 10^{-6} = -363,5 \cdot 10^{-6}.$$

5. Berechnung der Überzähligen.

$$\delta_{11} = (72,5 + 43,4) \cdot 10^{-6} = 115,9 \cdot 10^{-6},$$

$$\delta_{12} = (-122,6 + 77,9) \cdot 10^{-6} = -44,7 \cdot 10^{-6},$$

$$\delta_{22} = (415,0 + 279,5) \cdot 10^{-6} = 694,5 \cdot 10^{-6},$$

$$\delta_{10} = (-24,6 + 63,3 - 202,5) \cdot 10^{-6} = -163,8 \cdot 10^{-6},$$

$$\delta_{20} = (1,94 + 29,3 - 363,5) \cdot 10^{-6} = -332,26 \cdot 10^{-6}.$$

X_1	X_2		
115,9	-44,7	163,8	$X_1 = 1,639 \text{ t/m}$,
-44,7	694,5	332,26	$X_2 = 0,584 \text{ mt/m}$.



Abb. 826.

6. Formänderung und Schnittkräfte der Zylinderschale nach (1243) und (1244)

$$w = w_0 + 1,639 w_1 + 0,584 w_2$$

$$= -51,3 \cdot 10^{-6} [(1 - e^{-\lambda}) - 0,923 e^{-\lambda \eta} (\cos \lambda \eta + 1,516 \sin \lambda \eta)]$$

$$M_y = 1,639 M_1 + 0,584 M_2 = 0,384 e^{-\lambda \eta} [1,516 \cos \lambda \eta - \sin \lambda \eta]$$

7. Formänderung und Schnittkräfte der Kegelschale nach (1202) und (1221)

$$\Delta r_{z,0} = \Delta r_{z,0} + (1,639 - 4,67) \Delta r_{z,1} + 0,584 \Delta r_{z,2}$$

$$= \Delta r_{z,0} - 3,031 \Delta r_{z,1} + 0,584 \Delta r_{z,2}$$

$\Delta r_{z,0}$ auf S. 787. Nach (1223) und (1224) ist

$$\Delta r_{z,1} = 2,41 \cdot 10^{-6} y^{*2} e^{-\eta_2} \cos \eta_2,$$

$$\Delta r_{z,2} = 4,33 \cdot 10^{-6} y^{*2} e^{-\eta_2} (\cos \eta_2 - \sin \eta_2),$$

$$M_y^* = -3,031 M_1 + 0,584 M_2 = 0,584 e^{-\eta_2} [\cos \eta_2 - 1,89 \sin \eta_2]$$

Formänderung und Schnittkräfte sind in Abb. 827 dargestellt.

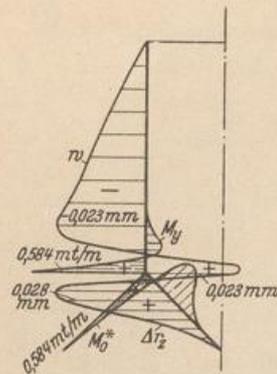


Abb. 827.

Berechnung eines Kühlturmes.

1. Geometrische Grundlagen (Abb. 828).

Zylinderschale: $a = 5,5 \text{ m}$, $l = 15,0 \text{ m}$, $h = 0,07 \text{ m}$

$$E h = 0,147 \cdot 10^6, \quad a/h = 78,6, \quad L = 0,474 \text{ m}, \quad \lambda = 31,7, \quad \eta = y/l$$

Kegelschale: $\alpha = 65^\circ$, $l^* = 17,0 \text{ m}$, $a^* = 13,0 \text{ m}$, $h^* = 0,10 \text{ m}$

$$E h^* = 0,210 \cdot 10^6, \quad L_1^* = 0,596 \text{ m}, \quad B^* = 10^6/5560, \quad \eta_1 = s_1/L_1^*$$

2. Belastung. Eigengewicht.

Zylinderschale $g = 0,168 \text{ t/m}^2$; Kegelschale $g^* = 0,24 \text{ t/m}^2$.

3. Formänderung der Zylinderschale.

a) Membranzustand. Nach (1153) ist

$$w_0 = -\frac{\mu}{E h} a g l (1 - \eta) = -10^{-6} \cdot 15,73 (1 - \eta),$$

$$\vartheta_0 = 10^{-6} \cdot \frac{15,73}{l} = 10^{-6} \cdot 1,05,$$

so daß mit $\eta = 0$ $\delta_{10,2} = -15,73 \cdot 10^{-6}$,

$$\delta_{20,2} = 1,05 \cdot 10^{-6}.$$

b) Für die Belastung aus $X_1 = 1$, $X_2 = 1$ (Abb. 829) ist nach (1248)

$$\delta_{11,2} = 868 \cdot 10^{-6}, \quad \delta_{12,2} = -1836 \cdot 10^{-6},$$

$$\delta_{22,2} = 7750 \cdot 10^{-6}.$$

4. Formänderung der Kegelschale.

a) Membranzustand. Nach (1142) und (1145) ist mit $z = y^* \sin \alpha$ und

$$G_0 = g \cdot l \cdot 2 a \pi = 87 \text{ t}$$

$$\Delta r_{z,0} = -\frac{g^* y^{*2}}{E h^*} \cos^2 \alpha \operatorname{ctg} \alpha \left\{ 1 - \frac{\mu}{2 \cos^2 \alpha} \left[1 - \left(\frac{a^*}{y^*} \right)^2 \right] \right\} + \frac{\mu G_0}{2 \pi E h^* \sin \alpha}$$

$$= 10^{-6} \left\{ 12,12 - 0,0444 y^{*2} \left[1,145 + \left(\frac{13}{y^*} \right)^2 \right] \right\},$$

$$\vartheta_0 = -\frac{g^* y^*}{E h^*} \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sin \alpha} \left[\frac{1}{2} + \mu - (2 + \mu) \cos^2 \alpha - \frac{1}{2} \left(\frac{a^*}{y^*} \right)^2 \right] - \frac{G_0}{E h^* \cdot 2 \pi y^* \sin^2 \alpha}$$

$$= -10^{-6} \left\{ 0,294 y^* \left[0,56 - \left(\frac{13}{y^*} \right)^2 \right] + \frac{80,3}{y^*} \right\}.$$

Mit $y^* = a^*$ wird $\bar{\delta}_{10,1} = -3,96 \cdot 10^{-6}$, $\bar{\delta}_{20,1} = -4,49 \cdot 10^{-6}$.

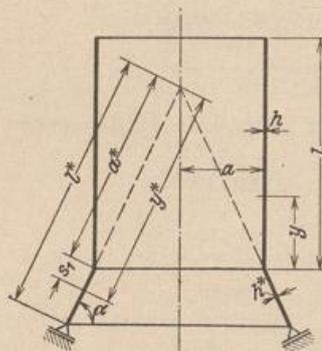


Abb. 828.

