Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

80. Membrantheorie für Rotationsschalen mit stetiger Belastung

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

lineare Funktionen von z sind, in welche die Dehnung $\varepsilon_{0\alpha}$, $\varepsilon_{0\beta}$ und die Krümmungsänderung $d\psi_\alpha/dy$, $d\psi_\beta/dx$ der Mittelfläche als Konstante eingehen.

$$\sigma_z = 0\,, \qquad \varepsilon_\alpha = \varepsilon_{0\alpha} + z\,d\psi_\alpha/dy\,, \qquad \varepsilon_\beta = \varepsilon_{0\beta} + z\,d\psi_\beta/dx\,.$$

Daher lassen sich auch die Spannungen σ_α, σ_β ebenso wie beim Stabe an einem Schnitte $\alpha = \text{const}$ von der Breite „1" zur Längskraft N_α in t/m und zum Biegungsmoment M_α in mt/m, an einem Schnitte $\beta = \text{const}$ von der Breite „1" zur Längskraft N_β in t/m und zum Biegungsmoment M_β in mt/m zusammenfassen. Die Schubspannungen $\tau_{\alpha z}$, $\tau_{\beta z}$ bilden die Querkräfte $Q_{\alpha z}$, $Q_{\beta z}$, die Schubspannungen $\tau_{\alpha\beta}$, $\tau_{\beta\alpha}$ im allgemeinen Schubkräfte $N_{\alpha\beta}$, $N_{\beta\alpha}$ und Drillungsmomente $M_{\alpha\beta}$, $M_{\beta\alpha}$. Schnittkräfte und Belastung des differentialen Flächenteils sind durch die Gleichgewichtsbedingungen, die Komponenten des Verzerrungszustandes, Dehnung, Krümmung und Verwindung sind mit den Komponenten u, v, w des Verschiebungszustandes der Schale durch geometrische Bedingungen verknüpft, während das Hookesche Gesetz Beziehungen zwischen den Schnittkräften und den Komponenten des Verzerrungszustandes herstellt. Dabei entstehen ebenso viele Gleichungen als unbekannte Größen eingehen.

Im Bauwesen begnügt man sich allerdings in der Regel mit Näherungslösungen, um ohne allzu großen Aufwand an Rechnung zu Zahlenergebnissen zu gelangen, welche den Spannungs- und Verschiebungszustand qualitativ richtig wiedergeben. Man benützt daher den Umstand, daß die Krümmungsänderung der Mittelfläche ($d\psi_\alpha/dy$, $d\psi_\beta/dx$, $d\psi_{\alpha\beta}/dy$, $d\psi_{\beta\alpha}/dx$) und damit Biegungs- und Drillungsmomente nur in denjenigen Abschnitten der Mittelfläche Bedeutung besitzen, in welchen Querschnitt und Form der Schale oder die äußeren Kräfte in α und β unstetig sind. Für den übrigen Bereich genügt die Beschreibung des Spannungszustandes durch die Längskräfte N_α, N_β und $N_{\alpha\beta}$, die aus den drei Gleichgewichtsbedingungen der Kräfte an einem differentialen Schalenabschnitt 1 berechnet werden können. Die Untersuchung gilt streng für die unendlich dünne Schale ohne Biegungswiderstand, so daß die Berechnung der Schnittkräfte N_α, N_β, $N_{\alpha\beta}$ allein aus den Gleichgewichtsbedingungen auch als Membrantheorie der Schale bezeichnet wird. Die Ergebnisse sind in allen den Fällen brauchbar, bei welchen die vorgeschriebenen Randbedingungen an der Schalenbegrenzung durch die Längskräfte erfüllt werden. Die Biegungsspannungen sind in diesem Falle Nebenspannungen.

Um diesen Spannungszustand in einfacher Weise durch zwei sich rechtwinklig schneidende Komponenten zu beschreiben, werden an Stelle der geometrisch ausgezeichneten Schnitte $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$ nach (40) in jedem Punkte die Richtungen 1, 2 der Hauptlängskräfte N_1, N_2 bestimmt, für welche $N_{12} = 0$ ist. Sie bilden die Trajektorien des Spannungszustandes.

Alle Festigkeitsuntersuchungen gelten unter der Voraussetzung der Stabilität des Verschiebungszustandes. Diese Bemerkung hat gerade für die Schalentheorie mit Rücksicht auf die außergewöhnlich kleine Wandstärke besondere Bedeutung.

Meißner, E.: Das Elastizitätsproblem für dünne Schalen von Ringflächen, Kugel- oder Kegelform. Physik. Z. 1913 S. 343. — Derselbe: Über Elastizität und Festigkeit dünner Schalen. Vjschr. Naturforsch. Ges. Zürich 1915. — Geckeler, J. W.: Elastostatik. Handbuch der Physik. Bd. VI: Mechanik der elastischen Körper S. 231. Berlin 1928. — Föppl, A. u. L.: Drang und Zwang. Bd. II, 2. Aufl. — Flügge, W.: Die Stabilität der Kreiszylinderschale. Ing.-Arch. 1932 S. 463.

80. Membrantheorie für Rotationsschalen mit stetiger Belastung $p(\alpha, \beta)$.

Der differentiale Abschnitt Abb. 766 ist geometrisch durch die Winkel α, β und durch die Krümmung $1/R_\alpha$, $1/R_\beta$ der Hauptschnitte der Mittelfläche bestimmt.

$$dF = ds_\alpha \cdot ds_\beta = r_\alpha\, d\beta \cdot R_\beta\, d\alpha\,, \qquad r_\alpha = R_\alpha \sin\alpha\,. \tag{1093}$$

Die Belastung $p(\alpha, \beta) = p_x \mathbin{\hat{+}} p_y \mathbin{\hat{+}} p_z$ steht mit den Schnittkräften

$$(N_\alpha, N_{\alpha\beta}), \quad (N_\beta, N_{\beta\alpha}), \quad \left(N_\alpha + \frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} d\alpha,\ N_{\alpha\beta} + \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} d\alpha\right),$$
$$\left(N_\beta + \frac{\partial N_\beta}{\partial \beta} d\beta,\ N_{\beta\alpha} + \frac{\partial N_{\beta\alpha}}{\partial \beta} d\beta\right)$$

im Gleichgewicht. Aus der virtuellen Drehung des Abschnitts um die z-Achse folgt, abgesehen von kleinen Größen zweiter Ordnung, $N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha}$. Die virtuelle Verschiebung des Abschnitts nach einer der drei ausgezeichneten Richtungen x, y, z liefert die Gleichgewichtsbedingungen:

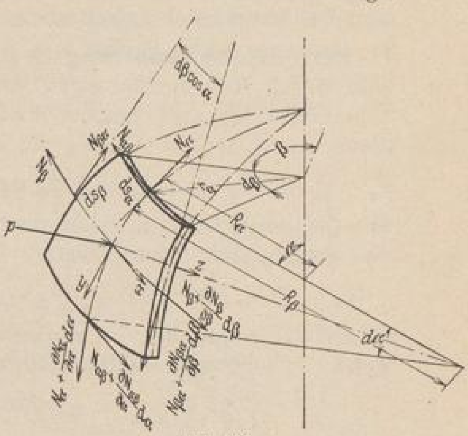

Abb. 766.

$$\text{a)} \quad \frac{\partial N_\beta}{\partial \beta} d\beta \cdot R_\beta d\alpha + N_{\alpha\beta} \cdot R_\beta d\alpha \cdot d\beta \cdot \cos\alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha}(N_{\alpha\beta} \cdot r_\alpha d\beta) d\alpha + p_x \cdot r_\alpha d\beta \cdot R_\beta d\alpha = 0,$$

$$\text{b)} \quad \frac{\partial}{\partial \alpha}(N_\alpha \cdot r_\alpha d\beta) d\alpha - N_\beta \cdot R_\beta d\alpha \cdot d\beta \cdot \cos\alpha + \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \beta} d\beta R_\beta d\alpha + p_y \cdot r_\alpha d\beta \cdot R_\beta d\alpha = 0,$$

$$\text{c)} \quad N_\alpha \cdot r_\alpha d\beta \cdot d\alpha + N_\beta \cdot R_\beta d\alpha \cdot d\beta \cdot \sin\alpha + p_z \cdot r_\alpha d\beta \cdot R_\beta d\alpha = 0.$$

Sie lassen sich folgendermaßen vereinfachen:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{a)} && \frac{\partial N_\beta}{\partial \beta} R_\beta + N_{\alpha\beta} R_\beta \cos\alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha}(N_{\alpha\beta} r_\alpha) + p_x r_\alpha R_\beta = 0, \\
&\text{b)} && \frac{\partial}{\partial \alpha}(N_\alpha r_\alpha) - N_\beta R_\beta \cos\alpha + \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \beta} R_\beta + p_y r_\alpha R_\beta = 0, \\
&\text{c)} && \frac{N_\alpha}{R_\beta} + \frac{N_\beta}{R_\alpha} + p_z = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (1094)$$

Rotationssymmetrische Belastung. Die Belastung p_x, p_y, p_z und die Funktionen der unbekannten Stütz- und Schnittkräfte N_α, N_β, $N_{\alpha\beta}$ sind vom Breitenwinkel β unabhängig, ihre Ableitungen nach β also Null, so daß die Gleichgewichtsbedingungen (1094) totale Differentialgleichungen werden.

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{d\alpha}(N_{\alpha\beta} r_\alpha) + N_{\alpha\beta} R_\beta \cos\alpha + p_x r_\alpha R_\beta = 0, \\
&\frac{d}{d\alpha}(N_\alpha r_\alpha) - N_\beta R_\beta \cos\alpha + p_y r_\alpha R_\beta = 0, \\
&\frac{N_\alpha}{R_\beta} + \frac{N_\beta}{R_\alpha} + p_z = 0.
\end{aligned}\right| \quad (1095)$$

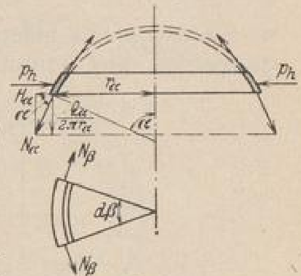

Abb. 767.

Für $p_x = 0$ ist die Schubkraft $N_{\alpha\beta}$ Null und die Schnittkraft N_α nach Elimination der Schnittkraft N_β mit der vorgeschriebenen Belastung in ähnlicher Weise wie die Schnittkräfte des Stabes (S. 27) durch eine Differentialgleichung verknüpft. Ihre Lösung läßt sich aber auch ebenso wie dort aus dem Gleichgewicht der Kräfte an einem Abschnitt des Flächentragwerks ableiten. Hierzu dient entweder der Schalenteil über einem Breitenkreis α (Belastung Q_α) oder der Ring zwischen zwei benachbarten Breitenschnitten (Abb. 767).

$$\left.\begin{aligned}
&Q_\alpha + 2\pi r_\alpha N_\alpha \sin\alpha = 0, && N_\alpha = -\frac{Q_\alpha}{2\pi r_\alpha \sin\alpha} = -\frac{Q_\alpha}{2\pi R_\alpha \sin^2\alpha}, \\
&N_\beta R_\beta d\alpha - d(r_\alpha N_\alpha \cos\alpha) + p_h r_\alpha R_\beta d\alpha = 0, && N_\beta = \frac{d}{R_\beta d\alpha}(r_\alpha N_\alpha \cos\alpha) - p_h r_\alpha.
\end{aligned}\right\} \quad (1096)$$

Der zweite Summand der rechten Seite ist bei senkrechter Belastung (Eigengewicht, Schneebelastung) Null, so daß mit $r_\alpha N_\alpha \cos\alpha = -Q_\alpha \operatorname{ctg}\alpha/2\pi$

$$N_\beta = -\frac{1}{2\pi}\,\frac{d(Q_\alpha \operatorname{ctg}\alpha)}{R_\beta\, d\alpha}\,. \tag{1097}$$

Die Meridianspannungen sind also negativ, während die Ringspannungen mit $d(Q_\alpha \operatorname{ctg}\alpha)/R_\beta d\alpha = 0$ das Vorzeichen wechseln. Die Spannungen aus Eigengewicht sind bei konstanter Schalendicke von dieser unabhängig.

Periodische Belastung in β. Die Belastung kann durch Wind hervorgerufen oder durch Randbedingungen vorgeschrieben werden. Sie läßt sich stets als trigonometrische, nach ganzen Vielfachen von β fortschreitende Reihe entwickeln, deren Koeffizienten X_n, Y_n, Z_n allein Funktionen von α sind.

$$p_x = \sum X_n \sin n\beta\,,\quad p_y = \sum Y_n \cos n\beta\,,\quad p_z = \sum Z_n \cos n\beta,\quad n = 0, 1 \ldots \infty\,. \tag{1098}$$

Die partiellen Differentialgleichungen (1094) für das Gleichgewicht der Kräfte werden dann durch einen Ansatz

$$N_\alpha = \sum N_{\alpha n} \cos n\beta\,,\qquad N_\beta = \sum N_{\beta n} \cos n\beta\,,\qquad N_{\alpha\beta} = \sum N_{\alpha\beta n} \sin n\beta \tag{1099}$$

befriedigt, wenn die von α allein abhängigen Funktionen $N_{\alpha n}$, $N_{\beta n}$, $N_{\alpha\beta n}$ gliedweise die folgenden Differentialgleichungen erfüllen:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{d\alpha}(r_\alpha N_{\alpha\beta n}) - n R_\beta N_{\beta n} + R_\beta N_{\alpha\beta n} \cos\alpha + X_n r_\alpha R_\beta = 0\,,\\
&\frac{d}{d\alpha}(r_\alpha N_{\alpha n}) + n R_\beta N_{\alpha\beta n} - R_\beta N_{\beta n} \cos\alpha + Y_n r_\alpha R_\beta = 0\,,\\
&\frac{N_{\alpha n}}{R_\beta} + \frac{N_{\beta n}}{R_\alpha} + Z_n = 0\,.
\end{aligned}\right\} \tag{1100}$$

Wird $N_{\beta n}$ eliminiert, so entstehen zwei simultane totale Differentialgleichungen für $N_{\alpha n}$ und $N_{\alpha\beta n}$.

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{d\alpha}(r_\alpha N_{\alpha\beta n}) + R_\beta N_{\alpha\beta n} \cos\alpha + n R_\alpha N_{\alpha n} = -X_n r_\alpha R_\beta - n Z_n R_\alpha R_\beta\,,\\
&\frac{d}{d\alpha}(r_\alpha N_{\alpha n}) + R_\alpha N_{\alpha n} \cos\alpha + n R_\beta N_{\alpha\beta n} = -Y_n r_\alpha R_\beta - Z_n R_\alpha R_\beta \cos\alpha\,.
\end{aligned}\right\} \tag{1101}$$

$n = 0$ und $n = 1$ liefern die Grundschwingungen einer zum Meridian $\beta = 0$ symmetrischen oder antimetrischen Belastung.

