Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Periodische Belastung in β

Der zweite Summand der rechten Seite ist bei senkrechter Belastung (Eigengewicht, Schneebelastung) Null, so daß mit $r_\alpha N_\alpha \cos\alpha = -Q_\alpha \operatorname{ctg}\alpha/2\pi$

$$N_\beta = -\frac{1}{2\pi}\frac{d(Q_\alpha \operatorname{ctg}\alpha)}{R_\beta\, d\alpha}. \tag{1097}$$

Die Meridianspannungen sind also negativ, während die Ringspannungen mit $d(Q_\alpha \operatorname{ctg}\alpha)/R_\beta d\alpha = 0$ das Vorzeichen wechseln. Die Spannungen aus Eigengewicht sind bei konstanter Schalendicke von dieser unabhängig.

Periodische Belastung in β. Die Belastung kann durch Wind hervorgerufen oder durch Randbedingungen vorgeschrieben werden. Sie läßt sich stets als trigonometrische, nach ganzen Vielfachen von β fortschreitende Reihe entwickeln, deren Koeffizienten X_n, Y_n, Z_n allein Funktionen von α sind.

$$p_x = \sum X_n \sin n\beta\,,\quad p_y = \sum Y_n \cos n\beta\,,\quad p_z = \sum Z_n \cos n\beta,\quad n = 0, 1 \ldots \infty. \tag{1098}$$

Die partiellen Differentialgleichungen (1094) für das Gleichgewicht der Kräfte werden dann durch einen Ansatz

$$N_\alpha = \sum N_{\alpha n} \cos n\beta\,,\qquad N_\beta = \sum N_{\beta n} \cos n\beta\,,\qquad N_{\alpha\beta} = \sum N_{\alpha\beta n} \sin n\beta \tag{1099}$$

befriedigt, wenn die von α allein abhängigen Funktionen $N_{\alpha n}$, $N_{\beta n}$, $N_{\alpha\beta n}$ gliedweise die folgenden Differentialgleichungen erfüllen:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{d\alpha}(r_\alpha N_{\alpha\beta n}) - n R_\beta N_{\beta n} + R_\beta N_{\alpha\beta n} \cos\alpha + X_n r_\alpha R_\beta = 0\,,\\
&\frac{d}{d\alpha}(r_\alpha N_{\alpha n}) + n R_\beta N_{\alpha\beta n} - R_\beta N_{\beta n} \cos\alpha + Y_n r_\alpha R_\beta = 0\,,\\
&\frac{N_{\alpha n}}{R_\beta} + \frac{N_{\beta n}}{R_\alpha} + Z_n = 0\,.
\end{aligned}\right\} \tag{1100}$$

Wird $N_{\beta n}$ eliminiert, so entstehen zwei simultane totale Differentialgleichungen für $N_{\alpha n}$ und $N_{\alpha\beta n}$.

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{d\alpha}(r_\alpha N_{\alpha\beta n}) + R_\beta N_{\alpha\beta n} \cos\alpha + n R_\alpha N_{\alpha n} = -X_n r_\alpha R_\beta - n Z_n R_\alpha R_\beta\,,\\
&\frac{d}{d\alpha}(r_\alpha N_{\alpha n}) + R_\alpha N_{\alpha n} \cos\alpha + n R_\beta N_{\alpha\beta n} = -Y_n r_\alpha R_\beta - Z_n R_\alpha R_\beta \cos\alpha\,.
\end{aligned}\right\} \tag{1101}$$

$n = 0$ und $n = 1$ liefern die Grundschwingungen einer zum Meridian $\beta = 0$ symmetrischen oder antimetrischen Belastung.