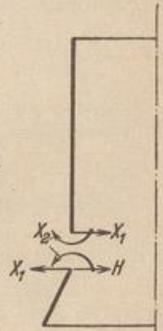


Abb. 829.

b) Die Belastung $X_1 = 1, X_2 = 1$ liefert nach (1225) und (1226)

$$\delta_{11,1} = 482 \cdot 10^{-6}, \quad \delta_{12,1} = 896 \cdot 10^{-6}, \quad \delta_{22,1} = 3320 \cdot 10^{-6}.$$

c) Belastung H . Nach (1145) ist

$$-H = \frac{G_0}{2\pi a} \operatorname{ctg} \alpha = +1,175 \text{ t/m}$$

und daher nach (1201) $\delta'_{10,1} = -1,175 \cdot 482 \cdot 10^{-6} = -566 \cdot 10^{-6},$
 $\delta'_{20,1} = -1,175 \cdot 896 \cdot 10^{-6} = -1053 \cdot 10^{-6}.$

5. Berechnung der Überzähligen. ($\delta_{ik} = \delta_{ik,1} + \delta_{ik,2}, \delta_{i0} = \bar{\delta}_{i0,1} + \delta'_{i0,1} + \delta_{i0,2}$)

X_1	X_2		
1350	-940	581	$X_1 = 0,532 \text{ t/m}$
-940	11070	1056	$X_2 = 0,141 \text{ mt/m}.$

6. Formänderung und Schnittkräfte der Zylinderschale nach (1243) und (1244)

$$w = w_0 + 0,532 w_1 + 0,141 w_2$$

$$= -15,73 \cdot 10^{-6} [(1 - \eta) - 12,85 e^{-\lambda \eta} (\cos \lambda \eta + 1,281 \sin \lambda \eta)],$$

$$M_y = 0,532 M_1 + 0,141 M_2 = -0,110 e^{-\lambda \eta} (\sin \lambda \eta - 1,281 \cos \lambda \eta).$$

7. Formänderung und Schnittkräfte der Kegelschale nach (1202) und (1221)

$$\Delta r_z = \Delta r_{z,0} + (0,532 - 1,175) \Delta r_{z,1} + 0,141 \Delta r_{z,2}$$

$$= \Delta r_{z,0} - 0,643 \Delta r_{z,1} + 0,141 \Delta r_{z,2}.$$

$\Delta r_{z,0}$ auf S. 788. Nach (1225) und (1226) ist

$$\Delta r_{z,1} = 2,855 \cdot 10^{-6} y^{*2} e^{-\eta_1} \cos \eta_1,$$

$$\Delta r_{z,2} = -5,28 \cdot 10^{-6} y^{*2} e^{-\eta_1} (\sin \eta_1 - \cos \eta_1).$$

Formänderung und Schnittkräfte sind in Abb. 830 dargestellt.

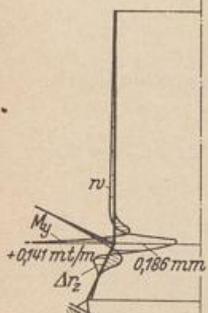


Abb. 830.

Die Zylinderschale mit veränderlicher Wanddicke. Näherungslösungen der allgemeinen Aufgabe entstehen nach S. 778 durch die Unterteilung des Integrationsbereichs l in n gleichgroße Abschnitte $\Delta y = s$ mit der Punktfolge $0, 1 \dots k \dots n$ und durch die Umwandlung der Differentialquotienten der Differentialgleichung des Problems in Differenzenquotienten.

Die Differentialgleichung der Biegelinie w des Meridianschnittes mit beliebig veränderlicher Wanddicke h lautet nach (1229) für

$$N_y = 0, \quad M_y'' + \frac{N_\beta}{a} + \mathcal{P}_z = 0, \quad M_y'' = -(B w''')'$$

$$\left(\frac{h^3}{h_0^3} w'' \right)'' + 4 w \frac{h}{h_0} \frac{3(1-\mu^2)}{a^2 h_0^3} = 12 \frac{(1-\mu^2)}{E h_0^3} \mathcal{P}_z. \quad (1259)$$

Aus dieser werden nach (211) mit $h_k/h_0 = \zeta_k$ die folgenden Differenzgleichungen abgeleitet:

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{k-1}^3 \Delta^2 w_{k-1} - 2 \zeta_k^3 \Delta^2 w_k + \zeta_{k+1}^3 \Delta^2 w_{k+1} + 4 \zeta_k \frac{s^4}{L_0^4} w_k &= \frac{12(1-\mu^2)s^4}{E h_0^3} \mathcal{P}_{z,k}. \\ \zeta_{k-1}^3 w_{k-2} - 2 w_{k-1} (\zeta_{k-1}^3 + \zeta_k^3) + w_k (\zeta_{k-1}^3 + 4 [\zeta_k^3 + \zeta_k \frac{s^4}{L_0^4}] + \zeta_{k+1}^3) \\ - 2 w_{k+1} (\zeta_k^3 + \zeta_{k+1}^3) + \zeta_{k+1}^3 w_{k+2} &= \frac{12(1-\mu^2)s^4}{E h_0^3} \mathcal{P}_{z,k}, \quad k = 1 \dots (n-1). \end{aligned} \right\} \quad (1260)$$

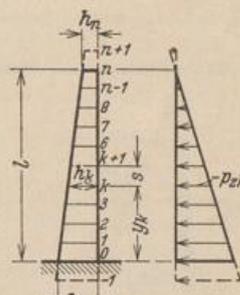


Abb. 831.

Die Rechenvorschrift besteht neben diesen $(n-1)$ linearen Gleichungen aus vier Randbedingungen für w, w', M oder Q am Rande $y = 0$ und $y = l$. Sie enthält ebenso viele Wurzeln $w_k (k = -1 \dots n+1)$, die daher eindeutig bestimmt sind. Die Randbedingungen sind Vorschriften über den Verschiebungs- oder Spannungszustand. Dieser läßt sich nach (1229) ebenfalls durch Differenzen ausdrücken.

$$\left. \begin{aligned} w'_k &\approx \frac{w_{k+1} - w_{k-1}}{2s}, \quad -N_{\beta k} = \frac{E h_k}{a} w_k, \quad M_{y k} = -\frac{E h_k^3}{12(1-\mu^2)} \frac{(w_{k-1} - 2w_k + w_{k+1})}{s^2}, \\ Q_k &= -\frac{E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{h_{k+1}^3 \Delta^2 w_{k+1} - h_{k-1}^3 \Delta^2 w_{k-1}}{2s^3} \right). \end{aligned} \right\} (1261)$$

Sind keine Randbedingungen vorgeschrieben, sondern nur durch die Verbindung des Breitenschnittes mit anderen elastischen Bauteilen bestimmt, so müssen hier ebenso wie auf S. 781 zunächst die Anschlußkräfte berechnet werden. Die Komponenten δ_{10}, δ_{20} des Verschiebungszustandes ergeben sich in der Regel aus der partikulären Lösung von (1259), die Vorzahlen $\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{22}$ des Ansatzes lassen sich genügend genau aus den Differenzgleichungen eines unendlich langen Zylinders mit vorgeschriebenen Randkräften nach S. 789 für $X_1 = Q_y = 1, My = 0$ oder $X_2 = My = 1, Q_y = 0$ berechnen. Da die Funktionen $w(y)$ in diesem Falle schnell abklingen, werden die Verschiebungen $w_{k,1}, w_{k,2}$ außerhalb einer geschätzten Randzone Null gesetzt, ohne die Bedingungen am entgegengesetzten Rande zu berücksichtigen.

Berechnung des Wasserbehälters Abb. 819 für linear veränderliche Wandstärke ($h'' = 0$).