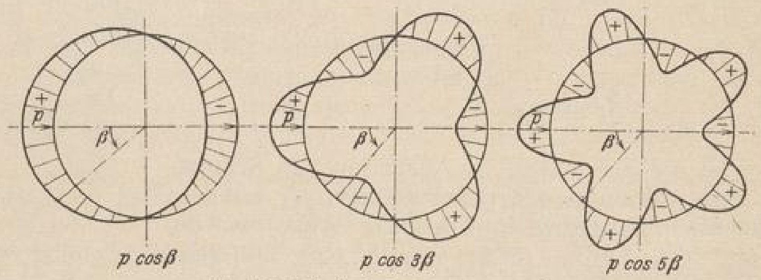

Abb. 768. Periodische Belastung $p \cos n\beta$.

Sonderfall $p_x = 0$, $p_y = 0$, $p_z = \sum Z_n(\alpha) \cos n\beta$ (Windbelastung). Die Kräfte besitzen die Periode $2\pi/n$ und bilden bei einer geraden Zahl n eine symmetrische, bei einem ungeraden n eine antimetrische Kräftegruppe. Ihr Moment in bezug auf die Drehachse ist Null. Die Gleichgewichtsbedingungen (1100) werden durch die Schnittkräfte $N_\alpha = \sum N_{\alpha n} \cos n\beta$, $N_\beta = \sum N_{\beta n} \cos n\beta$ erfüllt, die in den Meridianschnitten $\beta = 0$ und ganzzahligen Vielfachen von π/n, also $\beta = \lambda\pi/n$ Grenzwerte

$N_{\alpha n}$, $N_{\beta n}$ annehmen, dagegen in Meridianschnitten $\beta = \pi/2n + \lambda\pi/n$ Null sind. Hier werden die Schubkräfte $N_{\alpha\beta} = \sum N_{\alpha\beta n} \sin n\beta$ zu Grenzwerten $N_{\alpha\beta n}$. Die Grenzwerte $N_{\alpha n}$, $N_{\beta n}$, $N_{\alpha\beta n}$ sind durch die Gleichgewichtsbedingungen der äußeren Kräfte bestimmt, die an dem durch einen Breitenschnitt und zwei Nullmeridianen begrenzten Schalensektor angreifen.

Der Verschiebungszustand. Die Formänderung der Membranschalen ist durch die Verschiebung der Punkte der Mittelfläche bestimmt. Diese wird nach drei ausgezeichneten Achsen x, y, z in die Komponenten u, v, w zerlegt. Sie lassen sich aus den bezogenen Längen- und Winkeländerungen $\varepsilon_x = \varepsilon_\beta$, $\varepsilon_y = \varepsilon_\alpha$, $\gamma_{xy} = \gamma_{\alpha\beta}$ eines differentialen Flächenabschnitts berechnen. Die Dehnung ε_z ist auf Grund der Annahmen Null (Abb. 769).

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= \frac{1}{R_\beta d\alpha}\left[(R_\beta - w)\,d\alpha + \frac{\partial v}{R_\beta \partial\alpha} R_\beta\, d\alpha - R_\beta\, d\alpha\right] = \frac{\partial v}{R_\beta \partial\alpha} - \frac{w}{R_\beta} = \frac{v' - w}{R_\beta}, \\ \varepsilon_\beta &= \frac{1}{r_\alpha d\beta}\left[(r_\alpha - w\sin\alpha + v\cos\alpha)\,d\beta + \frac{\partial u}{\partial\beta}d\beta - r_\alpha d\beta\right] = \frac{v\,\mathrm{ctg}\,\alpha - w}{R_\alpha} + \frac{1}{R_\alpha \sin\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta}. \end{aligned}\right\} \quad (1102)$$

Bei rotationssymmetrischer Belastung ist $\partial u/\partial\beta = 0$ und nach Elimination von w

$$\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial v}{\partial\alpha} - v\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{v}{\sin\alpha}\right) = \frac{1}{\sin\alpha}(R_\beta\varepsilon_\alpha - R_\alpha\varepsilon_\beta),$$

$$\left.\begin{aligned} v &= \sin\alpha\left[\int\frac{R_\beta\varepsilon_\alpha - R_\alpha\varepsilon_\beta}{\sin\alpha}d\alpha + C_1\right], \\ w &= v\,\mathrm{ctg}\,\alpha - R_\alpha\varepsilon_\beta. \end{aligned}\right\} \quad (1103)$$

Die Winkeländerung des Flächenabschnitts ist nach (911)

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{\partial u}{R_\beta\partial\alpha} + \frac{\partial v}{r_\alpha\partial\beta} - \frac{u}{r_\alpha}\cos\alpha,$$

so daß mit v und $\gamma_{\alpha\beta}$ auch die Verschiebung u berechnet werden kann. Die Komponenten ε_α, ε_β, $\gamma_{\alpha\beta}$ der Flächenverzerrung sind mit den Schnittkräften nach (913) durch das Hookesche Gesetz verknüpft.

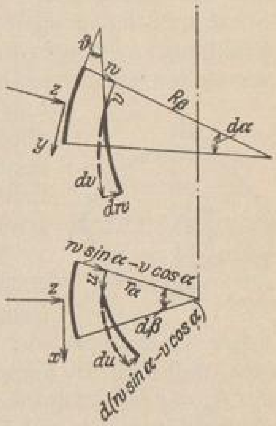

Abb. 769.

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= \frac{1}{Eh}(N_\alpha - \mu N_\beta), & \varepsilon_\beta &= \frac{1}{Eh}(N_\beta - \mu N_\alpha), & \gamma_{\alpha\beta} &= \frac{2(1+\mu)}{Eh}N_{\alpha\beta}, \\ N_\alpha &= \frac{hE}{1-\mu^2}(\varepsilon_\alpha + \mu\varepsilon_\beta), & N_\beta &= \frac{hE}{1-\mu^2}(\varepsilon_\beta + \mu\varepsilon_\alpha), & N_{\alpha\beta} &= \frac{hE}{2(1+\mu)}\gamma_{\alpha\beta}. \end{aligned}\right\} \quad (1104)$$

Die Krümmungsänderung in den Hauptschnitten wird mit

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{R_\beta} = \frac{d\alpha}{ds_\beta}, \quad \frac{1}{R_\alpha} = \frac{\sin\alpha}{r_\alpha}, \\ &\varkappa_\alpha = d\left(\frac{1}{R_\beta}\right) = \frac{d\alpha + \delta(d\alpha) - d\alpha}{ds_\beta} = \frac{\delta(d\alpha)}{ds_\beta} = \frac{d(\delta\alpha)}{ds_\beta} = \frac{d\vartheta}{R_\beta d\alpha}, \\ &\varkappa_\beta = d\left(\frac{1}{R_\alpha}\right) = \frac{\sin(\alpha + \delta\alpha) - \sin\alpha}{r_\alpha} = \frac{\delta\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha}{R_\alpha} = \frac{\vartheta\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{R_\alpha} \end{aligned}\right\} \quad (1105)$$

In der Regel begnügt man sich mit der Beschreibung des rotationssymmetrischen Verschiebungszustandes durch die Vergrößerung Δr_α des Breitenkreises und durch die Verdrehung ϑ der Tangente an die elastische Linie des Meridians.

$$\left.\begin{aligned} \Delta r_\alpha &= r_\alpha\varepsilon_\beta = \frac{r_\alpha}{Eh}(N_\beta - \mu N_\alpha), \\ \vartheta &= \frac{v}{R_\beta} + \frac{\partial w}{R_\beta\partial\alpha} = \frac{1}{R_\beta}\left[(R_\beta\varepsilon_\alpha - R_\alpha\varepsilon_\beta)\,\mathrm{ctg}\,\alpha - \frac{\partial(R_\alpha\varepsilon_\beta)}{\partial\alpha}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (1106)$$

Die Randbedingungen. Die Berechnung der Schalen nach der Membrantheorie verlangt neben der stetigen Eintragung der Belastung die stetige Änderung der Wandstärke und die stetige Krümmung der Mittelfläche. Um die Verbiegung dieser Schalen auszuschließen und den Spannungszustand abgesehen von Nebenspannungen allein durch die Längskräfte N_α, N_β und durch die Schubkräfte $N_{\alpha\beta}$, also statisch bestimmt beschreiben zu können, müssen zunächst die statischen Randbedingungen durch die Eintragung der äußeren Kräfte am Schalenrande erfüllt werden. Hierzu dienen Ringträger, um Einzelkräfte am Schalenrande gleichförmig zu verteilen und die stetige Randbelastung der Mittelfläche in Richtung der Meridiantangente zuzuführen. Daher besitzen in der Regel die geschlossenen Schalen einen Fußring, die offenen Schalen Kopf- und Fußring, die je nach ihrer Lage zum Flächentragwerk auf Zug oder Druck beansprucht werden (Abb. 770). Dabei bleibt der Membranspannungszustand der Schale nur erhalten, wenn die Dehnung der Ringträger mit der Dehnung der Schalenränder übereinstimmt. Die Begrenzung der Schale durch Ringträger ist bei stetiger Abstützung nur dann unnötig, wenn die Hauptschnitte der Ränder mit der Drehachse rechte Winkel einschließen ($\alpha_1 = 90^0$, $\alpha_2 = 90^0$), also die Endtangenten der Meridianschnitte senkrecht sind. Um die Dehnung der Schalenränder in allen anderen Fällen mit der Längenänderung der Ringträger in Einklang zu bringen und Biegungsspannungen in der Nähe des Schalenrandes zu vermeiden, kann nach einem von F. Dischinger ausgesprochenen und der Dyckerhoff & Widmann A.-G. patentierten Gedanken die Krümmung der Meridiankurve durch einen Übergangsbogen zum Ringträger derart verändert werden, daß die Randbedingungen zwischen Schalenrand und Ringträger ganz oder teilweise erfüllt sind (Abschn. 80d).

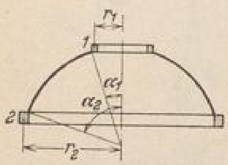

Abb. 770.

Neben den statischen Randbedingungen müssen auch die geometrischen Randbedingungen des statisch bestimmten Spannungszustandes befriedigt werden. Das Flächentragwerk muß daher so gelagert, der Überbau derart auf dem Kopfring der Schale abgestützt sein, daß sich die Verschiebungen Δr_1, Δr_2 der Endpunkte und die Verdrehungen ϑ_1, ϑ_2 der Endtangenten der Meridiankurve zwanglos einstellen können. Nur auf diese Weise lassen sich Biegungsspannungen in der Nachbarschaft der Schalenränder vermeiden. Die äußeren Kräfte können auch aus diesem Grunde an den Schalenrändern nur in Richtung der Tangenten an die Hauptschnitte der Mittelfläche eingetragen werden.

Die Belastung der Rotationsschalen. Bisher sind unter den allgemeinen Belastungsfällen nur die rotationssymmetrische Belastung und die von β periodisch abhängige Belastung hervorgehoben worden, für welche sich die Gleichgewichtsbedingungen (1094) integrieren lassen. In physikalischer Beziehung wird das Eigengewicht der Schale $p_x = 0$, $p_y = g \sin\alpha$, $p_z = g \cos\alpha$, die Schneelast $p_x = 0$, $p_y = p_s \sin\alpha \cos\alpha$, $p_z = p_s \cos^2\alpha$ und der Seitendruck von Flüssigkeiten $p_x = 0$, $p_y = 0$, $p_z = \gamma f$ unterschieden. Außerdem kann noch der Seitendruck und die Reibungskraft des Füllgutes nach den Ansätzen in Abschn. 6 zur Wirkung kommen. Durch die Verwendung der Schalen zur Überdachung von Räumen gewinnt auch der Strömungswiderstand $\mathfrak{W}$ des Windes an gekrümmten Oberflächen als äußere Ursache innerer Kräfte Bedeutung (1). Er wird in Übereinstimmung mit den baupolizeilichen Bestimmungen für die statische Untersuchung von ebenen Dachflächen in der Regel nach der Newtonschen Widerstandstheorie festgesetzt, ohne auf die Form der Schale, auf die Rauhigkeit ihrer Oberfläche oder auf die Turbulenz der Strömung Rücksicht zu nehmen und entweder nach

$$p_x = 0, \qquad p_y = 0, \qquad p_z = p_w \sin^2\alpha \cos^2\beta \tag{1107}$$

oder in Anlehnung an Versuche von M. v. Lößl nach

$$p_x = 0\,, \qquad p_y = 0\,, \qquad p_z = p_w \sin\alpha \cos\beta\,, \qquad (1108)$$

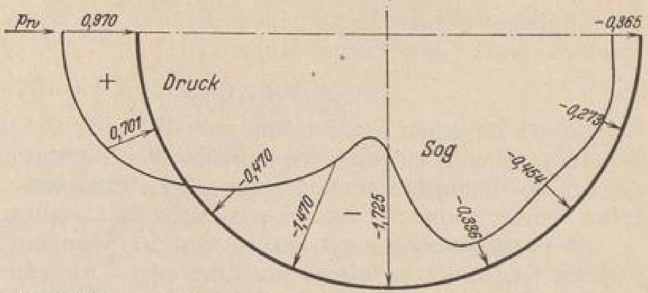

Abb. 771. Druckverteilung an einem Gasometermodell bei $v = 35$ m/sec Windgeschwindigkeit, bezogen auf den Staudruck $p_w = 1$ t/m².

allein auf den angeströmten Teil der Oberfläche verteilt. Wenn auch nach der gegenwärtigen physikalischen Erkenntnis an der Oberfläche der Schale ein vollständig andersgeartetes Kraftfeld entsteht, so begnügt man sich doch mit diesen einfachen Ansätzen, solange die Spannungen aus Wind nur einen geringen Bruchteil der zulässigen Beanspruchung des Baustoffes ausmachen. Dies gilt zunächst erfahrungsgemäß allein für die ebenen und räumlichen Stabwerke des Brücken- und Hochbaues, während die Spannungen in Schalen wesentlich von der Druckintensität p_w und von der Verteilung $p_z(\alpha, \beta)$ des Strömungswiderstandes abhängen. Diese muß, falls einfache Ansätze vorgeschrieben werden sollen, nach S. 748 im Bereiche der Schalenoberfläche stetig sein, auf Grund von Beobachtungen antimetrischen Charakter erhalten und mit dem Staudruck p_w der Ansätze (1107) oder (1108) angenommen werden. Die Integration liefert ebenfalls einen Strömungswiderstand des Baukörpers, der aber nicht mit den Versuchsergebnissen an ähnlichen Körpern im Windkanal oder mit dem Strömungswiderstand nach (1107) oder (1108) verglichen werden kann.