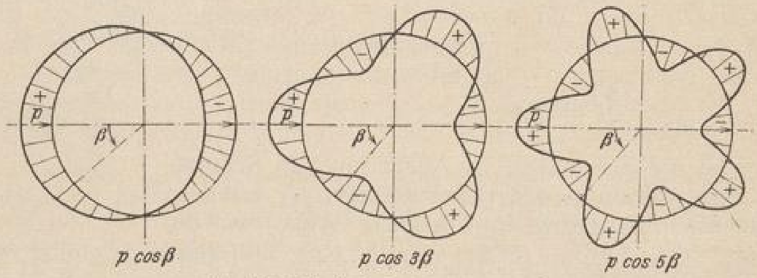

Abb. 768. Periodische Belastung $p \cos n\,\beta$.

Sonderfall $p_x = 0$, $p_y = 0$, $p_z = \sum Z_n(\alpha) \cos n\beta$ (Windbelastung). Die Kräfte besitzen die Periode $2\pi/n$ und bilden bei einer geraden Zahl n eine symmetrische, bei einem ungeraden n eine antimetrische Kräftegruppe. Ihr Moment in bezug auf die Drehachse ist Null. Die Gleichgewichtsbedingungen (1100) werden durch die Schnittkräfte $N_x = \sum N_{\alpha n} \cos n\beta$, $N_\beta = \sum N_{\beta n} \cos n\beta$ erfüllt, die in den Meridianschnitten $\beta = 0$ und ganzzahligen Vielfachen von π/n, also $\beta = \lambda\pi/n$ Grenzwerte

$N_{\alpha n}$, $N_{\beta n}$ annehmen, dagegen in Meridianschnitten $\beta = \pi/2n + \lambda\pi/n$ Null sind. Hier werden die Schubkräfte $N_{\alpha\beta} = \sum N_{\alpha\beta n} \sin n\beta$ zu Grenzwerten $N_{\alpha\beta n}$. Die Grenzwerte $N_{\alpha n}$, $N_{\beta n}$, $N_{\alpha\beta n}$ sind durch die Gleichgewichtsbedingungen der äußeren Kräfte bestimmt, die an dem durch einen Breitenschnitt und zwei Nullmeridianen begrenzten Schalensektor angreifen.

Der Verschiebungszustand. Die Formänderung der Membranschalen ist durch die Verschiebung der Punkte der Mittelfläche bestimmt. Diese wird nach drei ausgezeichneten Achsen x, y, z in die Komponenten u, v, w zerlegt. Sie lassen sich aus den bezogenen Längen- und Winkeländerungen $\varepsilon_x = \varepsilon_\beta$, $\varepsilon_y = \varepsilon_\alpha$, $\gamma_{xy} = \gamma_{\alpha\beta}$ eines differentialen Flächenabschnitts berechnen. Die Dehnung ε_z ist auf Grund der Annahmen Null (Abb. 769).

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= \frac{1}{R_\beta d\alpha}\left[(R_\beta - w)\, d\alpha + \frac{\partial v}{R_\beta \partial \alpha} R_\beta\, d\alpha - R_\beta\, d\alpha\right] = \frac{\partial v}{R_\beta \partial\alpha} - \frac{w}{R_\beta} = \frac{v' - w}{R_\beta},\\ \varepsilon_\beta &= \frac{1}{r_\alpha d\beta}\left[(r_\alpha - w \sin\alpha + v\cos\alpha)\, d\beta + \frac{\partial u}{\partial \beta} d\beta - r_\alpha\, d\beta\right] = \frac{v \operatorname{ctg}\alpha - w}{R_\alpha} + \frac{1}{R_\alpha \sin\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta}.\end{aligned}\right\} \quad (1102)$$

Bei rotationssymmetrischer Belastung ist $\partial u/\partial\beta = 0$ und nach Elimination von w

$$\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial v}{\partial\alpha} - v\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{v}{\sin\alpha}\right) = \frac{1}{\sin\alpha}(R_\beta\varepsilon_\alpha - R_\alpha\varepsilon_\beta),$$

$$\left.\begin{aligned} v &= \sin\alpha\left[\int \frac{R_\beta\varepsilon_\alpha - R_\alpha\varepsilon_\beta}{\sin\alpha} d\alpha + C_1\right],\\ w &= v \operatorname{ctg}\alpha - R_\alpha\varepsilon_\beta.\end{aligned}\right\} \quad (1103)$$