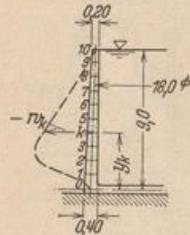


Abb. 832.

1. Geometrische Abmessungen (Abb. 832). $l = 9,0 \text{ m}, a = 9,0 \text{ m}.$

$$h_0 = 0,40 \text{ m}, \quad h_{10} = 0,20 \text{ m}, \quad h_k = \frac{h_0}{c} (c - y_k),$$

$$c = \frac{l h_0}{h_0 - h_{10}} = 18,0, \quad \zeta_k = \frac{h_k}{h_0} = 1 - \frac{y_k}{18,0}.$$

Der Integrationsbereich l wird in 10 gleiche Teile geteilt. $s = 0,9 \text{ m}.$

2. Belastung. Wasserdruck, $p_{z,k} = -1,0 (l - y_k).$

3. Randbedingungen. Der untere Rand $y = 0$ ist starr eingespannt, $w = 0, w' = 0$, also $w_{-1} = w_1$. Der obere Rand ist kräftefrei, $Q_{10} = 0, M_{y10} = 0$, daher mit (1261)

$$w_{11} = 2w_{10} - w_9, \quad w_{12} = \frac{\zeta_9^3}{\zeta_{11}^3} (w_8 - 2w_9 + w_{10}) + 3w_{10} - 2w_9.$$

4. Vorzahlen der Differenzgleichungen (1260)

$$\frac{12(1-\mu^2)s^4}{E h_0^3} p_{z,k} = \frac{s^4}{B_0} p_{z,k} = -\frac{0,057}{1000} (9,0 - y_k), \quad \frac{s^4}{L_0^4} = 0,1475.$$

k	y_k	ζ_k	ζ_k^2	$\zeta_k^3 + \zeta_{k+1}^3$	$\zeta_k \frac{s^4}{L_0^4}$	[] Gl. (1260)	$\frac{\zeta_{k-1}^3}{\zeta_{k+1}^3}$ + 4 [] + ζ_{k+1}^3	$9,0 - y_k$	$10^3 \frac{s^4}{B_0} p_{z,k}$
-1	-0,9	1,05	1,105	2,158	0,1550	1,3130	—	—	—
0	0	1	1	1,857	0,1475	1,1475	6,595	9	-0,513
1	0,9	0,95	0,857	1,586	0,1401	0,9971	5,719	8,1	-0,461
2	1,8	0,9	0,729	1,343	0,1328	0,8618	4,921	7,2	-0,411
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

5. Die Bedingungsgleichungen unter Berücksichtigung der Randbedingungen.

w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	$10^3 \frac{s^4}{B_0} p_{x,k}$
6,719	-3,172	0,729								-0,461
-3,172	4,921	-2,686	0,614							-0,411
0,729	-2,686	4,199	-2,252	0,512						-0,359
	0,614	-2,252	3,536	-1,868	0,422					-0,308
		0,512	-1,868	2,988	-1,530	0,343				-0,256
			0,422	-1,530	2,485	-1,236	0,275			-0,205
				0,343	-1,236	2,044	-0,982	0,216		-0,154
					0,275	-0,982	1,661	-0,764	0,166	-0,103
						0,216	-0,764	1,204	-0,332	-0,051
							0,166	-0,332	0,313	0

6. Auflösung. Die Iteration einer Näherungslösung liefert

$k =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$10^3 w_k =$	-0,2396	-0,5144	-0,6616	-0,6777	-0,6131	-0,5146	-0,4047	-0,2860	-0,1547	-0,0124 mm

7. Schnittkräfte nach (1261). Die Ausbiegung w_k und das Biegemoment $M_{y,k}$ sind in Abb. 820 S. 783 durch die Linie 4 dargestellt.

Pöschl, T., u. K. v. Terzaghi: Berechnung von Behältern nach neueren analytischen und graphischen Methoden. Berlin 1913 und 1926. — Meißner, E.: Beanspruchung und Formänderung zylindrischer Gefäße mit linear veränderlicher Wandstärke. Vjschr. Naturforsch. Ges. Zürich 1917 S. 153. — Pasternak, P.: Formeln zur raschen Berechnung der Biegebeanspruchung in kreisrunden Behältern. Schweiz. Bauztg. Bd. 86 (1925) S. 129. — Derselbe: Vereinfachte Berechnung der Biegebeanspruchung in dünnwandigen kreisrunden Behältern. Verh. 2. Int. Kongr. f. techn. Mechanik. Zürich 1927. — Derselbe: Die praktische Berechnung der Biegebeanspruchung in kreisrunden Behältern mit gewölbten Böden und Decken und linear veränderlichen Wandstärken. Schweiz. Bauztg. Bd. 90 (1927). — Susok, K.: Formeln zur praktischen Berechnung der Biegebeanspruchung in kreisrunden Behältern mit linear veränderlichen Wandstärken. Beton u. Eisen 1927 S. 450. — Steuermann, E.: Beitrag zur Berechnung des zylindrischen Behälters mit veränderlicher Wandstärke. Beton u. Eisen 1928 S. 286. — Miesel, K.: Über die Festigkeit von Kreiszyklinderschalen mit nichtachsensymmetrischer Belastung. Ing.-Arch. 1930 S. 22. — Flügge, W.: Die Stabilität der Kreiszyklinderschale. Ing.-Arch. 1931 S. 463. — Stange, K.: Der Spannungszustand einer Kreisringschale. Ing.-Arch. 1931 S. 47. — Abdank, R.: Berechnung ganz oder teilweise gefüllter, freitragender, dünnwandiger Rohrleitungen mit beliebig geneigter Achse. Bautechn. 1931 S. 419. — v. Sanden, K., u. F. Tölke: Über Stabilitätsprobleme dünner kreiszyklindrischer Schalen. Ing.-Arch. 1931 S. 24.

82. Membrantheorie von Rohr und Tonne.

Tonne und Rohr werden bei zahlreichen Anwendungen im Bauwesen längs der Ränder oder längs ausgezeichneter Mantellinien $\alpha = \text{const}$ stetig unterstützt und bei der statischen Untersuchung unendlich lang angenommen (Abb. 833). Eine von x unabhängige Belastung $p = p(\alpha)$ erzeugt dann mit $\mu = 0$ einen ebenen Spannungszustand, dessen Komponenten ebenso wie beim biegesteifen gekrümmten Stabe berechnet werden (S. 131 und 136). Durch die Abstützung einzelner Querschnitte des Flächentragwerks mit biegesteifen Rahmen, Bindern oder Querwänden

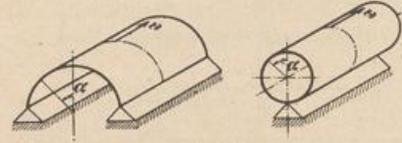


Abb. 833.

entstehen freitragende Rohre und Tonnen, deren differentiale Streifen sich nicht mehr gleichartig verhalten, so daß die Spannungen nach der Schalentheorie berechnet werden müssen. Gelten dabei mit $h \ll r$ dieselben Annahmen wie auf S. 743, so lassen sich die inneren Kräfte auch hier durch Schnittkräfte, also durch Längs- und Querkräfte, Biegungs- und Drillungsmomente ausdrücken. Die räumliche Tragwirkung der Tonne ist zuerst von A. Föppl an Fachwerken (1894), von D. Thoma und E. Schwerin an Rohren (1920) und von F. Bauersfeld und

U. Finsterwalder an freitragenden Gewölben (1928) untersucht worden.

Um die Rechnung zu vereinfachen, können die Biegungsspannungen gegenüber den Dehnungsspannungen eines Abschnitts zunächst ebenso wie bei den rotations-symmetrischen Schalen vernachlässigt werden, wenn die Randbedingungen vollständig erfüllt sind oder wenn die Randstörungen keinen wesentlichen Einfluß auf den Spannungs- und Formänderungszustand besitzen. Das Kraftfeld der Schale wird dann allein durch Längskräfte und Schubkräfte beschrieben, während die Biegung nur geringe Nebenspannungen erzeugt.