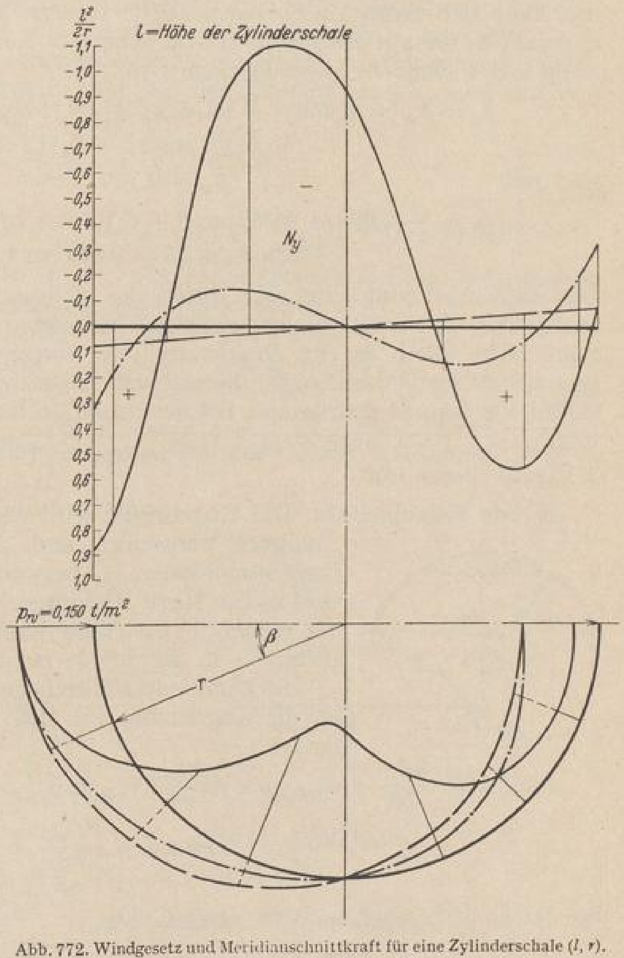

Abb. 772. Windgesetz und Meridianschnittkraft für eine Zylinderschale (l, r).
——— Windgesetz (1111) nach den Göttinger Versuchen.
—·—· Quadratisches Windgesetz (1109).
— — — Antimetrisches Windgesetz (1108).

Die Bedingungen für $p_z(\alpha, \beta)$ werden am einfachsten durch die Gleichungen (1108) mit $0 \leq \beta \leq 360^0$ erfüllt. Um eine in β quadratische Druckverteilung im Sinne der baupolizeilichen Vorschriften als stetige antimetrische Funktion zu verwenden, wird der Ansatz (1107) für $0 \leq \beta \leq 90^0$ mit $+\cos^2\beta$, für $90^0 \leq \beta \leq 180^0$ mit $-\cos^2\beta$ als Fouriersche Reihe entwickelt.

$$p_z = p_w \sin^2\alpha \cos^2\beta = p_w \sin^2\alpha\,(0{,}8493\cos\beta + 0{,}1699\cos 3\beta - 0{,}0243\cos 5\beta + 0{,}0081\cos 7\beta - 0{,}0037\cos 9\beta \pm \cdots)\,. \tag{1109}$$

Ein ähnliches Ergebnis wird von F. Dischinger auf andere Weise erzielt. Es besteht aus zwei Gliedern und lautet

$$p_z = p_w \sin^2\alpha\,(0{,}85\cos\beta + 0{,}15\cos 3\beta)\,. \tag{1110}$$

Der Ansatz ist in der Reihe (1109) enthalten, die also die Spannungen aus einem in β quadratischen Windgesetz namentlich mit Rücksicht auf die schlechte Konvergenz der zur Spannungsberechnung notwendigen abgeleiteten Funktionen besser wiedergeben würde, wenn der Ansatz physikalische Bedeutung hätte.

Die Voraussetzungen zur Berechnung der Spannungen in kreisrunden Zylindern sind im Gegensatz zu diesen unzuverlässigen Annahmen durch die Versuche der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen beim Anströmen von Gasometermodellen wesentlich verbessert worden. Die Abb. 771 zeigt das Ergebnis der Druckmessung im Bereiche eines mittleren Breitenschnittes. Die Schaulinie ist periodisch und läßt sich daher durch harmonische Analyse in eine trigonometrische Reihe entwickeln, die mit Rücksicht auf die schlechte Konvergenz der Spannungsberechnung mit 6 Gliedern angeschrieben wird.

$$\left.\begin{aligned} p_z &= p_w(-0{,}655 + 0{,}280\cos\beta + 1{,}115\cos 2\beta \\ &\qquad + 0{,}400\cos 3\beta - 0{,}113\cos 4\beta - 0{,}027\cos 5\beta) \\ \text{und mit}\qquad & p_w = 0{,}150\,\mathrm{t/m^2}\,, \\ p_z &= -0{,}098 + 0{,}042\cos\beta + 0{,}167\cos 2\beta \\ &\qquad + 0{,}060\cos 3\beta - 0{,}017\cos 4\beta - 0{,}004\cos 5\beta\,. \end{aligned}\right\} \tag{1111}$$

Die Zahlenrechnung läßt sich durch die gemessene Druckverteilung (Abb. 771) nachprüfen. Ein Vergleich der einzelnen Windgesetze für den Kreiszylinder (Abb. 772) zeigt nicht allein in der Druckverteilung, sondern auch im Spannungszustand grundsätzliche Unterschiede, die auf die Brauchbarkeit der Ansätze (1107) und (1108) für doppelt gekrümmte Schalen schließen lassen.

Dischinger, F.: Schalen- und Rippenkuppeln. Handbuch für Eisenbetonbau. Bd. VI, 2. Kapitel. Berlin 1930.

a) Die Kugelschale. Die Kugelschale wird als geschlossenes oder als offenes Tragwerk verwendet und dabei durch einen oder zwei Breitenschnitte α_1, α_2 begrenzt (Abb. 773). An den Rändern sind in der Regel Ringträger vorhanden, da hier nach S. 748 nur tangential gerichtete Kräfte ohne Störung des Membranzustandes in die Schale eingetragen werden.

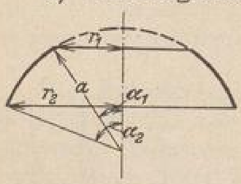

Abb. 773.

Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen (1094) lauten für die Kugelschale mit $R_\alpha = R_\beta = a$, $r_\alpha = a\sin\alpha$ folgendermaßen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial N_\beta}{\partial\beta} + N_{\alpha\beta}\cos\alpha + \frac{\partial}{\partial\alpha}(N_{\alpha\beta}\sin\alpha) + p_x a\sin\alpha &= 0\,, \\ \frac{\partial}{\partial\alpha}(N_\alpha\sin\alpha) - N_\beta\cos\alpha + \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial\beta} + p_y a\sin\alpha &= 0\,, \\ N_\alpha + N_\beta + a p_z &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{1112}$$

Sie lassen sich mathematisch vereinfachen.

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial N_\beta}{\partial\beta} + 2N_{\alpha\beta}\operatorname{ctg}\alpha + \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial\alpha} + a p_x &= 0\,, \\ \frac{\partial N_\alpha}{\partial\alpha} + (N_\alpha - N_\beta)\operatorname{ctg}\alpha + \frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial\beta} + a p_y &= 0\,, \\ N_\alpha + N_\beta + a p_z &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{1113}$$

Bei rotationssymmetrischer Belastung sind die Ableitungen nach β Null. Das Gleichgewicht der inneren und äußeren Kräfte wird dann durch drei simultane totale Differentialgleichungen beschrieben. Aus diesen folgt, daß

$$\left.\begin{aligned} N_{\alpha\beta} &= -\frac{a}{\sin^2\alpha}\int p_x \sin^2\alpha\, d\alpha + C_1\,, \qquad N_\beta = -N_\alpha - p_z a\,, \\ N_\alpha &= -\frac{a}{\sin^2\alpha}\int (p_y + p_z \operatorname{ctg}\alpha)\sin^2\alpha\, d\alpha + C_2\,. \end{aligned}\right\} \tag{1114}$$

Bedingung für C_2 bei geschlossener Kugelschale:

$$\alpha = 0: \qquad N_\alpha = N_\beta\,, \tag{1115}$$

Bedingung für C_2 bei offener Kugelschale:

$$\alpha = \alpha_1: \qquad N_\alpha = 0 \tag{1116}$$

oder einem vorgeschriebenen Betrage.

Ist $p_x = 0$, so wird $N_{\alpha\beta} = 0$.

Die Gleichung (b) in (1094) kann bei rotationssymmetrischer Belastung durch die Bedingung für das Gleichgewicht aller senkrechten Kräfte oberhalb eines Breitenkreises α ersetzt werden (S. 745) Sie liefert N_α. Damit ist auch N_β bestimmt.

Zur Beschreibung des Verschiebungszustandes genügt bei rotationssymmetrischer Belastung nach S. 747 die Vergrößerung Δr_α des Breitenkreises r_α und die Verdrehung ϑ der Meridiantangente.

$$\left.\begin{aligned} \Delta r_\alpha &= -\frac{r_\alpha}{E h}(p_z a + N_\alpha(1+\mu))\,, \\ \vartheta &= \frac{1}{E h}\left[(N_\alpha - N_\beta)(1+\mu)\operatorname{ctg}\alpha + \frac{\partial}{\partial\alpha}(\mu N_\alpha - N_\beta)\right] = \frac{a}{E h}[p_z' - (1+\mu)p_y] \end{aligned}\right\} \tag{1117}$$

Die offene Kugelschale mit rotationssymmetrischer Belastung. Für $\alpha = \alpha_1$ ist N_α Null oder ein vorgeschriebener Betrag $N_{\alpha,1}$.

Schnittkräfte für Eigengewicht g der Schale (Abb. 774).

$$\left.\begin{aligned} N_\alpha &= -a g\frac{\cos\alpha_1 - \cos\alpha}{\sin^2\alpha}\,, \qquad N_\beta = a g\left(\frac{\cos\alpha_1 - \cos\alpha}{\sin^2\alpha} - \cos\alpha\right), \\ \Delta r_\alpha &= \frac{a^2 g}{E h}\sin\alpha\left[\frac{\cos\alpha_1 - \cos\alpha}{\sin^2\alpha}(1+\mu) - \cos\alpha\right], \\ \vartheta &= -\frac{a g}{E h}(2+\mu)\sin\alpha\,. \end{aligned}\right| \tag{1118}$$

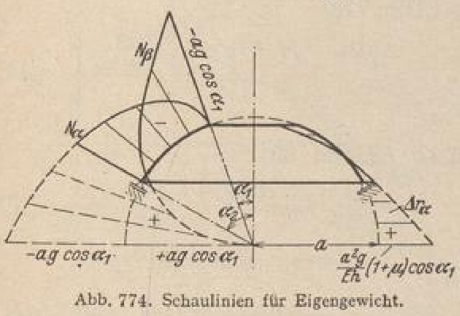

Abb. 774. Schaulinien für Eigengewicht.

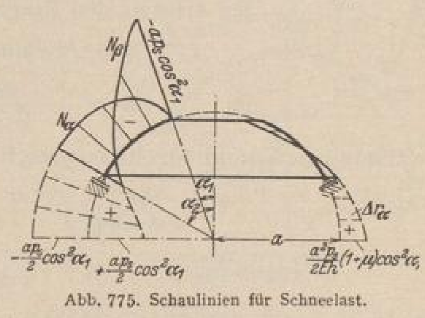

Abb. 775. Schaulinien für Schneelast.

Schnittkräfte für Schneebelastung p_s, $N_{\alpha,1} = 0$ (Abb. 775).

$$\left.\begin{aligned} N_\alpha &= -\frac{a p_s}{2}\left(1 - \frac{\sin^2\alpha_1}{\sin^2\alpha}\right), \qquad N_\beta = \frac{a p_s}{2}\left(1 - \frac{\sin^2\alpha_1}{\sin^2\alpha} - 2\cos^2\alpha\right), \\ \Delta r_\alpha &= \frac{a^2 p_s}{E h}\frac{\sin\alpha}{2}\left[\left(1 - \frac{\sin^2\alpha_1}{\sin^2\alpha}\right)(1+\mu) - 2\cos^2\alpha\right], \\ \vartheta &= -\frac{a p_s}{E h}(3+\mu)\sin\alpha\cos\alpha\,. \end{aligned}\right| \tag{1119}$$

Schnittkräfte aus der Belastung $G_L = 2\pi a P \sin\alpha_1$ durch die Laterne und den Laternenring. $N_{\alpha,1} = -P/\sin\alpha_1$ (Abb. 776).

$$N_\alpha = -N_\beta = -P\frac{\sin\alpha_1}{\sin^2\alpha}, \qquad \Delta r = \frac{Pa}{Eh}(1+\mu)\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha}, \qquad \vartheta = 0. \tag{1120}$$

Äußere Kraft H zur tangentialen Eintragung der Laternenlast P: $H = P\operatorname{ctg}\alpha_1$, Längskraft im Laternenring $N_L = -Pa\cos\alpha_1$.

Die geschlossene Kugelschale mit rotationssymmetrischer Belastung. Für $\alpha = 0$ ist $N_\alpha = N_\beta$.

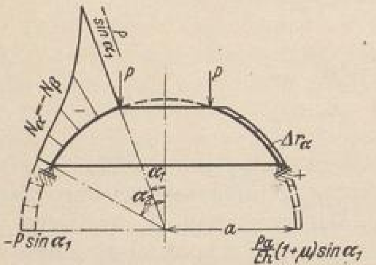

Abb. 776. Schaulinien für Laternenlast.

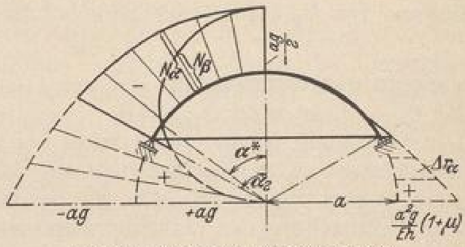

Abb. 777. Schaulinien für Eigengewicht.

