



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

a) Die Kugelschale

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

$$p_z = p_w \sin^2 \alpha \cos^2 \beta = p_w \sin^2 \alpha (0,8493 \cos \beta + 0,1699 \cos 3\beta - 0,0243 \cos 5\beta + 0,0081 \cos 7\beta - 0,0037 \cos 9\beta \pm \dots). \quad (1109)$$

Ein ähnliches Ergebnis wird von F. Dischinger auf andere Weise erzielt. Es besteht aus zwei Gliedern und lautet

$$p_z = p_w \sin^2 \alpha (0,85 \cos \beta + 0,15 \cos 3\beta). \quad (1110)$$

Der Ansatz ist in der Reihe (1109) enthalten, die also die Spannungen aus einem in β quadratischen Windgesetz namentlich mit Rücksicht auf die schlechte Konvergenz der zur Spannungsberechnung notwendigen abgeleiteten Funktionen besser wiedergeben würde, wenn der Ansatz physikalische Bedeutung hätte.

Die Voraussetzungen zur Berechnung der Spannungen in kreisrunden Zylindern sind im Gegensatz zu diesen unzuverlässigen Annahmen durch die Versuche der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen beim Anströmen von Gasometermodellen wesentlich verbessert worden. Die Abb. 771 zeigt das Ergebnis der Druckmessung im Bereiche eines mittleren Breitenschnittes. Die Schaulinie ist periodisch und läßt sich daher durch harmonische Analyse in eine trigonometrische Reihe entwickeln, die mit Rücksicht auf die schlechte Konvergenz der Spannungsberechnung mit 6 Gliedern angeschrieben wird.

$$\left. \begin{aligned} p_z &= p_w (-0,655 + 0,280 \cos \beta + 1,115 \cos 2\beta \\ &\quad + 0,400 \cos 3\beta - 0,113 \cos 4\beta - 0,027 \cos 5\beta) \\ \text{und mit} \quad p_w &= 0,150 \text{ t/m}^2, \\ p_z &= -0,098 + 0,042 \cos \beta + 0,167 \cos 2\beta \\ &\quad + 0,060 \cos 3\beta - 0,017 \cos 4\beta - 0,004 \cos 5\beta. \end{aligned} \right\} (1111)$$

Die Zahlenrechnung läßt sich durch die gemessene Druckverteilung (Abb. 771) nachprüfen. Ein Vergleich der einzelnen Windgesetze für den Kreiszylinder (Abb. 772) zeigt nicht allein in der Druckverteilung, sondern auch im Spannungszustand grundsätzliche Unterschiede, die auf die Brauchbarkeit der Ansätze (1107) und (1108) für doppelt gekrümmte Schalen schließen lassen.

Dischinger, F.: Schalen- und Rippenkuppeln. Handbuch für Eisenbetonbau. Bd. VI, 2. Kapitel. Berlin 1930.

a) Die Kugelschale. Die Kugelschale wird als geschlossenes oder als offenes Tragwerk verwendet und dabei durch einen oder zwei Breitenschnitte α_1, α_2 begrenzt (Abb. 773). An den Rändern sind in der Regel Ringträger vorhanden, da hier nach S. 748 nur tangential gerichtete Kräfte ohne Störung des Membranzustandes in die Schale eingetragen werden.

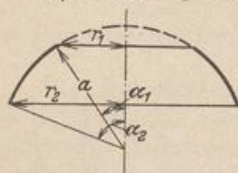


Abb. 773.

Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen (1094) lauten für die Kugelschale mit $R_\alpha = R_\beta = a, r_\alpha = a \sin \alpha$ folgendermaßen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_\beta}{\partial \beta} + N_{\alpha\beta} \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha} (N_{\alpha\beta} \sin \alpha) + p_x a \sin \alpha &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} (N_\alpha \sin \alpha) - N_\beta \cos \alpha + \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \beta} + p_y a \sin \alpha &= 0, \\ N_\alpha + N_\beta + a p_z &= 0. \end{aligned} \right\} (1112)$$

Sie lassen sich mathematisch vereinfachen.