Zur Berechnung der Längskräfte N_x , N_α und der Schubkräfte $N_{x\alpha}$ genügen die drei Gleichgewichtsbedingungen. Die Aufgabe ist also ebenso wie bei den rotations-symmetrischen Schalen statisch bestimmt. Die Gleichgewichtsbedingungen werden für die äußeren Kräfte eines differentialen Schalentheils $dx \cdot r d\alpha$ angeschrieben und dabei auf das Achsensystem der Abb. 838 bezogen. Der Ursprung der x -Achse fällt in den mittleren Breitenschnitt zwischen zwei Querstützen (Abstand $2l$). Diese bedeuten Ränder des stetigen Zusammenhangs und damit Randbedingungen für die mathematische Beschreibung des Spannungs- und Verschiebungszustandes. Das-

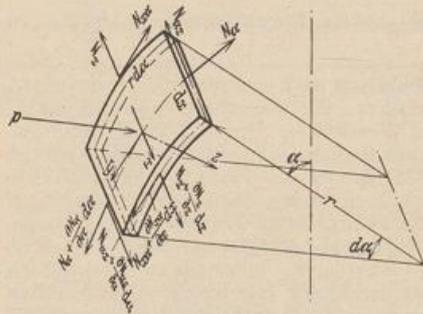


Abb. 834.

selbe gilt von der Begrenzung der Tonnenschalen längs der Erzeugenden. Randstörungen des Membranzustandes sind also nur dann ausgeschlossen, wenn die an den Rändern der Schale vorhandenen Kräfte den stützenden Randgliedern ohne Zwang zugeführt werden können.

Die Wanddicke h ist konstant, die Belastung p eine stetige Funktion von x und α . Ihre Komponenten werden mit p_x , p_y , p_z bezeichnet. Die Verschiebungen der Punkte der Mittelfläche im Sinne der drei in Abb. 834 eingetragenen Achsen sind u , v , w .

Bedingungen für das Gleichgewicht der Kräfte an dem differentialen Abschnitt

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} dx r d\alpha + \frac{\partial N_{x\alpha}}{\partial \alpha} d\alpha dx + p_x dx r d\alpha &= 0, \\ \frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} d\alpha dx + \frac{\partial N_{x\alpha}}{\partial x} dx r d\alpha + p_y dx r d\alpha &= 0, \\ N_\alpha dx d\alpha + p_z dx r d\alpha &= 0, \\ \frac{\partial N_{x\alpha}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} + p_y &= 0, \quad \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{x\alpha}}{r \partial \alpha} + p_x = 0, \quad N_\alpha + p_z r = 0. \end{aligned} \quad (1262)$$

Die Schnittkräfte können daher unabhängig voneinander berechnet werden.

$$\left. \begin{aligned} N_\alpha &= -r p_z, & N_{x\alpha} &= -\int \frac{1}{r} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} dx - \int p_y dx + C_1(\alpha), \\ N_x &= -\int \frac{1}{r} \frac{\partial N_{x\alpha}}{\partial \alpha} dx - \int p_x dx + C_2(\alpha). \end{aligned} \right\} \quad (1263)$$

Die Integrationskonstanten C_1, C_2 sind unabhängig von x , aber Funktionen von α , und daher nur durch Randbedingungen für $x = \text{const}$ bestimmt. Bei freier Auflagerung der Schale auf zwei Querstützen sind die Längskräfte N_x an den freien Rändern in $x = \pm l$ Null; bei freier Auskragung der Schale sind Längskraft N_x und Schubkraft $N_{\alpha x}$ am freien Rand Null. Randstörungen des Membranzustandes sind dabei aber nur dann ausgeschlossen, wenn die Dehnung von Schalenrand und Querstütze stetig ineinander übergehen. In allen anderen Fällen entstehen ebenso wie bei der Verbindung von Rotationsschale und Ringträger Biegungsspannungen, die sich allerdings ebenso wie dort nur auf eine schmale Randzone beschränken und daher keine große Bedeutung besitzen.

Der Verschiebungszustand der Mittelfläche (u, v, w) läßt sich mit den als bekannt anzusehenden Schnittkräften aus den folgenden Beziehungen berechnen:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Eh}(N_x - \mu N_\alpha), & \epsilon_\alpha &= \frac{\partial v}{r \partial \alpha} - \frac{w}{r} = \frac{1}{Eh}(N_\alpha - \mu N_x), \\ \gamma_{x\alpha} &= \frac{\partial u}{r \partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2(1+\mu)}{Eh} N_{\alpha x}. \end{aligned} \right\} \quad (1264)$$

Spannungszustand einer freitragenden Druckrohrleitung.

1. Lösung für Eigengewicht $p_x = 0, p_y = g \sin \alpha, p_z = g \cos \alpha$.

Nach (1263) ist

$$N_\alpha = -ag \cos \alpha,$$

$$N_{\alpha x} = -\frac{1}{a} \int ag \sin \alpha dx - g \int \sin \alpha dx + C_1 = -2gx \sin \alpha + C_1.$$

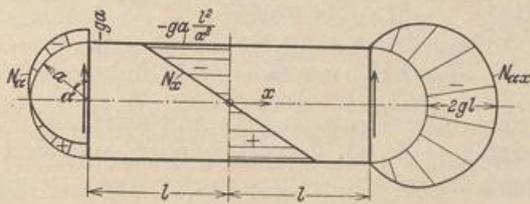


Abb. 835. Schnittkräfte infolge Eigengewicht.

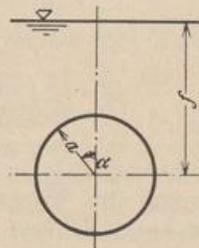


Abb. 836.

Aus Symmetriegründen ist $N_{\alpha x} = 0$ für $x = 0$, also $C_1 = 0$.

$$N_x = +\frac{1}{a} \int 2gx \cos \alpha dx + C_2 = \frac{g}{a} \cos \alpha (x^2 + C_2).$$

Für $x = l$ ist $N_x = 0$, also $C_2 = -l^2$. Die Schnittkräfte lauten nunmehr

$$N_\alpha = -ga \cos \alpha, \quad N_{\alpha x} = -2gx \sin \alpha, \quad N_x = -ga \frac{l^2}{a^2} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) \cos \alpha.$$

Sie sind in Abb. 835 dargestellt.