Schnittkräfte für Eigengewicht $p_x = 0$, $p_y = g\sin\alpha$, $p_z = g\cos\alpha$ (Abb. 777).

$$N_\alpha = -\frac{ag}{1+\cos\alpha}, \qquad N_\beta = \frac{ag}{1+\cos\alpha}(1-\cos\alpha-\cos^2\alpha), \qquad N_{\alpha\beta} = 0. \tag{1121}$$

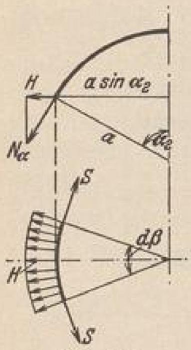

Abb. 778.

Die Längskraft N_α in Richtung des Meridians erzeugt für alle Winkel α zwischen 0^0 und 90^0 Druckspannungen. Das Vorzeichen der Längskraft N_β wechselt bei $\alpha = \alpha^*$. N_β erzeugt für alle Winkel $\alpha > \alpha^*$ Zugspannungen. Der Breitenkreis α^* mit dem Spannungswechsel $N_\beta = 0$ ist durch die Bedingung $(1-\cos\alpha^* - \cos^2\alpha^*) = 0$ bestimmt, so daß $\alpha^* = 51^0\,50'$.

$$\alpha = 0: \quad N_\alpha = N_\beta = -\frac{ag}{2}.$$

Um den senkrechten Auflagerdruck der Schale tangential zuzuführen, ist eine waagerechte Kraft $H = N_{\alpha 2}\cos\alpha_2$ notwendig. Sie erzeugt den Ringzug (Abb. 778)

$$\left.\begin{aligned} S &= Ha\sin\alpha_2. \qquad \text{Mit} \quad H = ag\frac{\cos\alpha_2}{1+\cos\alpha_2} \\ \text{ist} \quad S &= \frac{a^2 g}{2}\,\frac{\sin 2\alpha_2}{1+\cos\alpha_2}. \end{aligned}\right\} \tag{1122}$$

Verschiebungszustand für Eigengewicht nach Abschn. 80:

$$\varepsilon_\alpha = -\frac{ag}{Eh}\,\frac{1+\mu(1-\cos\alpha-\cos^2\alpha)}{1+\cos\alpha}, \qquad \varepsilon_\beta = \frac{ag}{Eh}\,\frac{1-\cos\alpha-\cos^2\alpha+\mu}{1+\cos\alpha}, \tag{1123}$$

$$R_\beta\varepsilon_\alpha - R_\alpha\varepsilon_\beta = -A\frac{2-\cos\alpha-\cos^2\alpha}{1+\cos\alpha}, \qquad A = \frac{a^2 g(1+\mu)}{Eh},$$

$$\int\frac{(R_\beta\varepsilon_\alpha - R_\alpha\varepsilon_\beta)}{\sin\alpha}\,d\alpha = A\left[\ln(1+\cos\alpha) - \frac{1}{1+\cos\alpha}\right] + C_1$$

und daher nach (1103)

$$\left.\begin{aligned} v &= \sin\alpha\left[A\left(\ln(1+\cos\alpha) - \frac{1}{1+\cos\alpha}\right) + C_1\right], \\ w &= A\cos\alpha\left[\ln(1+\cos\alpha) + \frac{1}{1+\mu}\right] - A + C_1\cos\alpha. \end{aligned}\right| \tag{1124}$$

Die senkrechten und waagerechten Komponenten t, Δr_α der Verschiebung sind mit Abb. 779 nach S. 753

$$t = w\cos\alpha + v\sin\alpha, \qquad \Delta r_\alpha = -w\sin\alpha + v\cos\alpha. \tag{1125}$$

Für $\alpha = \alpha_2$ wird $v = 0$, so daß C_1 berechnet werden kann.

$$C_1 = -A\left[\ln(1+\cos\alpha_2) - \frac{1}{1+\cos\alpha_2}\right],$$

so daß

$$\left.\begin{aligned} v &= A\sin\alpha\left[\ln\frac{1+\cos\alpha}{1+\cos\alpha_2} + \frac{1}{1+\cos\alpha_2} - \frac{1}{1+\cos\alpha}\right], \\ w &= A\cos\alpha\left[\ln\frac{1+\cos\alpha}{1+\cos\alpha_2} + \frac{1}{1+\mu} + \frac{1}{1+\cos\alpha_2}\right] - A, \\ \Delta r_\alpha &= \frac{a^2 g}{E h}\sin\alpha\left(\frac{1+\mu}{1+\cos\alpha} - \cos\alpha\right), \\ \vartheta &= -\frac{a g}{E h}(2+\mu)\sin\alpha . \end{aligned}\right\} \quad (1126)$$

Die senkrechte Verschiebung w_0 des Scheitels ($\alpha = 0$) ist

$$w_0 = A\left[\ln\frac{2}{1+\cos\alpha_2} + \frac{1}{(1+\cos\alpha_2)} - \frac{\mu}{1+\mu}\right]. \qquad (1127\text{a})$$

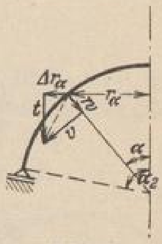

Abb. 779.

Sonderfall $\alpha_2 = 90^0$

$$w_0 = w_0^* = \frac{a^2 g}{E h}(1{,}69315 + 0{,}69315\,\mu),\ \Delta r^*_{\alpha_2} = A = \frac{a^2 g}{E h}(1+\mu). \quad (1127\text{b})$$

Eine gleichförmige Erwärmung der Kugelschale um t^0 erzeugt

$$\Delta r_\alpha = \alpha_t\, t\, a \sin\alpha, \qquad \vartheta = 0 . \qquad (1128)$$

Schnittkräfte bei Schneebelastung. $p_x = 0$, $p_y = p_s \sin\alpha\cos\alpha$, $p_z = p_s\cos^2\alpha$ (Abb. 780).

$$N_\alpha = -\frac{a p_s}{2}, \qquad N_\beta = -\frac{a p_s}{2}\cos 2\alpha . \qquad (1129)$$

Bei $\alpha > 45^0$ entstehen daher Zugspannungen σ_β.

Die waagerechte Verschiebung beträgt

$$\Delta r_\alpha = \frac{a^2 p_s}{E h}\sin\alpha\left(\frac{1+\mu}{2} - \cos^2\alpha\right) \qquad (1130)$$

und die Verdrehung der Meridiantangente

$$\vartheta = -\frac{a p_s}{E h}(3+\mu)\sin\alpha\cos\alpha . \qquad (1131)$$

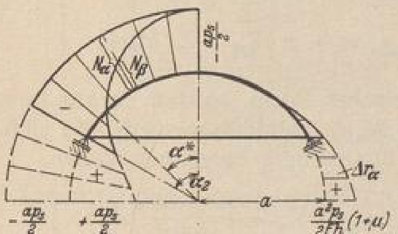

Abb. 780. Schaulinien für Schneelast.

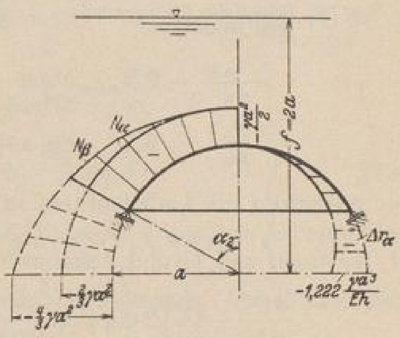

Abb. 781. Schaulinien für Wasserauflast beim Stützboden.

Wasserauflast bei Verwendung der Kugelschale als Stützboden eines Behälters (Abb. 781).

$$p_x = 0, \qquad p_y = 0, \qquad p_z = p_w = \gamma a\left(\frac{f}{a} - \cos\alpha\right),$$

$$N_\alpha = -\frac{\gamma a^2}{\sin^2\alpha}\left[\int\left(\frac{f}{a} - \cos\alpha\right)\sin\alpha\cos\alpha\, d\alpha + C_1\right]$$

$$= -\frac{\gamma a^2}{6\sin^2\alpha}\left[\frac{3f}{a}\sin^2\alpha + 2\cos^3\alpha + 6C_1\right].$$

Da N_α für $\alpha = 0$ endlich ist, wird die Klammer Null und daher $6C_1 = -2$.

$$\left.\begin{aligned} N_\alpha &= -\frac{\gamma a^2}{6}\left(3\frac{f}{a} - 2\frac{1-\cos^3\alpha}{\sin^2\alpha}\right), \quad N_\beta = -\frac{\gamma a^2}{6}\left(3\frac{f}{a} - 6\cos\alpha + 2\frac{1-\cos^3\alpha}{\sin^2\alpha}\right), \\ \Delta r_\alpha &= -\frac{\gamma a^3}{6Eh}\sin\alpha\left[3(1-\mu)\frac{f}{a} - 6\cos\alpha + 2(1+\mu)\frac{1-\cos^3\alpha}{\sin^2\alpha}\right], \\ \vartheta &= \gamma\frac{a^2}{Eh}\sin\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{1132}$$

Wird die Kugelschale nach Abb. 782 als Hängeboden eines Wasserbehälters verwendet, so erhält die bezogene Kraft g unter Beibehaltung des Koordinatensystems in den Ergebnissen (1121) bis (1127) das negative Vorzeichen.

Schnittkräfte durch Wasserauflast bei Verwendung der Kugelschale als Hängeboden eines Behälters (Abb. 782).

$$p_x = 0, \qquad p_y = 0, \qquad p_z = -\gamma a\left(\frac{f}{a} + \cos\alpha\right),$$

$$\left.\begin{aligned} N_\alpha &= \frac{\gamma a^2}{6}\left(3\frac{f}{a} + 2\frac{1-\cos^3\alpha}{\sin^2\alpha}\right), \quad N_\beta = \frac{\gamma a^2}{6}\left(3\frac{f}{a} + 6\cos\alpha - 2\frac{1-\cos^3\alpha}{\sin^2\alpha}\right), \\ \Delta r_\alpha &= \frac{\gamma a^3}{6Eh}\sin\alpha\left[3(1-\mu)\frac{f}{a} + 6\cos\alpha - 2(1+\mu)\frac{1-\cos^3\alpha}{\sin^2\alpha}\right]. \\ \vartheta &= \frac{\gamma a^2}{Eh}\sin\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{1133}$$

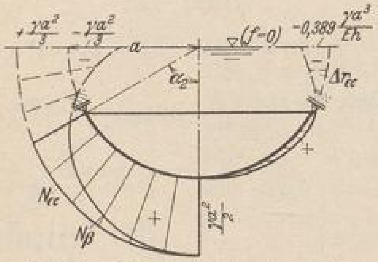

Abb. 782. Schaulinien für Wasserauflast beim Hängeboden.

Aus der Ableitung an einem Spiegelbild der Abb. 782 folgt, daß ϑ im Gegensatz zu (1132) bei Rechtsdrehung der Meridiantangente positiv ist.

Die Kugelschale mit einer vom Meridianwinkel β periodisch abhängigen Belastung. Die allgemeinen Differentialgleichungen (1101) für das Gleichgewicht der Kräfte an einer Rotationsschale lassen sich für $R_\alpha = R_\beta = a$ folgendermaßen vereinfachen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dN_{\alpha\beta n}}{d\alpha} + 2N_{\alpha\beta n}\operatorname{ctg}\alpha + \frac{n}{\sin\alpha}N_{\alpha n} &= -a\left(X_n + \frac{n}{\sin\alpha}Z_n\right), \\ \frac{dN_{\alpha n}}{d\alpha} + 2N_{\alpha n}\operatorname{ctg}\alpha + \frac{n}{\sin\alpha}N_{\alpha\beta n} &= -a(Y_n + Z_n\operatorname{ctg}\alpha). \end{aligned}\right\} \tag{1134}$$

Sie enthalten die Unbekannten in symmetrischer Form, so daß daraus neue Unbekannte $U_1 = N_{\alpha n} + N_{\alpha\beta n}$, $U_2 = N_{\alpha n} - N_{\alpha\beta n}$ gebildet werden, die sich nach H. Reißner auf Grund bekannter Regeln unabhängig berechnen lassen.

$$\left.\begin{aligned} \frac{dU_1}{d\alpha} + U_1\left(2\operatorname{ctg}\alpha + \frac{n}{\sin\alpha}\right) &= -a\left(X_n + Y_n + \frac{n+\cos\alpha}{\sin\alpha}Z_n\right), \\ \frac{dU_2}{d\alpha} + U_2\left(2\operatorname{ctg}\alpha - \frac{n}{\sin\alpha}\right) &= +a\left(X_n - Y_n + \frac{n-\cos\alpha}{\sin\alpha}Z_n\right), \end{aligned}\right\} \tag{1135}$$

Bei Windbelastung ist $p_x = 0$, $p_y = 0$, $p_z = \sum Z_n(\alpha)\cos n\beta$. Der auf jeden Schalensektor von der Winkelbreite π/n entfallende Anteil bildet eine Resultierende. Je zwei sind einander symmetrisch oder antimetrisch zugeordnet, je nachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Sie geben geometrisch addiert eine senkrechte (W_v) oder eine waagerechte Kraft (W_h), deren Wirkungslinie die Drehachse im Schalenmittelpunkt schneidet (Abb. 783).

Sonderfall $Z_n(\alpha) = p\sin\alpha$, $n = 1$. Die Spannungsverteilung ist durch einen Nullmeridian ausgezeichnet.

a) Lösung der Differentialgleichungen (1135). Die Gleichungen haben die Form

$$\frac{dU}{d\alpha} + U\varphi = \psi .$$

Die Substitution $\varphi = \overline{\varphi}'/\overline{\varphi}$ führt auf

$$\overline{\varphi} U' + U\overline{\varphi}' = \psi\overline{\varphi} , \qquad \overline{\varphi} U = \int \psi\overline{\varphi}\, d\alpha + C .$$

Durch Integration folgt

$$\int \varphi\, d\alpha = \int \frac{\overline{\varphi}'}{\overline{\varphi}}\, d\alpha = \ln \overline{\varphi} , \qquad \overline{\varphi} = e^{\int \varphi\, d\alpha}$$

und damit die Lösung

$$U = e^{-\int \varphi\, d\alpha}\left[\int \psi e^{\int \varphi\, d\alpha}\, d\alpha + C\right].$$

Die Integrationskonstanten ergeben sich aus der Bedingung, daß für $\alpha = 0$ die Schnittkräfte und damit auch U_1 und U_2 endlich sind. Die Integration bietet keine Schwierigkeiten; die Lösung lautet (Abb. 785)

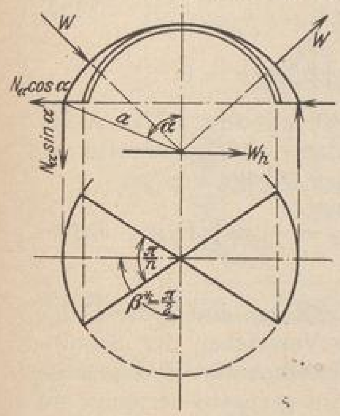

Abb. 783.