Die Winkeländerung des Flächenabschnitts ist nach (911)

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{\partial u}{R_\beta \partial\alpha} + \frac{\partial v}{r_\alpha \partial\beta} - \frac{u}{r_\alpha}\cos\alpha,$$

so daß mit v und $\gamma_{\alpha\beta}$ auch die Verschiebung u berechnet werden kann. Die Komponenten ε_α, ε_β, $\gamma_{\alpha\beta}$ der Flächenverzerrung sind mit den Schnittkräften nach (913) durch das Hookesche Gesetz verknüpft.

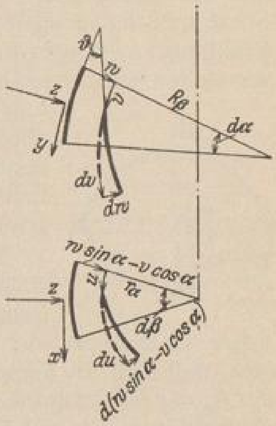

Abb. 769.

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= \frac{1}{Eh}(N_\alpha - \mu N_\beta), & \varepsilon_\beta &= \frac{1}{Eh}(N_\beta - \mu N_\alpha), & \gamma_{\alpha\beta} &= \frac{2(1+\mu)}{Eh} N_{\alpha\beta},\\ N_\alpha &= \frac{hE}{1-\mu^2}(\varepsilon_\alpha + \mu\varepsilon_\beta), & N_\beta &= \frac{hE}{1-\mu^2}(\varepsilon_\beta + \mu\varepsilon_\alpha), & N_{\alpha\beta} &= \frac{hE}{2(1+\mu)}\gamma_{\alpha\beta}.\end{aligned}\right\} \quad (1104)$$

Die Krümmungsänderung in den Hauptschnitten wird mit

$$\frac{1}{R_\beta} = \frac{d\alpha}{ds_\beta}, \quad \frac{1}{R_\alpha} = \frac{\sin\alpha}{r_\alpha},$$

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_\alpha &= d\left(\frac{1}{R_\beta}\right) = \frac{d\alpha + \delta(d\alpha) - d\alpha}{ds_\beta} = \frac{\delta(d\alpha)}{ds_\beta} = \frac{d(\delta\alpha)}{ds_\beta} = \frac{d\vartheta}{R_\beta d\alpha},\\ \varkappa_\beta &= d\left(\frac{1}{R_\alpha}\right) = \frac{\sin(\alpha + \delta\alpha) - \sin\alpha}{r_\alpha} = \frac{\delta\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha}{R_\alpha} = \frac{\vartheta \operatorname{ctg}\alpha}{R_\alpha}.\end{aligned}\right\} \quad (1105)$$

In der Regel begnügt man sich mit der Beschreibung des rotationssymmetrischen Verschiebungszustandes durch die Vergrößerung Δr_α des Breitenkreises und durch die Verdrehung ϑ der Tangente an die elastische Linie des Meridians.

$$\left.\begin{aligned} \Delta r_\alpha &= r_\alpha\varepsilon_\beta = \frac{r_\alpha}{Eh}(N_\beta - \mu N_\alpha),\\ \vartheta &= \frac{v}{R_\beta} + \frac{\partial w}{R_\beta\partial\alpha} = \frac{1}{R_\beta}\left[(R_\beta\varepsilon_\alpha - R_\alpha\varepsilon_\beta)\operatorname{ctg}\alpha - \frac{\partial(R_\alpha\varepsilon_\beta)}{\partial\alpha}\right].\end{aligned}\right\} \quad (1106)$$