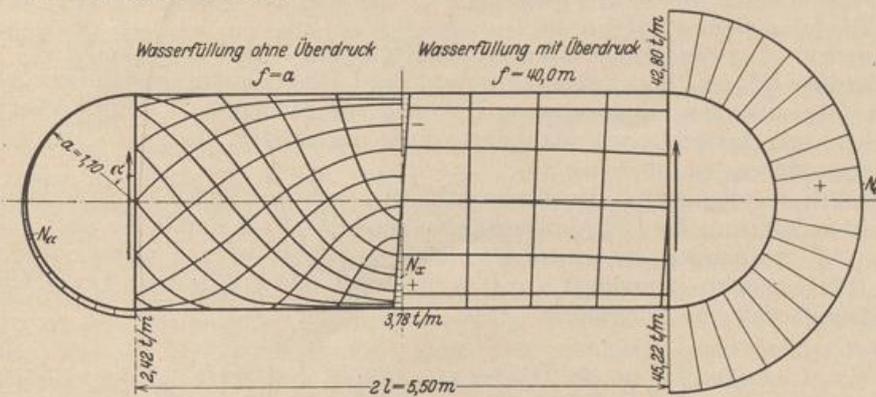


Abb. 837. Schnittkräfte und Spannungstrajektorien in einem Rohrabschnitt.

2. Lösung für Wasserüberdruck $p_x = 0$, $p_y = 0$, $p_z = -\gamma(f - a \cos \alpha)$ (Abb. 836). Die Integration nach (1263) liefert

$$N_\alpha = a^2 \gamma \left(\frac{f}{a} - \cos \alpha \right), \quad N_{\alpha x} = -\gamma a x \sin \alpha, \quad N_x = -\gamma \frac{l^2}{2} \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right) \cos \alpha.$$

Die Schnittkräfte und Spannungstrajektorien sind bei Wasserfüllung ohne Überdruck, also für $f = a = 1,10$ m auf der linken Seite, bei Wasserfüllung mit $f = 40,0$ m auf der rechten Seite der Abb. 837 eingetragen. Die Hauptspannungen werden also bei wachsendem Überdruck immer mehr zu Ringspannungen. Dabei wird die Durchbiegung des Rohres kleiner.

Die Tonnenschale mit Querstützung. Die Mittelfläche der Tonnenschale ist ein zum Meridianschnitt $\alpha = 0$ symmetrischer Abschnitt einer Zylinderfläche mit parallelen Rändern $\alpha = \alpha^* = \text{const}$. Die Krümmung des Breitenschnittes $1/r$ ist eine Funktion von α , die Wanddicke h in der Regel konstant. Das Flächen-tragwerk ruht entweder auf allen vier Rändern oder trägt sich zwischen den Querwänden frei. Daneben sind auch noch andere Stützungsmöglichkeiten vorhanden.

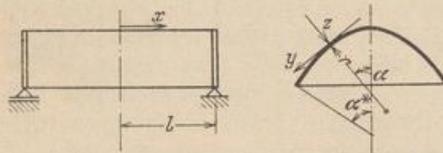


Abb. 838.

Die Belastung p wirkt stetig, wird aber im Hinblick auf die Anwendung im Bauwesen derart angenommen, daß $p_x = 0$ und

p_y, p_z allein stetige Funktionen von α , also unabhängig von x sind. Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen (1263) lauten dann folgendermaßen:

$$\left. \begin{aligned} N_\alpha &= -p_z r, & N_{\alpha x} &= -\left(p_y + \frac{1}{r} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} \right) x + C_1(\alpha), \\ N_x &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(p_y + \frac{1}{r} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} \right) \frac{x^2}{2} - \frac{x}{r} \frac{\partial C_1(\alpha)}{\partial \alpha} + C_2(\alpha). \end{aligned} \right\} \quad (1265)$$

Tragwerk und Belastung sind zum Querschnitt $x = 0$ symmetrisch, so daß zur Berechnung der Integrationskonstanten $C_1(\alpha), C_2(\alpha)$ bei freier Auflagerung der Ränder $x = \pm l$ folgende Bedingungen gelten:

$$\left. \begin{aligned} x = 0: & \quad N_{\alpha x} = 0 \quad \text{also} \quad C_1(\alpha) = 0, \\ x = \pm l: & \quad N_x = 0 \quad \text{also} \quad C_2(\alpha) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(p_y + \frac{1}{r} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} \right) \frac{l^2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (1266)$$

Die Schnittkräfte sind daher

$$N_\alpha = -p_z r, \quad N_{\alpha x} = -\left(p_y + \frac{1}{r} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} \right) x, \quad N_x = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(p_y + \frac{1}{r} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} \right) \left(\frac{l^2 - x^2}{2} \right). \quad (1267)$$

Ist $x = 0$ der freie Rand einer einseitig eingespannten Tonne mit $N_x = 0, N_{\alpha x} = 0$, so ist $C_1(\alpha) = 0$ und $C_2(\alpha) = 0$.

An den Längsrändern $\alpha^* = \text{const}$ werden in der Regel Längskräfte N_α^* und Schubkräfte $N_{\alpha x}^*$ an Randglieder abgegeben. Der Längsspannungszustand der Schale bleibt dabei aber nur erhalten, wenn Dehnung und Spannung in der Grenzschicht zwischen den benachbarten Bauteilen stetig ineinander übergehen, ohne daß Biegungsspannungen entstehen.

Sind die Endtangente des Breitenschnittes senkrecht ($\alpha^* = 90^\circ$), so sind bei lotrechter Belastung die Längskräfte N_α^* Null und daher am Rande nur noch Schubkräfte $N_{\alpha x}^*$ vorhanden, die einem Randglied zugeführt werden müssen. Sie sind nach (1267) zum Breitenschnitt $x = 0$ symmetrisch und erzeugen im Querschnitt x des Randgliedes eine Längskraft

$$S = -\left(p_y + \frac{1}{r} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} \right) \int_l^x x dx = \left(p_y + \frac{1}{r} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} \right) \left(\frac{l^2 - x^2}{2} \right). \quad (1268)$$

Die Längskräfte S der beiden Randglieder bilden mit den Längskräften N_x eines Querschnitts der Tonne eine Gleichgewichtsgruppe

$$S + \int_0^{\alpha^*} N_x r d\alpha = 0$$

und erhalten damit die Bedeutung der Biegungslängskraft eines Balkenträgers.

Die Form des Breitenschnittes steht mit dem Spannungszustand in einer Beziehung, die sich bei der Belastung der Tonne durch Eigengewicht $g = \text{const}$ leicht verfolgen läßt, wenn der Parameter n in der Gleichung des Breitenschnittes $1/r = 1/a \cdot \cos^n \alpha$ durch verschiedene ganze Zahlen ersetzt wird. $n = 3$ liefert eine Parabel, $n = 2$ eine Kettenlinie, $n = 0$ einen Kreis und $n = -1$ eine Zyklode. Mit $p_x = 0$, $p_y = g \sin \alpha$, $p_z = g \cos \alpha$ ist dann

$$\left. \begin{aligned} N_\alpha &= -g a / \cos^{n-1} \alpha, \quad \text{die Bogenkraft} \quad H = -N_\alpha \cos \alpha = g a / \cos^{n-2} \alpha, \\ N_{x\alpha} &= -g x (2-n) \sin \alpha, \quad N_x = -g \frac{(2-n)}{a} \cos^{n+1} \alpha \frac{l^2}{2} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (1269)$$

a) Der Breitenschnitt ist eine Kettenlinie: $n = 2$.

$$H = g a = \text{const}, \quad N_{x\alpha} = 0, \quad N_x = 0, \quad S = 0. \quad (1270)$$

Die Tonne überträgt das Eigengewicht abgesehen von Randstörungen biegungsfrei nach den Bauteilen am Rande $\alpha^* = \text{const}$.

b) Der Breitenschnitt ist der Kettenlinie einbeschrieben: $n > 2$.