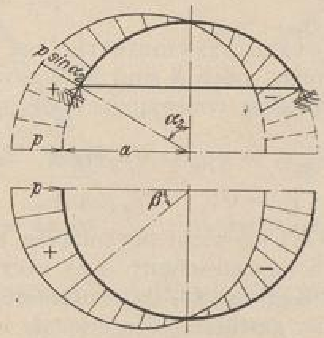

Abb. 784. Windlast $p_z = p \sin\alpha \cos\beta$.

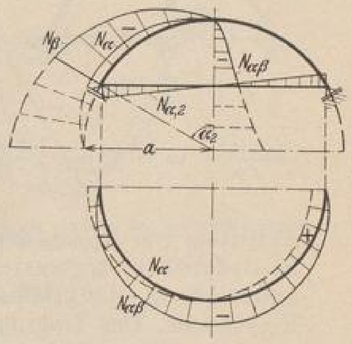

Abb. 785. Schaulinien für Windbelastung $p_z = p \sin\alpha \cos\beta$.

$$\left.\begin{aligned}
N_\alpha &= -\frac{pa}{3}\frac{\cos\alpha}{\sin^3\alpha}(2 - 3\cos\alpha + \cos^3\alpha)\cos\beta ,\\
N_{\alpha\beta} &= -\frac{pa}{3}\frac{1}{\sin^3\alpha}(2 - 3\cos\alpha + \cos^3\alpha)\sin\beta ,\\
N_\beta &= +\frac{pa}{3}\frac{1}{\sin^3\alpha}(2\cos\alpha - 3\sin^2\alpha - 2\cos^4\alpha)\cos\beta .
\end{aligned}\right\} \qquad (1136)$$

b) Unmittelbare Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen (Abb. 783 u. 784).

$$W_h = 4pa^2\int\limits_0^\alpha \sin^3\alpha\, d\alpha \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2\beta\, d\beta = p\frac{\pi a^2}{3}(2 - 3\cos\alpha + \cos^3\alpha) .$$

Gleichgewicht aller äußeren Kräfte gegen Drehen um eine Achse $\beta^* = \pi/2$ in der Ebene des Breitenkreises:

$$W_h a\cos\alpha + 4N_{\alpha 1} a^2 \sin^3\alpha \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2\beta\, d\beta = 0; \qquad \text{daraus } N_\alpha \text{ nach (1136)} .$$

Gleichgewichtsbedingung (1113):

$$N_\beta = N_{\beta 1}\cos\beta = -(pa\sin\alpha + N_{\alpha 1})\cos\beta; \qquad \text{daraus } N_\beta \text{ nach (1136)} .$$

Gleichgewicht gegen Verschieben durch W_h und durch die Komponenten der Schnittkräfte N_α, $N_{\alpha\beta}$ in Richtung W_h:

$$W_h - 4N_{\alpha 1}\, a \sin\alpha \cos\alpha \int_0^{\pi/2} \cos^2\beta\, d\beta + 4N_{\alpha\beta 1}\, a \sin\alpha \int_0^{\pi/2} \sin^2\beta\, d\beta = 0,$$

daraus $N_{\alpha\beta}$ nach (1136).

Reißner, H.: Spannungen in Kugelschalen. Müller-Breslau-Festschrift S. 192. Leipzig 1912. — Pasternak, P.: Die praktische Berechnung biegefester Kugelschalen usw. Z. angew. Math. Mech. 1926 S. 1.

b) Die Kegelschale. Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen für die äußeren Kräfte am unteren differentialen Abschnitt der Fläche erhalten mit $R_\beta = \infty$, $R_\beta d\alpha = dy$, $r_\alpha \to r_z = y\cos\alpha$, $N_\alpha \to N_y$, $N_{\alpha\beta} \to N_{y\beta}$ folgende Form (Abb. 786):

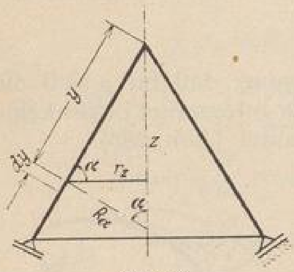

Abb. 786.

$$\left.\begin{aligned} y\frac{\partial N_{y\beta}}{\partial y} + 2N_{y\beta} + \frac{1}{\cos\alpha}\frac{\partial N_\beta}{\partial\beta} \quad y p_x &= 0, \\ y\frac{\partial N_y}{\partial y} + (N_y - N_\beta) + \frac{1}{\cos\alpha}\frac{\partial N_{y\beta}}{\partial\beta} + y p_y &= 0, \\ N_\beta + y p_z \operatorname{ctg}\alpha &= 0. \end{aligned}\right| \tag{1137}$$

Rotationssymmetrische Belastung: Die Ableitungen nach β sind Null, so daß die Schnittkräfte unabhängig voneinander berechnet werden können.

$$\frac{d(N_{y\beta}y^2)}{dy} = -y^2 p_x, \quad \frac{d(N_y y)}{dy} = -y p_y - y p_z \operatorname{ctg}\alpha, \quad N_\beta = -y p_z \operatorname{ctg}\alpha. \tag{1138}$$

$$p_x = 0: \qquad N_{y\beta} = 0.$$

Ableitung von N_y aus dem Gleichgewicht der äußeren Kräfte an einem durch den Breitenkreis r_z begrenzten Schalenabschnitt. Das obere Vorzeichen der Schnittkräfte gilt für die gestützte Kegelschale, das untere Vorzeichen für die hängende Kegelschale. Der Tragring der gestützten Kegelschale wird gezogen, derjenige der hängenden Kegelschale gedrückt.

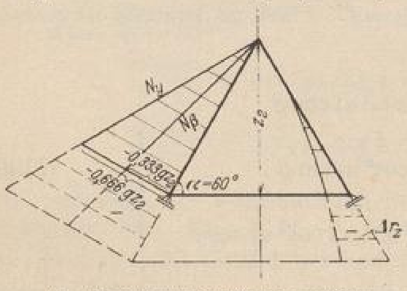

Abb. 787. Schaulinien für Eigengewicht.

$$N_y = \mp\frac{Q}{2\pi r_z \sin\alpha} = \mp\frac{Q}{\pi y \sin 2\alpha}. \tag{1139}$$

Verschiebungszustand bei rotationssymmetrischer Belastung

$$\left.\begin{aligned} r &\to r + \Delta r_z, \\ \Delta r_z &= \frac{r_z}{Eh}(N_\beta - \mu N_y) \\ &= \frac{y\cos\alpha}{Eh}(N_\beta - \mu N_y), \end{aligned}\right| \tag{1140}$$

$$\begin{aligned} \vartheta &= \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{Eh}\left[(1+\mu)(N_y - N_\beta) - y\frac{\partial}{\partial y}(N_\beta - \mu N_y)\right] \\ &= \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{Eh}\left[\operatorname{ctg}\alpha\frac{\partial}{\partial y}(y^2 p_z) - \mu y p_y + N_y\right]. \end{aligned} \tag{1141}$$

Eigengewicht einer geschlossenen Kegelschale mit gleichbleibender Wanddicke h (Abb. 787).

$$\left.\begin{aligned} &p_z = g\cos\alpha, \qquad p_y = g\sin\alpha, \qquad G = \pi r_z y g, \\ &N_y = \mp\frac{gz}{2\sin^2\alpha}, \qquad N_\beta = \mp g z \operatorname{ctg}^2\alpha, \\ &\Delta r_z = \mp\frac{gz^2 \operatorname{ctg}\alpha}{2Eh\sin^2\alpha}(2\cos^2\alpha - \mu), \quad \vartheta = \mp\frac{gz\operatorname{ctg}\alpha}{Eh\sin^2\alpha}\left[\tfrac{1}{2} + \mu - (2+\mu)\cos^2\alpha\right]. \end{aligned}\right\} \tag{1142}$$

Zur Berechnung der Schnittkräfte aus Schneelast wird $g = p_s \cos\alpha$ eingesetzt.

Waagerecht abgeglichene Auflast (Abb. 788 u. 789):

$$\left.\begin{aligned} &G=\gamma\pi r_z^2\left(f\pm\tfrac{2}{3}z\right).\quad N_y=\mp\frac{\gamma z\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{6\sin\alpha}(3f\pm 2z),\quad N_\beta=\mp\gamma z(f\pm z)\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha},\\ &\Delta r_z=\mp\frac{\gamma z^2}{E h}\frac{\cos^2\alpha}{\sin^3\alpha}\left[(f\pm z)-\frac{\mu}{6}(3f\pm 2z)\right],\\ &\vartheta=\pm\frac{\gamma z}{E h}\frac{\cos^2\alpha}{\sin^3\alpha}\left(\frac{3}{2}f\pm\frac{8}{3}z\right). \end{aligned}\right\} \tag{1143}$$

Eigengewicht (g) einer offenen Kegelschale (Abb. 790)

$$\left.\begin{aligned} &N_y=-\frac{g z}{2\sin^2\alpha}\left(1-\frac{z_1^2}{z^2}\right),\quad N_\beta=-g z\,\mathrm{ctg}^2\alpha,\\ &\Delta r_z=-\frac{g z^2}{E h}\,\mathrm{ctg}^3\alpha\left[1-\frac{\mu}{2\cos^2\alpha}\left(1-\frac{z_1^2}{z^2}\right)\right],\\ &\vartheta=-\frac{g z}{E h}\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha}{\sin^2\alpha}\times\\ &\qquad\times\left[\frac{1}{2}+\mu-(2+\mu)\cos^2\alpha-\frac{1}{2}\frac{z_1^2}{z^2}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{1144}$$

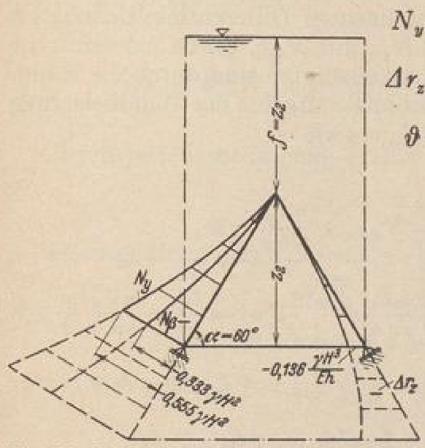

Abb. 788. Schaulinien für Auflast bei der aufgestützten Kegelschale.

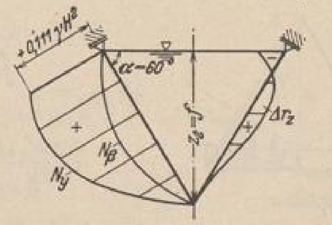

Abb. 789. Schaulinien für Auflast bei der aufgehängten Kegelschale.

Offene Kegelschale mit Kopfring und Ringlast G_0 (Abb. 791)

$$\left.\begin{aligned} &N_y=-\frac{G_0}{2\pi z\cos\alpha},\qquad N_\beta=0,\\ &\Delta r_z=\frac{\mu G_0}{2\pi E h\sin\alpha},\qquad \vartheta=-\frac{G_0}{E h}\frac{1}{2\pi z\sin\alpha}. \end{aligned}\right\} \tag{1145}$$

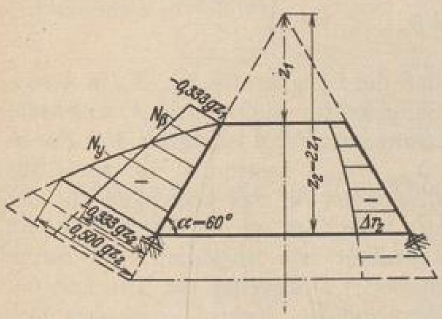

Abb. 790. Schaulinien für Eigengewicht.

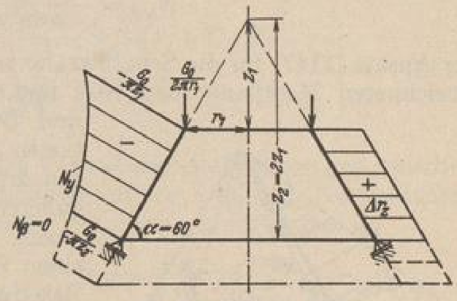

Abb. 791. Schaulinien für Ringlast.

Periodische Belastung. Entwicklung als trigonometrische, nach ganzen Vielfachen von β fortschreitende Reihe. Die Koeffizienten sind Funktionen von z.

$$p_x=\sum X_n\sin n\beta,\quad p_y=\sum Y_n\cos n\beta,\quad p_z=\sum Z_n\cos n\beta,\quad n=0,1\ldots\infty.$$

Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen (1113) werden durch den Ansatz

$$N_y=\sum N_{yn}\cos n\beta,\quad N_\beta=\sum N_{\beta n}\cos n\beta,\quad N_{y\beta}=\sum N_{y\beta n}\sin n\beta$$

erfüllt, wenn die allein von z abhängigen Funktionen N_{yn}, $N_{\beta n}$, $N_{y\beta n}$ den folgenden beiden simultanen totalen Differentialgleichungen genügen.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d N_{y\beta n}}{d y} + \frac{2}{y} N_{y\beta n} + X_n + \frac{n}{\sin\alpha} Z_n = 0\,, \\ &\frac{d}{d y}(y N_{yn}) + \frac{n}{\cos\alpha} N_{y\beta n} + y Y_n + y Z_n \operatorname{ctg}\alpha = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{1146}$$

Außerdem ist

$$N_{\beta n} = -y Z_n \operatorname{ctg}\alpha\,.$$

Darnach kann $N_{y\beta n}$ unabhängig von den beiden anderen Schnittkräften aus (1146) berechnet werden. Die allgemeine Lösung dieser linearen Differentialgleichung ist bekannt (Hütte 26. Aufl. Bd. 1 S. 101), so daß N_{yn} mit $N_{y\beta n}$ durch eine einfache Quadratur gefunden wird. Die beiden Integrationskonstanten sind durch die Randbedingungen bestimmt. Die Lösung liefert die Schnittkräfte aus der Windbelastung eines Kegeldaches mit $p_x = 0$, $p_y = 0$, $p_z = \sum Z_n \cos n\beta$.

