Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Rotationssymmetrische Belastung

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

Die Belastung $p(\alpha, \beta) = p_x \hat{+} p_y \hat{+} p_z$ steht mit den Schnittkräften

$$(N_\alpha, N_{\alpha\beta}), \quad (N_\beta, N_{\beta\alpha}), \quad \left(N_\alpha + \frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} d\alpha,\; N_{\alpha\beta} + \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} d\alpha\right),$$
$$\left(N_\beta + \frac{\partial N_\beta}{\partial \beta} d\beta,\; N_{\beta\alpha} + \frac{\partial N_{\beta\alpha}}{\partial \beta} d\beta\right)$$

im Gleichgewicht. Aus der virtuellen Drehung des Abschnitts um die z-Achse folgt, abgesehen von kleinen Größen zweiter Ordnung, $N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha}$. Die virtuelle Verschiebung des Abschnitts nach einer der drei ausgezeichneten Richtungen x, y, z liefert die Gleichgewichtsbedingungen:

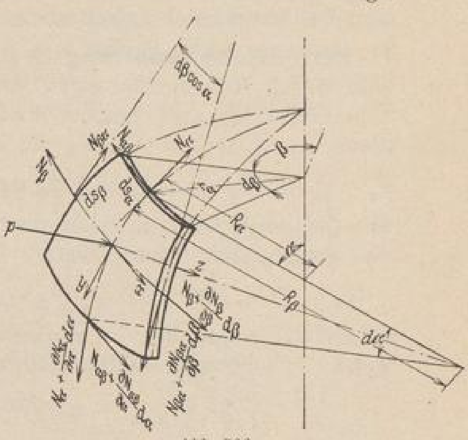

Abb. 766.

a) $$\frac{\partial N_\beta}{\partial \beta} d\beta \cdot R_\beta d\alpha + N_{\alpha\beta} \cdot R_\beta d\alpha \cdot d\beta \cdot \cos\alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha}(N_{\alpha\beta} \cdot r_\alpha d\beta)\, d\alpha + p_x \cdot r_\alpha d\beta \cdot R_\beta d\alpha = 0,$$

b) $$\frac{\partial}{\partial \alpha}(N_\alpha \cdot r_\alpha d\beta)\, d\alpha - N_\beta \cdot R_\beta d\alpha \cdot d\beta \cdot \cos\alpha + \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \beta} d\beta R_\beta d\alpha + p_y \cdot r_\alpha d\beta \cdot R_\beta d\alpha = 0,$$

c) $$N_\alpha \cdot r_\alpha d\beta \cdot d\alpha + N_\beta \cdot R_\beta d\alpha \cdot d\beta \cdot \sin\alpha + p_z \cdot r_\alpha d\beta \cdot R_\beta d\alpha = 0.$$

Sie lassen sich folgendermaßen vereinfachen:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{a)} && \frac{\partial N_\beta}{\partial \beta} R_\beta + N_{\alpha\beta} R_\beta \cos\alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha}(N_{\alpha\beta} r_\alpha) + p_x r_\alpha R_\beta = 0, \\
&\text{b)} && \frac{\partial}{\partial \alpha}(N_\alpha r_\alpha) - N_\beta R_\beta \cos\alpha + \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \beta} R_\beta + p_y r_\alpha R_\beta = 0, \\
&\text{c)} && \frac{N_\alpha}{R_\beta} + \frac{N_\beta}{R_\alpha} + p_z = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (1094)$$

Rotationssymmetrische Belastung. Die Belastung p_x, p_y, p_z und die Funktionen der unbekannten Stütz- und Schnittkräfte N_α, N_β, $N_{\alpha\beta}$ sind vom Breitenwinkel β unabhängig, ihre Ableitungen nach β also Null, so daß die Gleichgewichtsbedingungen (1094) totale Differentialgleichungen werden.

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{d\alpha}(N_{\alpha\beta} r_\alpha) + N_{\alpha\beta} R_\beta \cos\alpha + p_x r_\alpha R_\beta = 0, \\
&\frac{d}{d\alpha}(N_\alpha r_\alpha) - N_\beta R_\beta \cos\alpha + p_y r_\alpha R_\beta = 0, \\
&\frac{N_\alpha}{R_\beta} + \frac{N_\beta}{R_\alpha} + p_z = 0.
\end{aligned}\right| \qquad (1095)$$

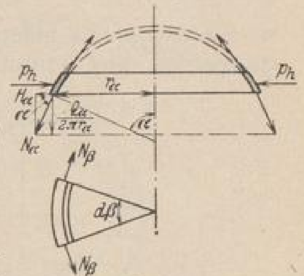

Abb. 767.

Für $p_x = 0$ ist die Schubkraft $N_{\alpha\beta}$ Null und die Schnittkraft N_α nach Elimination der Schnittkraft N_β mit der vorgeschriebenen Belastung in ähnlicher Weise wie die Schnittkräfte des Stabes (S. 27) durch eine Differentialgleichung verknüpft. Ihre Lösung läßt sich aber auch ebenso wie dort aus dem Gleichgewicht der Kräfte an einem Abschnitt des Flächentragwerks ableiten. Hierzu dient entweder der Schalenteil über einem Breitenkreis α (Belastung Q_α) oder der Ring zwischen zwei benachbarten Breitenschnitten (Abb. 767).