Der Bogenschub nimmt mit wachsendem α zu, die Schubkräfte $N_{\alpha x} = N_{x\alpha}$ und die Längskräfte N_x sind positiv und daher S negativ.

c) Der Breitenschnitt ist gegen die Kettenlinie überhöht: $n < 2$.

Der Bogenschub nimmt mit wachsendem α ab, die Schubkräfte $N_{\alpha x} = N_{x\alpha}$ und die Längskräfte N_x sind negativ, die Längskraft S der Randglieder positiv. Bei Tonnen mit senkrechter Endtangente ($N_\alpha^* = 0$) wird das Eigengewicht vollständig nach den Querstützen abgetragen. Die Tonne wird zum Träger. Für freitragende Schalendächer mit Querstützung durch Wände oder Binder sind nur die überhöhten Breitenschnitte geeignet.

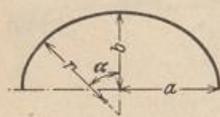
Nach diesen Untersuchungen kann das Gleichgewicht zwischen der stetigen Belastung einer Tonnenschale und den inneren Kräften eines Längsspannungszustandes nur in Verbindung mit einem Randglied hergestellt werden, dessen Längskraft S die Schubkräfte $N_{\alpha x}$ am Rande der Schale α^* aufnimmt und ausgleicht. Da jedoch der Sinn der Längskraft S des Randgliedes dem Sinne der Längskraft N_x des Schalenrandes stets entgegengesetzt ist, so kann sich in der Randzone kein Längsspannungszustand ausbilden. Die Unstetigkeit der Formänderung zwischen Schalenrand und Randglied bedeutet vielmehr stets Krümmungsänderungen durch Biegung. Sie sind um so größer, je mehr die mit der Angliederung besonderer Bauteile verbundene unstetige Gewichtsvermehrung die Annahmen über die äußeren Kräfte in den Gleichgewichtsbedingungen für den Längsspannungszustand verändert. Dabei ist zunächst noch immer ein Breitenschnitt mit senkrechter Endtangente angenommen worden. Die Verbindung von flachen Kreiszyinderschalen mit hohen Randträgern zwingt jedoch von vornherein ebenso wie die unstetige Belastung oder die unstetige Krümmung der Tonnenschalen dazu, die Biegungsspannungen des Flächentragwerks in den Vordergrund zu stellen. Dabei werden die Anschlußkräfte zwischen Träger und Schale in ähnlicher Weise wie bei den rotations-symmetrischen Schalen als die überzähligen Größen eines Hauptsystems betrachtet, das durch die Trennung der Randträger von der Schale entsteht. Die überzähligen Größen, also die Biegemomente, Längs- und Schubkräfte sind jetzt allerdings nicht mehr konstant, sondern Funktionen von x , die als periodische Funktionen in trigonometrischen Reihen entwickelt angenommen werden. Das Ergebnis entsteht

aber ebenso wie bei den biegungssteifen rotationssymmetrischen Schalen durch die Überlagerung des Längsspannungszustandes aus der vorgeschriebenen Belastung mit den Biegungsspannungen aus den überzähligen Größen, für deren Berechnung die geometrischen Bedingungen über die gegenseitige Verschiebung und Verdrehung der Ufer der Anschlußquerschnitte von Schalen und Randträger verwendet werden. Die Lösung des Problems ist von U. Finsterwalder gezeigt worden. Mit Rücksicht auf Platzmangel muß auf die angegebene Literatur verwiesen werden.

1. Der Breitenschnitt ist eine Ellipse.

$$r = \frac{a^2 b^2}{(a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)^{3/2}}$$

Schnittkräfte aus Eigengewicht $p_y = g \sin \alpha$; $p_x = g \cos \alpha$.



$$N_\alpha = -g a^2 b^2 \frac{\cos \alpha}{(a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)^{3/2}}$$

$$N_{x\alpha} = -g x \frac{2 a^2 + (a^2 - b^2) \cos^2 \alpha}{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha} \sin \alpha,$$

$$N_x = -\frac{g l^2}{2} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) \cos \alpha \frac{3 a^2 b^2 - 3 a^2 (a^2 - b^2) \sin^2 \alpha - (a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)^2}{a^2 b^2 (a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)^{1/2}}$$

Abb. 839.

Schnittkräfte aus Schneelast. $p_y = p_s \sin \alpha \cos \alpha$, $p_x = p_s \cos^2 \alpha$.

$$N_\alpha = -p_s a^2 b^2 \frac{\cos^2 \alpha}{(a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)^{3/2}}$$

$$N_{x\alpha} = -3 p_s a^2 x \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}$$

$$N_x = \frac{3}{2} p_s \frac{l^2}{b^2} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) \frac{a^2 \sin^2 \alpha - b^2 \cos^2 \alpha}{(a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)^{1/2}}$$

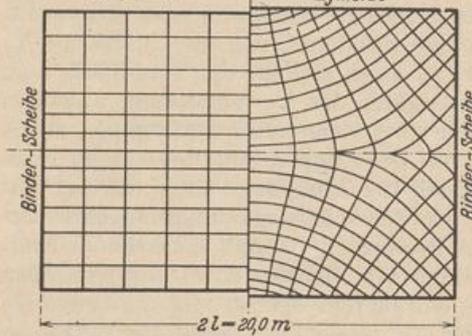
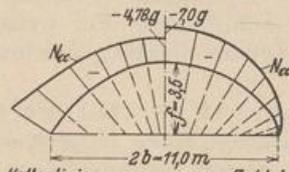


Abb. 840.

Gleichung der

Kettenlinie	Zykloide
$y = 8,28 - 4,78 \cos \frac{x}{4,78}$	$x = \frac{l}{2} (\varphi - \sin \varphi)$
$a = 4,78$	$y = \frac{l}{2} (1 - \cos \varphi)$
	$0 \leq \varphi \leq \pi$
	$a = 2f$

2. Der Breitenschnitt ist eine Zykloide.

$$r = a \cos \alpha$$

Schnittkräfte aus Eigengewicht

$$p_y = g \sin \alpha, \quad p_x = g \cos \alpha$$

$$N_\alpha = -g a \cos^2 \alpha, \quad N_{x\alpha} = -3 g a \frac{x}{a} \sin \alpha,$$

$$N_x = -\frac{3}{2} g a \frac{l^2}{a^2} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)$$

Die Schnittkräfte und Trajektorien sind in Abb. 840 mit denjenigen für eine Kettenlinie als Breitenschnitt verglichen worden.