Lösung für $Z_n = Z_n(y) = \text{const.}$

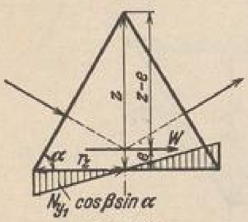

Abb. 792.

$$\frac{d N_{y\beta n}}{d y} + \frac{2}{y} N_{y\beta n} + \frac{n Z_n}{\sin\alpha} = 0\,,$$

$$N_{y\beta n} = e^{-\int \frac{2}{y} d y}\left[C_1 - \int \frac{n Z_n}{\sin\alpha} e^{\int \frac{2}{y} d y} d y\right] = \frac{C_1}{y^2} - \frac{n Z_n}{\sin\alpha}\,\frac{y}{3}\,,$$

$$\frac{d(y N_{yn})}{d y} + \frac{n}{\cos\alpha}\left(\frac{C_1}{y^2} - \frac{n Z_n}{\sin\alpha}\,\frac{y}{3}\right) + y Z_n \operatorname{ctg}\alpha = 0\,,$$

$$N_{yn} = Z_n y \frac{n^2 - 3\cos^2\alpha}{6\sin\alpha\cos\alpha} + \frac{n C_1}{y^2\cos\alpha} + \frac{C_2}{y}\,.$$

Damit für $y = 0$ die Schnittkräfte endlich bleiben, ist $C_1 = 0$, $C_2 = 0$.

$$\left.\begin{aligned} N_y &= -\frac{Z_n z}{6}\,\frac{n^2 - 3\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos\alpha}\cos n\beta\,, \\ N_\beta &= -Z_n z \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha}\cos n\beta\,, \\ N_{y\beta} &= -\frac{n Z_n z}{3\sin^2\alpha}\sin n\beta\,. \end{aligned}\right\} \tag{1147}$$

Der Ansatz (1147) für die Schnittkräfte zeigt, daß die Längskräfte N_y, N_β in n ausgezeichneten Meridianebenen Null und die Schubkräfte gleichzeitig Grenzwerte sind. Der Spannungszustand ist durch drei Funktionen N_{yn}, $N_{\beta n}$, $N_{y\beta n}$ bestimmt, die auch aus den drei Bedingungen für das Gleichgewicht der äußeren Kräfte berechnet werden können, die an einem Schalensektor π/n angreifen, der durch einen Breitenschnitt z begrenzt ist. Die aus der Belastung herrührenden Kräfte schneiden sich auf der Drehachse. Sie sind bei einer geraden Zahl n symmetrisch, ihre Resultierende senkrecht, dagegen bei einer ungeraden Zahl n antimetrisch, so daß eine waagerecht gerichtete resultierende Kraft entsteht. Die Untersuchung kann in beiden Fällen auf den halben Sektor beschränkt werden.

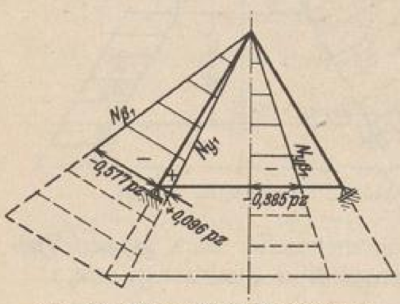

Abb. 793. Schaulinien für Windbelastung $p \sin\alpha\cos\beta$.

Lösung für $p_x = 0$, $p_y = 0$, $p_z = p\sin\alpha\cos\beta$ (Abb. 793).

Waagerechte Resultierende der äußeren Kräfte (Abb. 792).

$$W = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{y} p_z \sin\alpha\cos\beta\, dy\, r_z\, d\beta = 4p\sin^2\alpha\cos\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{y} y\cos^2\beta\, dy\, d\beta \quad = \frac{\pi}{2}p z^2\cos\alpha\,,$$

$$W\cdot(z-e) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{y} p_z\sin\alpha\cos\beta\frac{s}{\sin\alpha}r_z\, dy\, d\beta = \pi p\frac{y^3}{3}\sin\alpha\cos\alpha\,,\ (z-e) = \frac{2y}{3\sin\alpha}\,.$$

Gleichgewicht aller äußeren Kräfte gegen Drehen um eine Achse $\beta^* = \frac{\pi}{2}$ in der Ebene des Breitenkreises.

$$We = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} N_{y1}\cos\beta\sin\alpha\cdot r_z\cos\beta\cdot r_z\, d\beta, \quad N_y = \frac{pz}{6}\frac{1-3\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\cos\beta\,.$$

Gleichgewichtsbedingung (1137)

$$N_\beta = -p z \operatorname{ctg}\alpha\cos\beta\,.$$

Gleichgewicht gegen Verschieben in der Richtung W

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} N_y\cos\alpha\cos\beta\cdot r_z\, d\beta + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} N_{y\beta 1}\sin^2\beta\cdot r_z\, d\beta - W = 0\,,$$

$$N_{y\beta} = -\frac{pz}{3\sin\alpha}\sin\beta\,.$$

c) Die Zylinderschale. Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen (1137) der Kegelschale vereinfachen sich mit $r = a = \text{const}$ und $\alpha = 90^0$. Sie lauten

$$\frac{\partial N_\beta}{\partial\beta} + a\frac{\partial N_{y\beta}}{\partial y} + a p_x = 0\,,\quad \frac{\partial N_{y\beta}}{\partial\beta} + a\frac{\partial N_y}{\partial y} + a p_y = 0\,,\quad N_\beta + a p_z = 0\,, \tag{1148}$$

so daß die Schnittkräfte N_β, $N_{y\beta}$, N_y in Verbindung mit zwei Integrationskonstanten der Reihe nach berechnet werden können. Diese sind durch die Randbedingungen bestimmt.

$$\left.\begin{aligned} N_\beta = -p_z a\,, \qquad N_{y\beta} &= \int\left(\frac{\partial p_z}{\partial\beta} - p_x\right)dy + C_1(\beta)\,,\\ N_y = -\int\left[p_y + \frac{1}{a}\int\left(\frac{\partial^2 p_z}{\partial\beta^2} - \frac{\partial p_x}{\partial\beta}\right)dy + \frac{dC_1(\beta)}{d\beta}\right]&dy + C_2(\beta)\,.\end{aligned}\right\} \tag{1149}$$

Die Formänderung der Zylinderschale ist den Verträglichkeitsbedingungen zwischen den Komponenten u, v, w des Verschiebungszustandes und den Komponenten ε_y, ε_β, $\gamma_{y\beta}$ der Verzerrung eines differentialen Abschnitts unterworfen.

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}\,,\quad \varepsilon_\beta = \frac{\partial u}{a\,\partial\beta} - \frac{w}{a}\,,\quad \gamma_{y\beta} = \frac{\partial v}{a\,\partial\beta} + \frac{\partial u}{\partial y}\,,\\ &\text{so daß}\\ &v = \int\varepsilon_y\, dy + C_3(\beta)\,,\quad u = \int\left(\gamma_{y\beta} - \frac{\partial v}{a\,\partial\beta}\right)dy + C_4(\beta)\,,\quad w = \frac{\partial u}{\partial\beta} - a\,\varepsilon_\beta\,.\end{aligned}\right\} \tag{1150}$$

Die Dehnungen ε_y, ε_β und die Winkeländerung $\gamma_{y\beta}$ sind durch das Elastizitätsgesetz bestimmt (1104). Darnach ist

$$\varepsilon_y = \frac{1}{Eh}(N_y - \mu N_\beta)\,,\qquad \varepsilon_\beta = \frac{1}{Eh}(N_\beta - \mu N_y)\,,\qquad \gamma_{y\beta} = \frac{2(1+\mu)}{Eh}N_{y\beta}\,. \tag{1151}$$

Rotationssymmetrische Belastung. Die Ableitung der Funktionen der Schnittkräfte nach β sind Null, so daß nach (1148) folgender Ansatz verwendet werden kann.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dN_{y\beta}}{dy} + p_x = 0, \qquad \frac{dN_y}{dy} + p_y = 0, \qquad N_\beta + a p_z = 0, \\ &-w = \Delta a = \frac{a}{Eh}(N_\beta - \mu N_y), \qquad \vartheta = dw/dy. \end{aligned}\right\} \tag{1152}$$

Schnittkräfte aus dem Eigengewicht g einer Zylinderschale mit Aufbau (Gewicht G_0, Abb. 794)

$$N_y = -gy - \frac{G_0}{2a\pi}, \quad N_\beta = 0, \quad Ehw = -\mu\left(ayg + \frac{G_0}{2\pi}\right), \quad Eh\vartheta = -\mu a g. \tag{1153}$$

Bei den folgenden Belastungsarten ist die Meridianschnittkraft N_y Null.

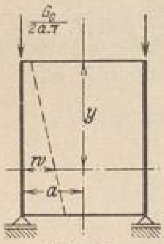

Abb. 794.

1. Wasserfüllung mit $p_z = -\gamma y$:

$$N_\beta = \gamma y a, \qquad Ehw = -\gamma y a^2, \qquad Eh\vartheta = -\gamma a^2. \tag{1154}$$

2. Silodruck nach S. 14 mit $p_s = p_{s,\max}(1 - e^{-y/y_0})$, $p_z = -p_s$:

$$N_\beta = a p_s, \quad Ehw = -a^2 p_s, \quad Eh\vartheta = -p_{s,\max}\frac{a^2}{y_0}e^{-y/y_0}. \tag{1155}$$

3. Erddruck nach S. 9 mit $e = \gamma_e \operatorname{tg}^2(45 - \varphi/2)$, $p_z = e(y + q/\gamma_e)$:

$$N_\beta = -ae(y + q/\gamma_e), \quad Ehw = a^2 e(y + q/\gamma_e), \quad Eh\vartheta = a^2 e. \tag{1156}$$

4. Temperatur und Schwinden:

$$w = -\alpha_t t a, \qquad \vartheta = 0. \tag{1157}$$

Periodische Belastung. Entwicklung als trigonometrische, nach ganzen Vielfachen von β fortschreitende Reihe. Die Koeffizienten X_n, Y_n, Z_n sind Funktionen von y.

$$p_x = \sum X_n \sin n\beta, \qquad p_y = \sum Y_n \cos n\beta, \qquad p_z = \sum Z_n \cos n\beta. \tag{1158}$$

Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen (1148) werden durch den Ansatz

$$N_y = \sum N_{yn} \cos n\beta, \quad N_\beta = \sum N_{\beta n} \cos n\beta, \qquad N_{y\beta} = \sum N_{y\beta n} \sin n\beta \tag{1159}$$

erfüllt, wenn die allein von y abhängigen Funktionen N_{yn}, $N_{\beta n}$, $N_{y\beta n}$ den folgenden beiden simultanen totalen Differentialgleichungen genügen.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dN_{y\beta n}}{dy} + X_n + nZ_n = 0, \qquad \frac{dN_{yn}}{dy} + \frac{n}{a}N_{y\beta n} + Y_n = 0, \\ &N_{\beta n} + aZ_n = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1160}$$

Berechnung einer Zylinderschale (Abb. 795).

(Kühlturm im Kraftwerk Golpa-Zschornewitz.)

Geometrische Abmessungen.

$$a = 16{,}7\,\text{m}, \qquad l = 32{,}0\,\text{m}.$$

Belastung. Windgesetz (1111) der Göttinger Versuchsanstalt mit $p_w = 0{,}200\ \text{t/m}^2$.

$$p_x = 0, \quad p_y = 0, \quad p_z = \sum Z_n \cos n\beta = -0{,}131 + 0{,}056\cos\beta + 0{,}223\cos 2\beta + 0{,}080\cos 3\beta.$$

Lösung der Differentialgleichungen (1160).

$$X_n = 0, \qquad Y_n = 0, \qquad Z_n = \text{const}.$$

$$N_{y\beta n} = -nZ_n(y + C_1),$$

$$N_{yn} = \frac{n^2 Z_n}{a}\left(\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2\right),$$

$$N_{\beta n} = -aZ_n.$$

Für $y = 0$ ist $N_{yn} = 0$, $N_{y\beta n} = 0$, daher $C_1 = 0$, $C_2 = 0$.

$$N_y = \frac{y^2}{2a} \sum n^2 Z_n \cos n\beta ,$$

$$N_\beta = -a \sum Z_n \cos n\beta ,$$

$$N_{y\beta} = -y \sum n Z_n \sin n\beta .$$

Schnittkräfte und Trajektorien der Hauptspannungen sind in Abb. 795 u. 796 dargestellt.

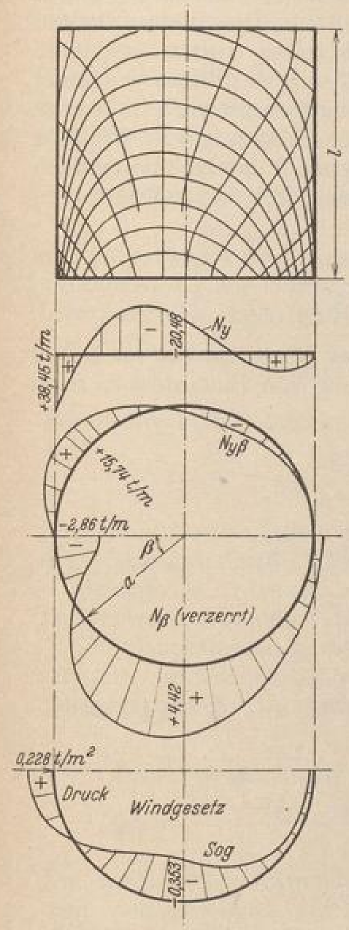

Abb. 795.

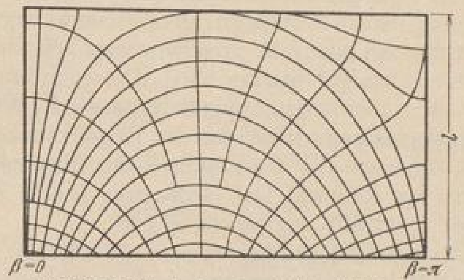

Abb. 796. Trajektorien im abgewickelten Zylindermantel.

d) Der Schalenrand. Ein Längsspannungszustand kann sich auch bei stetiger Krümmung der Mittelfläche, bei stetiger Änderung der Wanddicke und bei stetiger Belastung der Schale nur dann ausbilden, wenn die äußeren Kräfte am Rande in Richtung der Meridiantangente eingetragen werden, ohne daß die Formänderung des Längsspannungszustandes infolge Belastung und Temperaturänderung durch die Stützung oder den biegungssteifen Anschluß anderer Bauteile gestört wird. Diese Bedingungen lassen sich nur bei Schalen mit senkrechter Endtangente erfüllen. Der Meridian wird dabei zum Halbkreis, zur Ellipse, Zykloide, Parabel oder zu einem Korbbogen mit annähernd stetiger Änderung der Krümmung (Abb. 799).