$$\left.\begin{aligned}
&Q_\alpha + 2\pi r_\alpha N_\alpha \sin\alpha = 0, && N_\alpha = -\frac{Q_\alpha}{2\pi r_\alpha \sin\alpha} = -\frac{Q_\alpha}{2\pi R_\alpha \sin^2\alpha}, \\
&N_\beta R_\beta d\alpha - d(r_\alpha N_\alpha \cos\alpha) + p_h r_\alpha R_\beta d\alpha = 0, && N_\beta = \frac{d}{R_\beta d\alpha}(r_\alpha N_\alpha \cos\alpha) - p_h r_\alpha.
\end{aligned}\right\} \qquad (1096)$$

Der zweite Summand der rechten Seite ist bei senkrechter Belastung (Eigengewicht, Schneebelastung) Null, so daß mit $r_\alpha N_\alpha \cos\alpha = -Q_\alpha \operatorname{ctg}\alpha/2\pi$

$$N_\beta = -\frac{1}{2\pi}\frac{d(Q_\alpha \operatorname{ctg}\alpha)}{R_\beta\, d\alpha}. \tag{1097}$$

Die Meridianspannungen sind also negativ, während die Ringspannungen mit $d(Q_\alpha \operatorname{ctg}\alpha)/R_\beta d\alpha = 0$ das Vorzeichen wechseln. Die Spannungen aus Eigengewicht sind bei konstanter Schalendicke von dieser unabhängig.

Periodische Belastung in β. Die Belastung kann durch Wind hervorgerufen oder durch Randbedingungen vorgeschrieben werden. Sie läßt sich stets als trigonometrische, nach ganzen Vielfachen von β fortschreitende Reihe entwickeln, deren Koeffizienten X_n, Y_n, Z_n allein Funktionen von α sind.

$$p_x = \sum X_n \sin n\beta, \quad p_y = \sum Y_n \cos n\beta, \quad p_z = \sum Z_n \cos n\beta, \quad n = 0, 1 \ldots \infty. \tag{1098}$$

Die partiellen Differentialgleichungen (1094) für das Gleichgewicht der Kräfte werden dann durch einen Ansatz

$$N_\alpha = \sum N_{\alpha n} \cos n\beta, \qquad N_\beta = \sum N_{\beta n} \cos n\beta, \qquad N_{\alpha\beta} = \sum N_{\alpha\beta n} \sin n\beta \tag{1099}$$

befriedigt, wenn die von α allein abhängigen Funktionen $N_{\alpha n}$, $N_{\beta n}$, $N_{\alpha\beta n}$ gliedweise die folgenden Differentialgleichungen erfüllen:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{d\alpha}(r_\alpha N_{\alpha\beta n}) - n R_\beta N_{\beta n} + R_\beta N_{\alpha\beta n} \cos\alpha + X_n r_\alpha R_\beta = 0,\\
&\frac{d}{d\alpha}(r_\alpha N_{\alpha n}) + n R_\beta N_{\alpha\beta n} - R_\beta N_{\beta n} \cos\alpha + Y_n r_\alpha R_\beta = 0,\\
&\frac{N_{\alpha n}}{R_\beta} + \frac{N_{\beta n}}{R_\alpha} + Z_n = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{1100}$$

Wird $N_{\beta n}$ eliminiert, so entstehen zwei simultane totale Differentialgleichungen für $N_{\alpha n}$ und $N_{\alpha\beta n}$.

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{d\alpha}(r_\alpha N_{\alpha\beta n}) + R_\beta N_{\alpha\beta n}\cos\alpha + n R_\alpha N_{\alpha n} = -X_n r_\alpha R_\beta - n Z_n R_\alpha R_\beta,\\
&\frac{d}{d\alpha}(r_\alpha N_{\alpha n}) + R_\alpha N_{\alpha n} \cos\alpha + n R_\beta N_{\alpha\beta n} = -Y_n r_\alpha R_\beta - Z_n R_\alpha R_\beta \cos\alpha.
\end{aligned}\right\} \tag{1101}$$

$n = 0$ und $n = 1$ liefern die Grundschwingungen einer zum Meridian $\beta = 0$ symmetrischen oder antimetrischen Belastung.

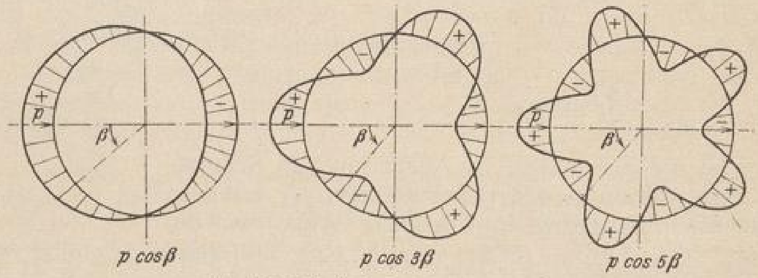

Abb. 768. Periodische Belastung $p \cos n\beta$.

Sonderfall $p_x = 0$, $p_y = 0$, $p_z = \sum Z_n(\alpha) \cos n\beta$ (Windbelastung). Die Kräfte besitzen die Periode $2\pi/n$ und bilden bei einer geraden Zahl n eine symmetrische, bei einem ungeraden n eine antimetrische Kräftegruppe. Ihr Moment in bezug auf die Drehachse ist Null. Die Gleichgewichtsbedingungen (1100) werden durch die Schnittkräfte $N_\alpha = \sum N_{\alpha n} \cos n\beta$, $N_\beta = \sum N_{\beta n} \cos n\beta$ erfüllt, die in den Meridianschnitten $\beta = 0$ und ganzzahligen Vielfachen von π/n, also $\beta = \lambda\pi/n$ Grenzwerte