Schnittkräfte aus Schneelast

$$p_y = p_s \sin \alpha \cos \alpha, \quad p_x = p_s \cos^2 \alpha$$

$$N_\alpha = -p_s a \cos^3 \alpha, \quad N_{x\alpha} = -4 p_s x \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$N_x = 2 p_s a \frac{l^2}{a^2} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) \frac{1 - 2 \cos^2 \alpha}{\cos \alpha}$$

Schwerin, E.: Über die Spannungen in symmetrisch und unsymmetrisch belasteten Kugelschalen. Berlin 1918 und Arm. Beton 1919 S. 25. — Thoma, D.: Die Beanspruchung freitragender mit Wasser gefüllter Rohre. Z. ges. Turbinenwes. 1920 S. 17. — Schwerin, E.: Über die Spannungen in freitragenden gefüllten Rohren. Z. angew. Math. Mech. 1922 S. 340. —

Miesel, K.: Über die Festigkeit von Kreiszyklinderschalen mit nichtachsensymmetrischer Belastung. Ing.-Arch. 1929 S. 22. — Geckeler, J.: Zur Theorie der Elastizität flacher rotationsymmetrischer Schalen. Ing.-Arch. 1930 S. 255. — Rüsck, H.: Theorie der querversteiften Zylinderschalen für schmale, unsymmetrische Kreissegmente. Diss. München 1931. — Finsterwalder, U.: Die querversteiften zylindrischen Schalengewölbe mit kreissegmentförmigem Querschnitt. Ing.-Arch. Bd. 4 (1933) S. 43.

83. Vieleckkuppeln.

Die Breitenschnitte der zyklisch symmetrischen Tragwerke sind in der Regel Vielecke mit gerader Seitenzahl ($2n$). Sie bilden n Tonnenschalen, die untereinander kongruent sind und sich gegeneinander in n Gratlinien abstützen. Die Krümmung des Querschnitts $1/R_\beta$ kann sich beliebig ändern. Sie ist jedoch in der Regel mathematisch bestimmt, der Querschnitt also z. B. ein Kreisbogen, eine Ellipse oder eine Zyklode.

Der Schalensektor ist durch einen Rand $\alpha = \alpha_2$ und durch zwei Gratlinien begrenzt, welche den Winkel $2\varphi = \pi/n$ einschließen (Abb. 841). Sind die Randbedingungen für $\alpha = \alpha_2$ nach S. 794 erfüllt und Randstörungen ohne Bedeutung, so erzeugt jede stetige Belastung allein Schnittkräfte N_α , $N_{\alpha x}$, N_x . Die allgemeinen Angaben darüber auf S. 794 enthalten zwei Funktionen $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$ als Integrationskonstante, über die im Sinne des Längsspannungszustandes in den Graten so verfügt werden kann, daß die Hauptschnittkräfte mit der Tangente an die Gratlinien zusammenfallen und daher die Komponenten in Richtung der Haupt- und Binormalen Null sind. Die Anzahl $2n$ der unbekanntenen Funktionen $f(\alpha)$ stimmt mit der Anzahl $2n$ der verfügbaren Bedingungengleichungen der Schale für den Längsspannungszustand des Tragwerks in den Graten überein. Die Grate erhalten daher bei jeder stetigen Belastung der Tonnen im wesentlichen nur Längskräfte.

Die Integration der Gleichgewichtsbedingungen (1262) für eine Belastung aus $p_x = 0$, $p_y = p_y(\alpha)$, $p_z = p_z(\alpha)$ liefert mit $R_\beta \equiv r$

$$\left. \begin{aligned} N_\alpha &= -p_z R_\beta, & N_{\alpha x} &= -\left(\frac{\partial N_\alpha}{R_\beta \partial \alpha} + p_y\right) x + f_1(\alpha) = -p_y^* x + f_1(\alpha), \\ N_x &= \frac{\partial p_y^*}{2R_\beta \partial \alpha} x^2 - \frac{\partial f_1(\alpha)}{R_\beta \partial \alpha} x + f_2(\alpha). \end{aligned} \right\} (1271)$$

Die Belastung ist entweder symmetrisch (Eigengewicht, Schneelast) oder antisymmetrisch (Windbelastung).

Die Unstetigkeit der Mittelfläche in den Gratlinien zwingt zur Zerlegung des Spannungsbildes. Der eine Anteil beschreibt die Tragwirkung der Tonne zur Übertragung der Belastung nach den Gratlinien, der andere die Tragwirkung der Kuppel zur Übertragung der Randkräfte in den Gratlinien nach den Stützpunkten und Randgliedern.

Lösung bei zyklisch symmetrischer Belastung.

Anteil I. Die Schubkräfte $N_{\alpha x}$ sind in allen Symmetrieebenen, also auch in den Querschnitten $x=0$ (Abb. 841) Null, so daß nach (1271) $f_1(\alpha) = 0$. Durch die Ausnutzung der Symmetrie ist in den Gratschnitten nur noch die Bedingung verfügbar, daß die Komponente B_α der Hauptschnittkraft in $x = l_\alpha$ in Richtung der Binormalen Null ist. Darnach gilt für den Grundriß eines differentialen Schalenteils (Abb. 842)

$$B_\alpha = (N_{\alpha,1} - 2N_{\alpha x,1} \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi + N_{\alpha,1} \cos^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \varphi) R_\beta d\alpha \cos \varphi = 0,$$

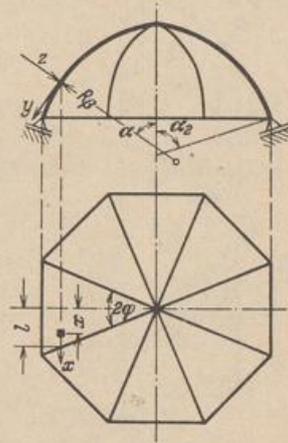


Abb. 841.

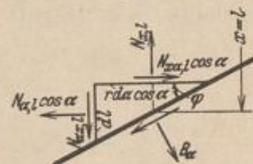


Abb. 842.

und mit (1271)

$$N_{\alpha x, l} = -p_y^* l, \quad N_{x, l} = \frac{\partial p_y^*}{2R_\beta \partial \alpha} l^2 + f_2(\alpha)$$

also

$$f_2(\alpha) = -\frac{l^2}{2} \frac{\partial p_y^*}{R_\beta \partial \alpha} - 2p_y^* l \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi + p_z R_\beta \cos^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \varphi. \quad (1272)$$

Die Trägerwirkung des Schalensektors besteht daher aus den Schnittkräften

$$\left. \begin{aligned} N_\alpha &= -p_z R_\beta, & N_{\alpha x} &= -p_y^* x, & N_x^{(T)} &= -\frac{l^2 - x^2}{2} \frac{\partial p_y^*}{R_\beta \partial \alpha} - f_2(\alpha), \\ f_3(\alpha) &= +2p_y^* l \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi + N_\alpha \cos^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (1273)$$

Sie sind jedoch nur durch die Längskraft $Z_\alpha^{(T)}$ eines Zugliedes am Rande $\alpha = \alpha_2$ im Gleichgewicht

$$Z_\alpha^{(T)} = +\frac{l^2 - x^2}{2} p_y^* + \int_0^{\alpha_2} f_3(\alpha) R_\beta d\alpha. \quad (1274)$$

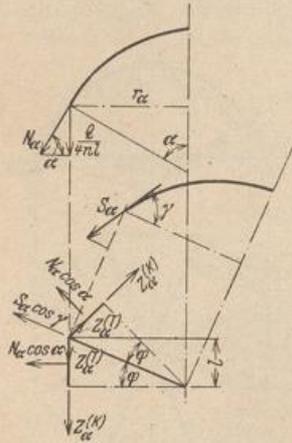


Abb. 843.