Um Schalen ohne senkrechte Endtangente abzustützen oder senkrechte Lasten in den oberen Rand offener Schalen einzuführen und Schalen in einem Breitenkreis mit unstetiger Krümmung zu verbinden, sind Ringträger notwendig, deren Längskraft an den Unstetigkeitsstellen das Gleichgewicht der inneren Kräfte herstellt. Sie lassen sich auch zur Eintragung von Einzellasten verwenden, die als stetige Funktionen des Winkels β vorgegeben sind. Längskräfte in Ringträgern bei rotationssymmetrischer Belastung (Abb. 770).

Druckring: Zugring:

$$D = -\frac{Q_1}{2\pi} \operatorname{ctg} \alpha_1 , \qquad Z = +\frac{Q_2}{2\pi} \operatorname{ctg} \alpha_2 , \tag{1161}$$

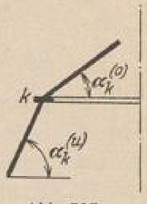

Abb. 797.

Zwischenring k zwischen zwei Meridianabschnitten mit den Tangentenwinkeln $\alpha_k^{(o)}$, $\alpha_k^{(u)}$ (Abb. 797).

$$S_k = -\frac{Q_k}{2\pi} (\operatorname{ctg} \alpha_k^{(u)} - \operatorname{ctg} \alpha_k^{(o)}) . \tag{1162}$$

Störungen des Längsspannungszustandes werden jedoch hier nur vermieden, wenn die Ringdehnung ε_β der Schale mit der Dehnung $\bar{\varepsilon}_\beta$ des Ringträgers übereinstimmt, also für $\alpha \to \alpha_2$ (Abb. 798).

$$E\varepsilon_{\beta 2} = \frac{1}{h}(N_{\beta 2} - \mu N_{\alpha 2}) = E\bar{\varepsilon}_{\beta 2} = -\left(\frac{r_2 N_{\alpha 2}\cos\alpha_2}{F_2} + \frac{\mu N_{\alpha 2}\sin\alpha_2}{b_2}\right),$$

$$-\frac{N_{\beta 2}}{N_{\alpha 2}} + \mu = \frac{h}{F_2} r_2 \cos\alpha_2 + \mu \frac{h}{b_2}\sin\alpha_2 . \tag{1163}$$

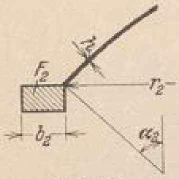

Abb. 798.

Ein Zugringträger kann daher nur unterhalb der Bruchfuge der Schale angeordnet werden ($N_{\beta 2} > 0$), so daß flache Kugel- oder Kegelschalen nach F. Dischinger einen Übergangsbogen zum Ringträger erhalten müssen, in welchem ein Teil des Bogenschubes durch Ringkräfte aufgenommen wird. Diese sind nach (1097) um so größer, je kleiner der Krümmungshalbmesser R_β der Kurve und damit auch die Länge des Übergangsbogens wird. In der Regel nimmt die Krümmung mit dem Winkel α stetig zu, um auch die Wanddicke h der Randzone gegen den Randträger allmählich vergrößern zu können. Die Bedingung (1163) kann dann durch Veränderung von h, F_2 oder α_2 erfüllt werden (s. S. 765).

Der Übergangsbogen leistet auch bei offenen Schalen gute Dienste, wenn an dem oberen Rande das Eigengewicht einer Laterne aufgenommen werden soll. Die Dehnung ε_β der Schale ist nahezu Null, während die Dehnung $\bar{\varepsilon}_\beta$ des Ringträgers sehr groß wird.

e) Rotationssymmetrische Schalen mit beliebiger Meridiankurve. Neben der Kugel-, Kegel- und Zylinderschale werden zur Lösung von Bauaufgaben noch

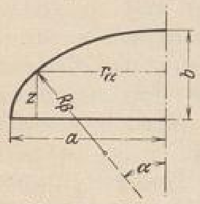

Abb. 799 a. Ellipse.

$$r_\alpha = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - z^2} = \frac{a^2 \sin\alpha}{(a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha)^{1/2}},$$

$$R_\beta = \frac{a^2 b^2}{(a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha)^{3/2}}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{dr_\alpha}{dz} = -\frac{a}{b}\,\frac{z}{\sqrt{b^2 - z^2}},$$

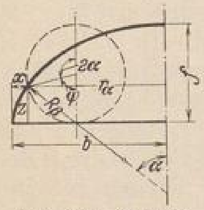

Abb. 799 b. Zykloide.

$$x = \frac{f}{2}(\varphi - \sin\varphi), \qquad z = \frac{f}{2}(1 - \cos\varphi), \qquad 0 \leqq \varphi \leqq 180^\circ,$$

$$b = \frac{\pi f}{2}, \qquad r_\alpha = \frac{f}{2}(2\alpha + \sin 2\alpha), \qquad R_\beta = 2f\cos\alpha,$$

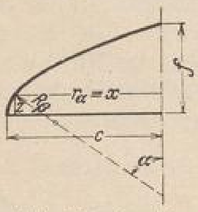

Abb. 799 c. Parabel.

$$x = \frac{2pc - z^2}{2p}, \qquad f = \sqrt{2pc},$$

$$\sin\alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2 + z^2}}, \qquad \cos\alpha = \frac{z}{\sqrt{p^2 + z^2}},$$

$$R_\alpha = \frac{x}{\sin\alpha}, \qquad R_\beta = 2\sqrt{\frac{2}{p}\left(c - x + \frac{p}{2}\right)^3}.$$

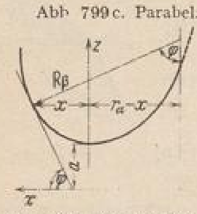

Abb. 799 d. Kettenlinie.

$$z = a\,\mathfrak{Cos}\left(\frac{x}{a}\right), \qquad \sin\varphi = \mathfrak{Tg}\left(\frac{x}{a}\right), \qquad \cos\varphi = \frac{1}{\mathfrak{Cos}\left(\frac{x}{a}\right)},$$

$$R_\alpha = r_\alpha\,\mathfrak{Ctg}\left(\frac{x}{a}\right), \qquad R_\beta = a\,\mathfrak{Cos}^2\left(\frac{x}{a}\right).$$

rotationssymmetrische Schalen mit einer Ellipse, Zykloide, Parabel oder Kettenlinie als Meridiankurve verwendet (Abb. 799). Die analytische Berechnung ihrer Längskräfte bereitet nach S. 745 keine Schwierigkeiten. Dagegen sind zur Untersuchung von Schalen mit beliebiger Meridiankurve noch einige Bemerkungen notwendig, die sich auch zur angenäherten Berechnung von Schalen mit mathematisch definierter Meridianlinie und veränderlicher Wanddicke eignen.

a) Rotationssymmetrische Belastung. Die Schnittkräfte werden aus dem Gleichgewicht der äußeren Kräfte an einem geeigneten Abschnitt des Flächentragwerks berechnet. An dem Schalenteil über einem Breitenschnitt mit dem Halbmesser r_α wirken neben der stetigen Belastung $p = p_x \mp p_z$ die Längskräfte N_α. Die Schubkräfte $N_{\alpha\beta}$ sind Null, da $N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha}$ und diese bei rotationssymmetrischer Belastung wegfallen. Mit Q_α als senkrechter Komponente der resultierenden Belastung und $p_z \sin\alpha - p_y \cos\alpha = p_h$ als waagerechter Komponente der stetigen Belastung p lauten die Gleichgewichtsbedingungen für die Kräfte an den Abschnitten Abb. 767 nach S. 745

$$\left.\begin{aligned} r_\alpha N_\alpha &= -\frac{1}{\sin\alpha}\frac{Q_\alpha}{2\pi}, \\ N_\beta &= -N_\alpha \frac{R_\alpha}{R_\beta} - p_z R_\alpha \\ &= \frac{d}{ds}(r_\alpha N_\alpha \cos\alpha) - p_h r_\alpha . \end{aligned}\right\} \qquad (1164)$$

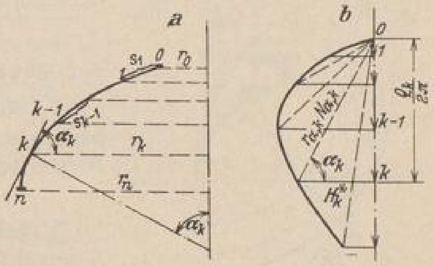

Abb. 800.

Bei senkrechter Belastung ist also

$$N_\beta = -\frac{1}{2\pi}\frac{d(Q_\alpha \operatorname{ctg}\alpha)}{ds} \qquad (1165)$$

Die Schnittkräfte lassen sich daher rechnerisch oder zeichnerisch bei jeder Form des Meridianschnittes angeben, wenn dieser mit der Punktfolge $O \ldots k \ldots n$ in n gleichgroße Intervalle s geteilt und der Differentialquotient (1165) durch den Differenzenquotienten (1166) ersetzt wird.

Die Buchstaben α_k bezeichnen die Winkel der Tangenten in den Intervallgrenzen, die Buchstaben r_k den Halbmesser der Breitenschnitte k. Ihnen sind die Kräfte Q_k und der Bogenschub $H_k^* = Q_k/2\pi \cdot \operatorname{ctg}\alpha_k$ zugeordnet.

$$\left.\begin{aligned} r_{\alpha,k} N_{\alpha,k} &= \frac{1}{\sin\alpha_k}\cdot\frac{Q_{\alpha,k}}{2\pi}, \\ N_{\beta,k} &= \frac{H_k^* - H_{k-1}^*}{s_k} - \frac{p_{h,k} + p_{h,(k-1)}}{2}\cdot\frac{r_k + r_{k-1}}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (1166)$$

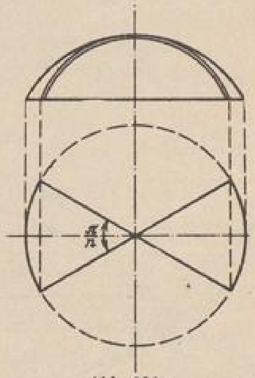
Abb. 801.

Die numerische Anwendung der Rechenvorschrift ist in dem Zahlenbeispiel auf S. 764 enthalten. Die zeichnerische Lösung besteht aus einem Kräfteplan mit $Q_0/2\pi \ldots Q_k/2\pi \ldots Q_n/2\pi$, aus dem zunächst $(r_{\alpha,k} N_{\alpha,k})$, also auch $N_{\alpha,k}$ und $(r_{\alpha,k} N_{\alpha,k} \cos\alpha_k) = H_k^*$ erhalten werden (Abb. 800). Die Ringkräfte $N_{\beta,k}$ wechseln bei senkrechter Belastung $(p_h = 0)$ mit $\Delta H_k^* = H_k^* - H_{k-1}^* = 0$ das Vorzeichen.

b) Windbelastung. Die Belastung $p_w = p_z$ kann nach S. 746 stets als trigonometrische, nach ganzen Vielfachen n von β fortschreitende Reihe entwickelt und damit in Teile zerlegt werden, die zu einer ausgezeichneten Meridianebene ($\beta = 90^0$) symmetrisch oder antimetrisch sind, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist ($p_w = \sum p_{wn}$). Die Spannungen werden für jeden Anteil p_{wn} einzeln berechnet und darauf überlagert. Die Spannungen aus dem Anteil p_{wn} eines Breitenschnittes sind nach S. 746 durch 3 Parameter bestimmt.

Sie ergeben sich aus den drei Gleichgewichtsbedingungen der äußeren Kräfte des doppelten Schalensektors vom Öffnungswinkel π/n (Abb. 801). Er wird durch Ringzonen unterteilt, in denen der Meridian sich angenähert durch gerade Strecken ersetzen läßt und besteht dann aus einzelnen abgestumpften Kreiskegeln.

Sonderfall $n = 1$, $p_z = p_w \sin\alpha\cos\beta$.

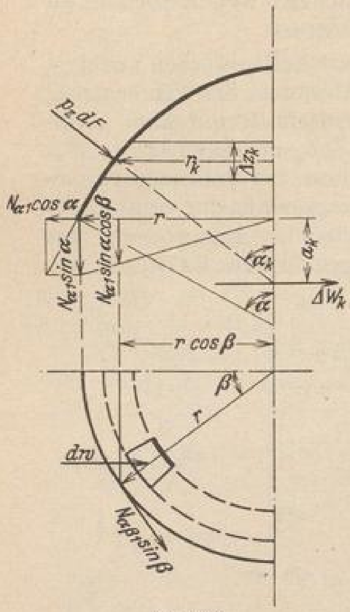

Abb. 802.

Der Normaldruck auf das Flächenteilchen dF beträgt $p_z dF$, seine Komponente in der Windrichtung mit $dF = r_\alpha\, d\beta\, dz/\sin\alpha$

$$dw = p_w r_\alpha \sin\alpha\cos^2\beta\, d\beta\, dz\,. \tag{1167}$$

Für einen vollen Ring mit der Höhe dz ist daher

$$dW = 4\int_{\beta=0}^{\beta=\pi/2} dw = \pi p_w r_\alpha \sin\alpha\, dz\,,$$

und für einen endlichen Abschnitt Δz

$$\Delta W_k = \pi p_w r_k \sin\alpha_k\, \Delta z_k\,. \tag{1168}$$

Die Kraft wirkt im Abstand a_k vom Breitenkreis r (Abb. 802), so daß sich folgende Gleichgewichtsbedingungen für die äußeren Kräfte oberhalb des Breitenschnittes r aufstellen lassen.

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma a_k \Delta W_k + 4N_{\alpha 1} r^2 \sin\alpha \int_0^{\pi/2} \cos^2\beta\, d\beta = 0\,,\\ &N_{\alpha 1} = -\frac{\Sigma a_k \Delta W_k}{\pi r^2 \sin\alpha}\,, \qquad N_\alpha = N_{\alpha 1}\cos\beta\,, \end{aligned}\right\} \tag{1169}$$

Gleichgewichtsbedingung (1094) c

$$N_{\beta 1} = -\left(p_w \sin\alpha + \frac{N_{\alpha 1}}{R_\beta}\right) R_\alpha\,, \qquad N_\beta = N_{\beta 1}\cos\beta\,, \tag{1170}$$

und

$$\Sigma\Delta W_k - 4N_{\alpha 1} r\cos\alpha \int_0^{\pi/2}\cos^2\beta\, d\beta + 4N_{\alpha\beta 1} r \int_0^{\pi/2}\sin^2\beta\, d\beta = 0\,.$$

$$N_{\alpha\beta 1} = -\frac{1}{\pi r}\left[\Sigma\Delta W_k + \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{r}\Sigma a_k \Delta W_k\right], \qquad N_{\alpha\beta} = N_{\alpha\beta 1}\sin\beta\,. \tag{1171}$$

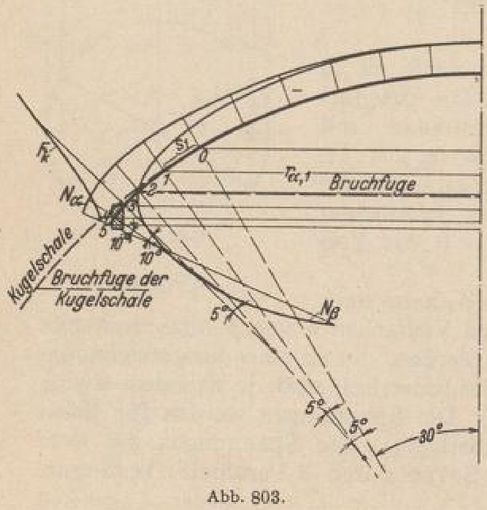

Abb. 803.

Berechnung einer Kugelschale mit Übergangsbogen für Eigengewicht.

Kugelschale: $a = 23{,}75$ m, $g = 0{,}12$ t/m², Schnittkräfte nach (1121). Bei $\alpha = 30^0$ ist

$$N_{\alpha,0} = -1{,}526 \text{ t/m}\,, \qquad N_{\beta,0} = -0{,}94 \text{ t/m}\,.$$

$$\frac{Q_{\alpha,0}}{2\pi} = -N_{\alpha,0}\cdot a\sin^2\alpha = +9{,}06 \text{ t}\,.$$

Der Übergangsbogen beginnt bei $\alpha = 30^0$ und ist geometrisch durch Abb. 803 gegeben. Er wird in Intervalle mit $\Delta\alpha = 5^0$ oder 10^0 eingeteilt. Die Radien der Breitenkreise $r_{\alpha,k}$ für die Intervallgrenze, $r_{\alpha,k'}$ für die Intervallmitte werden der Zeichnung entnommen. Schnittkräfte nach (1166).

$$Q_{\alpha,k} = Q_{\alpha,0} + \Sigma\Delta Q_{\alpha,k}\,,$$

$$\Delta Q_{\alpha\, k} = g\, s_k\, 2\pi\, r_{\alpha,k'}\,,$$

k	α_k^0	s_k m	$r_{\alpha,k'}$ m	$\Delta Q_{\alpha,k}/2\pi$ t	$Q_{\alpha,k}/2\pi$ t	$r_{\alpha,k}$ m	$\sin\alpha_k$	$r_{\alpha,k}\sin\alpha_k$	$N_{\alpha,k}$ t/m	$\operatorname{ctg}\alpha_k$	$\frac{Q_{\alpha,k}\operatorname{ctg}\alpha_k}{2\pi}$	$\frac{\Delta(Q_{\alpha,k}\operatorname{ctg}\alpha_k)}{2\pi}$	$N_{\beta,k}$ t/m
0	30				— 9,06	11,88	0,5	5,94	— 1,53	1,732	— 15,70		(— 0,94)
1	35	1,78	12,72	— 2,72	— 11,78	13,48	0,574	7,73	— 1,52	1,428	— 16,81	— 1,11	— 0,62
2	40	1,38	14,03	— 2,32	— 14,10	14,55	0,643	9,36	— 1,51	1,192	— 16,82	— 0,01	— 0,01
3	45	0,86	14,88	— 1,54	— 15,64	15,19	0,707	10,72	— 1,46	1,000	— 15,64	— 1,18	+ 1,38
4	55	0,67	15,39	— 1,24	— 16,88	15,61	0,819	12,76	— 1,32	0,700	— 11,81	— 3,83	+ 5,72
5	65	0,35	15,69	— 0,66	— 17,54	15,81	0,906	14,32	— 1,23	0,466	— 8,19	— 3,62	+ 10,34

Die günstigste Lage und der Querschnitt des Zugringes folgt aus (1163) mit $h = 0{,}05$ m und $h/b \ll 1$.

$$F_k = (0{,}05\, r_{\alpha,k} \cos\alpha_k) : \left(\frac{N_{\beta,k}}{-N_{\alpha,k}} + \mu\right) = \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{N}}.$$

k	$\cos\alpha_k$	$\mathfrak{Z}$	$\frac{N_{\beta,k}}{-N_{\alpha,k}}$	$\mathfrak{N}$	F_k cm²
2	0,766	0,557	— 0,005	0,16	34800
3	0,707	0,537	0,95	1,12	4800
4	0,574	0,448	4,34	4,51	995
5	0,423	0,335	8,40	8,57	391

Der Zugring wird bei $\alpha = 45^0$ angeordnet und erhält den Querschnitt 100/50 cm. Abb. 803 zeigt die neue Lage der Bruchfuge im Gegensatz zur Kugelschale.

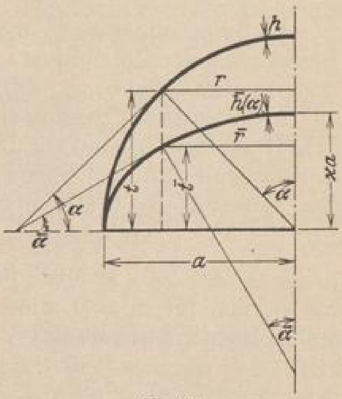

Abb. 804.

f) Schalen mit Massenausgleich. Sind die Schalen mit konstanter Wanddicke h zur Lösung einer Bauaufgabe ungeeignet, so liegt es bei der baulichen Ausbildung eines Querschnitts mit veränderlicher Wanddicke nahe, auf diejenigen elastischen Gebilde (Koordinaten $\overline{R}_\alpha$, $\overline{R}_\beta$, $\bar{\alpha}$ oder $\bar{r}$, $\bar{s}$, $\bar{t}$) zurückzugreifen, die mit einer ausgezeichneten Schale von konstanter Wanddicke (Koordinaten R_α, R_β, α oder r, s, t) geometrisch verwandt sind, und deren Spannungen wiederum im wesentlichen durch Längskräfte hervorgerufen werden.

Die Lösung ist bei rotationssymmetrischen Schalen mit einer Ellipse als Meridianschnitt am einfachsten ($\bar{r}, \bar{t}, \bar{s}, \bar{h}$). Sie wird auf eine Halbkugelschale ($r, s, t, h = \text{const}$) bezogen, die mit ihr in folgender Weise geometrisch verwandt ist (Abb. 804):

$$\bar{r} = r, \qquad \bar{s} = s, \qquad \bar{t} = \varkappa t.$$

$$d\bar{x} = dx, \quad d\bar{y} = dy\sqrt{\cos^2\alpha + \varkappa^2\sin^2\alpha}, \quad d\overline{F} = d\bar{x}\cdot d\bar{y} = dF\sqrt{\cos^2\alpha + \varkappa^2\sin^2\alpha}. \quad (1172)$$

Wird dann für die Belastung g, $\bar{g}$ der beiden geometrisch verwandten Schalen nachgewiesen, daß $g\,dF = \bar{g}\,d\overline{F}$, so ist auch $N_\beta dy = \overline{N}_\beta d\bar{y}$ und $N_\alpha dx \sin\alpha = \overline{N}_\alpha d\bar{x} \sin\bar{\alpha}$, also

$$\overline{N}_\beta = N_\beta \frac{1}{\sqrt{\cos^2\alpha + \varkappa^2\sin^2\alpha}}, \qquad \overline{N}_\alpha = N_\alpha \frac{dt}{dy}\frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} = N_\alpha \frac{\sqrt{\cos^2\alpha + \varkappa^2\sin^2\alpha}}{\varkappa} \quad (1173)$$

und für die Spannungen gilt

$$\bar{\sigma}_\alpha = \sigma_\alpha \frac{h}{\bar{h}} \frac{\sqrt{\cos^2\alpha + \varkappa^2\sin^2\alpha}}{\varkappa}, \qquad \bar{\sigma}_\beta = \sigma_\beta \frac{h}{\bar{h}} \frac{1}{\sqrt{\cos^2\alpha + \varkappa^2\sin^2\alpha}}. \quad (1174)$$

Die Lösung gilt für Eigengewicht bei veränderlicher Wanddicke $\bar{h}$ der geometrisch verwandten Schale, wenn

$$\gamma h\,dF = \gamma \bar{h}\,d\overline{F}, \quad \text{also} \quad \bar{h} = \frac{h}{\sqrt{\cos^2\alpha + \varkappa^2\sin^2\alpha}} \quad (1175)$$

Die Wanddicke $\bar{h}$ stimmt also im Scheitel ($\alpha = 0$) mit der Wanddicke h überein und erreicht am Kämpfer $\alpha = 90^0$ ihren Grenzwert $\bar{h}^* = h/\varkappa$. Die Wanddicke nimmt also bei abgeplatteten Rotationsschalen ($\varkappa < 1$) gegen den Kämpfer zu und bei überhöhten Rotationsschalen ($\varkappa > 1$) ab. In beiden Fällen wird das Eigengewicht allein durch Längsspannungen abgetragen.

Dasselbe gilt auch bei Schneebelastung, da die Bedingung $p_s \cos\alpha\, dF = p_s \cos\bar{\alpha}\, d\bar{F}$ mit $d\bar{y}/dy = d\bar{F}/dF$ erfüllt ist.

Ähnliche Betrachtungen lassen sich auch für abgeplattete oder überhöhte Schalen mit ellipsenförmigem Grundriß wiederholen. Ihre geometrische Verwandtschaft zur Halbkugelschale kann z. B. mit $\bar{r}/r = \lambda$, $\bar{s}/s = 1$, $\bar{t}/t = \varkappa$ beschrieben werden.

81. Biegungssteife rotationssymmetrische Schalen.

Die Spannungen $\sigma_\alpha(z), \sigma_\beta(z)$ usw. sind nach den Bemerkungen auf S. 744 lineare Funktionen der Dehnungen $\varepsilon_{0\alpha} \to \varepsilon_\alpha$, $\varepsilon_{0\beta} \to \varepsilon_\beta$ der Mittelfläche und der Krümmungsänderung $d(1/R_\beta) = \varkappa_\alpha$, $d(1/R_\alpha) = \varkappa_\beta$ ihrer Hauptschnitte. Sie lassen sich daher zu Schnittkräften zusammenfassen, von denen jedoch die Querkräfte $Q_{\beta z}$, die Schnittkräfte $N_{\alpha\beta}$ und die Drillungsmomente $M_{\alpha\beta}$ bei rotationssymmetrischer Belastung Null sind. Der Spannungszustand ist daher in diesem Falle durch die folgenden Schnittkräfte bestimmt:

$$\begin{array}{ll} \text{Schnitt } \alpha = \text{const}: & N_\alpha,\ M_\alpha,\ Q_{\alpha z} = Q_\alpha, \\ \text{Schnitt } \beta = \text{const}: & N_\beta,\ M_\beta,\ Q_{\beta z} = 0. \end{array}$$

Sie werden für $\sigma_z = 0$ und $h \ll R_\beta$ nach dem Hookeschen Gesetz ebenso wie auf S. 747 und S. 645 aus der Verzerrung der Mittelfläche berechnet.

$$\left.\begin{array}{lll} N_\alpha = D(\varepsilon_\alpha + \mu\,\varepsilon_\beta), & N_\beta = D(\varepsilon_\beta + \mu\,\varepsilon_\alpha), & D = \dfrac{E\,h}{1-\mu^2}, \\ M_\alpha = -B(\varkappa_\alpha + \mu\,\varkappa_\beta), & M_\beta = -B(\varkappa_\beta + \mu\,\varkappa_\alpha), & B = \dfrac{E\,h^3}{12(1-\mu^2)}. \end{array}\right\} \quad (1176)$$

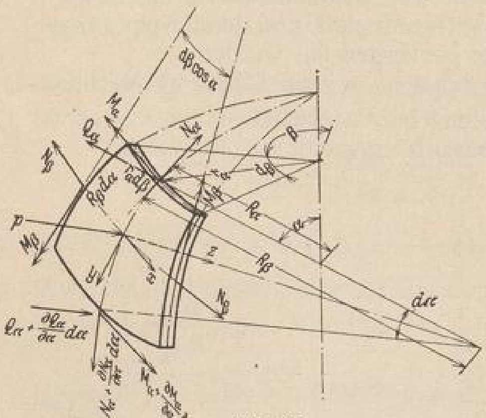

Abb. 805.

Die Verzerrung (ε_α, ε_β, $\varkappa_\alpha$, $\varkappa_\beta$) des differentialen Abschnitts der Mittelfläche steht mit den Komponenten v, w des Verschiebungszustandes (Abb. 769) nach S. 747 in folgenden Beziehungen:

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_\alpha = \dfrac{v' - w}{R_\beta}, \qquad \varepsilon_\beta = \dfrac{v \operatorname{ctg}\alpha - w}{R_\alpha}, \\ \vartheta = \dfrac{v + w'}{R_\beta}, \\ \varkappa_\alpha = \dfrac{\vartheta'}{R_\beta}, \qquad \varkappa_\beta = \dfrac{\vartheta \operatorname{ctg}\alpha}{R_\alpha}, \\ (\ )' = \dfrac{d(\ )}{d\alpha}. \end{array}\right| \quad (1177)$$

Auf diese Weise sind 12 unbekannte Komponenten des Spannungs- und Formänderungszustandes durch 9 Bedingungen miteinander verknüpft. Ihre eindeutige Berechnung gelingt in Verbindung mit den Gleichgewichtsbedingungen für die äußeren Kräfte an einem differentialen Schalenteil, die nach Abb. 805 folgendermaßen lauten:

$$\left.\begin{array}{l} (N_\alpha R_\alpha \sin\alpha)' - N_\beta R_\beta \cos\alpha - Q_\alpha R_\alpha \sin\alpha + p_y R_\alpha R_\beta \sin\alpha = 0, \\ (Q_\alpha R_\alpha \sin\alpha)' + N_\alpha R_\alpha \sin\alpha + N_\beta R_\beta \sin\alpha + p_z R_\alpha R_\beta \sin\alpha = 0, \\ (M_\alpha R_\alpha \sin\alpha)' - M_\beta R_\beta \cos\alpha - Q_\alpha R_\alpha R_\beta \sin\alpha = 0. \end{array}\right\} \quad (1178)$$