Anteil II. Der Spannungszustand durch die Kuppelwirkung des Tragwerks besteht aus Längskräften $N_x^{(K)}$, die von der nach den Graten abgetragenen Belastung hervorgerufen werden. Sie lassen sich nach (1096) am einfachsten als Zuwachs der Resultierenden $Z_\alpha^{(K)}$ aller Längskräfte oberhalb eines Breitenschnittes α berechnen.

Durch diesen werden neben der Resultierenden Q_α der Belastung die Schnittkräfte N_α , $Z_\alpha^{(T)}$ und die Längskraft S_α in Richtung der Grattangenten zu äußeren Kräften, die miteinander im Gleichgewicht sind. Die Summe aller senkrechten Komponenten liefert S_α (Abb. 843).

$$\left. \begin{aligned} Q_\alpha + 4nlN_\alpha \sin \alpha + 2nS_\alpha \sin \gamma &= 0, & \text{also mit } \sin \gamma &= 1/\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha / \cos^2 \varphi}, \\ S_\alpha &= -\left(\frac{Q_\alpha}{2n} - 2p_z R_\beta r_\alpha \sin \alpha \operatorname{tg} \varphi\right) \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha / \cos^2 \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (1275)$$

Zum Gleichgewicht der waagerechten Komponenten der Schnittkräfte S_α , N_α mit der Schubkraft $Z_\alpha^{(T)}$ an den Eckpunkten eines freien Breitenschnittes α ist die Längskraft $Z_\alpha^{(K)}$ eines Zugringes notwendig (Abb. 843).

$$\left. \begin{aligned} Z_\alpha^{(K)} + \frac{S_\alpha \cos \gamma}{2 \sin \varphi} + r_\alpha N_\alpha \cos \alpha + \int_0^\alpha f_3(\alpha) R_\beta d\alpha &= 0 \\ \text{und} \\ N_\alpha^{(K)} = -\frac{\partial Z_\alpha^{(K)}}{R_\beta \partial \alpha} = \frac{\partial}{R_\beta \partial \alpha} \left(\frac{S_\alpha \cos \gamma}{2 \sin \varphi} + r_\alpha N_\alpha \cos \alpha \right) + f_3(\alpha). \end{aligned} \right\} \quad (1276)$$

Durch die Überlagerung der Anteile I und II des Spannungszustandes entsteht die gesuchte Schnittkraft

$$\left. \begin{aligned} N_x = N_x^{(T)} + N_x^{(K)} &= -\frac{l^2 - x^2}{2} \frac{\partial p_y^*}{R_\beta \partial \alpha} + \frac{\partial}{R_\beta \partial \alpha} \left(\frac{S_\alpha \cos \gamma}{2 \sin \varphi} + r_\alpha N_\alpha \cos \alpha \right) \\ \text{mit} \\ \frac{S_\alpha \cos \gamma}{2 \sin \varphi} + r_\alpha N_\alpha \cos \alpha &= -\frac{Q_\alpha \operatorname{ctg} \alpha}{2n \sin 2\varphi} + p_z R_\beta r_\alpha \frac{\cos \alpha}{\cos^2 \varphi}, & \varphi &= \pi/2n. \end{aligned} \right\} \quad (1277)$$

Eigengewicht: $p_x = 0$, $p_y = g \sin \alpha$, $p_z = g \cos \alpha$.

$$Q_\alpha = 4n \operatorname{tg} \varphi \int_0^\alpha g R_\beta r_\alpha d\alpha = 4n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n} Q_{\alpha g}. \quad (1278)$$

Schneelast: $p_x = 0$, $p_y = p \sin \alpha \cos \alpha$, $p_z = p \cos^2 \alpha$.

$$Q_\alpha = 4n \operatorname{tg} \varphi \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{p_0}{2} r_\alpha^2 = 4n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n} Q_{\alpha 2}. \quad (1279)$$

a) Der Meridian ist ein Kreisbogen (Abb. 844):

$$Q_{\alpha 1} = g a [a(1 - \cos \alpha) - c \alpha], \quad Q_{\alpha 2} = \frac{p_0}{2} (a \sin \alpha - c)^2. \quad (1280)$$

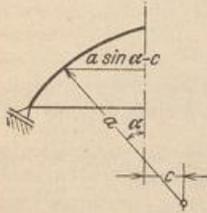


Abb. 844.

b) Der Meridian ist eine Zykloide (Abb. 845):

$$\left. \begin{aligned} Q_{\alpha 1} &= 2 g f^2 \left(\alpha \sin \alpha + \cos \alpha - \frac{1}{3} \cos^3 \alpha - \frac{2}{3} \right), \\ Q_{\alpha 2} &= \frac{p}{8} f^2 (2\alpha + \sin 2\alpha)^2 \end{aligned} \right\} (1281)$$

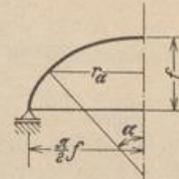


Abb. 845.

Ist die Meridiankurve anderweit festgelegt, so werden die Integrationen in Verbindung mit $R_\beta d\alpha = ds \rightarrow \Delta s$ als Summe und die Differentialquotienten ebenso wie auf S. 763 angenähert als Differenzenquotienten berechnet.

Berechnung einer Vieleckkuppel.

Die Kuppel hat einen achteckigen Grundriß nach Abb. 841 mit $2n = 8$, $\varphi = \pi/8$ und einen Kreisquerschnitt mit dem Radius $a = 20,5$ m. Die Belastung besteht aus Eigengewicht $g = 0,20$ t/m². Nach (1273) ist

$$N_\alpha = -g a \cos \alpha = -4,1 \cos \alpha,$$

$$N_{\alpha x} = -2 g x \sin \alpha = -0,4 x \sin \alpha,$$

oder für

$$x = l = a \sin \alpha \operatorname{tg} \varphi;$$

$$N_{\alpha x}(x=l) = -3,39 \sin^2 \alpha.$$

Für den Kreisquerschnitt ist nach (1278) und (1280) $Q_\alpha = 16 g a^2 (1 - \cos \alpha) \operatorname{tg} \varphi$ und die Längskraft in den Graten nach (1275)

$$S_\alpha = 2 g a^2 \operatorname{tg} \varphi [(1 + \sin^2 \alpha) \cos \alpha - 1] \sqrt{1 + \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{\cos^2 \varphi}}.$$

Die Ringkraft ist nach (1277) für $x = 0$

$$N_{x(x=0)} = \frac{g a}{\sin^2 \alpha \cos^2 \varphi} \left[1 - \cos \alpha [1 + \sin^4 \alpha (\beta - \sin^2 \varphi)] \right].$$

Die Schnittkräfte sind in Abb. 846 dargestellt.

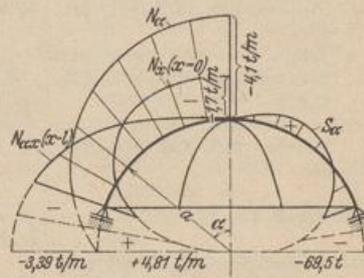


Abb. 846.

Dischinger, F.: Die Theorie der Vieleckkuppeln. Diss. Dresden und Beton u. Eisen 1929 S. 100.