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial N_\beta}{\partial \beta} + 2 N_{\alpha\beta} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} + a p_x &= 0, \\ \frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} + (N_\alpha - N_\beta) \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \beta} + a p_y &= 0, \\ N_\alpha + N_\beta + a p_z &= 0. \end{aligned} \right\} (1113)$$

Bei rotationssymmetrischer Belastung sind die Ableitungen nach β Null. Das Gleichgewicht der inneren und äußeren Kräfte wird dann durch drei simultane totale Differentialgleichungen beschrieben. Aus diesen folgt, daß

$$\left. \begin{aligned} N_{\alpha\beta} &= -\frac{a}{\sin^2 \alpha} \int \dot{p}_x \sin^2 \alpha \, d\alpha + C_1, & N_\beta &= -N_\alpha - \dot{p}_z a, \\ N_\alpha &= -\frac{a}{\sin^2 \alpha} \int (\dot{p}_v + \dot{p}_z \operatorname{ctg} \alpha) \sin^2 \alpha \, d\alpha + C_2. \end{aligned} \right\} \quad (1114)$$

Bedingung für C_2 bei geschlossener Kugelschale:

$$\alpha = 0: \quad N_\alpha = N_\beta, \quad (1115)$$

Bedingung für C_2 bei offener Kugelschale:

$$\alpha = \alpha_1: \quad N_\alpha = 0 \quad (1116)$$

oder einem vorgeschriebenen Betrage.

Ist $\dot{p}_x = 0$, so wird $N_{\alpha\beta} = 0$.

Die Gleichung (b) in (1094) kann bei rotationssymmetrischer Belastung durch die Bedingung für das Gleichgewicht aller senkrechten Kräfte oberhalb eines Breitenkreises α ersetzt werden (S. 745). Sie liefert N_α . Damit ist auch N_β bestimmt.

Zur Beschreibung des Verschiebungszustandes genügt bei rotationssymmetrischer Belastung nach S. 747 die Vergrößerung Δr_α des Breitenkreises r_α und die Verdrehung ϑ der Meridiantangente.

$$\left. \begin{aligned} \Delta r_\alpha &= -\frac{r_\alpha}{Eh} (\dot{p}_z a + N_\alpha (1 + \mu)), \\ \vartheta &= \frac{1}{Eh} \left[(N_\alpha - N_\beta) (1 + \mu) \operatorname{ctg} \alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha} (\mu N_\alpha - N_\beta) \right] = \frac{a}{Eh} [\dot{p}'_z - (1 + \mu) \dot{p}_v] \end{aligned} \right\} \quad (1117)$$

Die offene Kugelschale mit rotationssymmetrischer Belastung.

Für $\alpha = \alpha_1$ ist N_α Null oder ein vorgeschriebener Betrag $N_{\alpha,1}$.

Schnittkräfte für Eigengewicht g der Schale (Abb. 774).

$$\left. \begin{aligned} N_\alpha &= -a g \frac{\cos \alpha_1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}, & N_\beta &= a g \left(\frac{\cos \alpha_1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - \cos \alpha \right), \\ \Delta r_\alpha &= \frac{a^2 g}{Eh} \sin \alpha \left[\frac{\cos \alpha_1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} (1 + \mu) - \cos \alpha \right], \\ \vartheta &= -\frac{a g}{Eh} (2 + \mu) \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (1118)$$

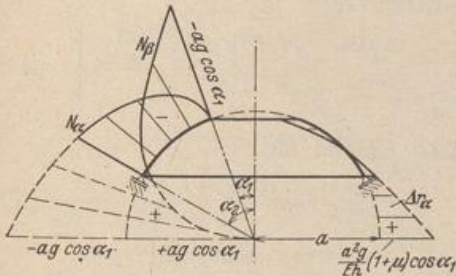


Abb. 774. Schaulinien für Eigengewicht.

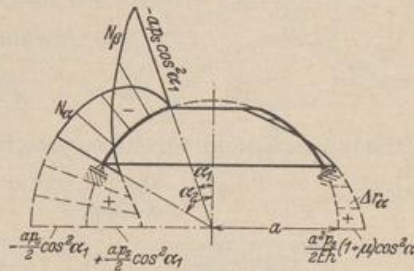


Abb. 775. Schaulinien für Schneelast.

Schnittkräfte für Schneebelastung \dot{p}_s , $N_{\alpha,1} = 0$ (Abb. 775).

$$\left. \begin{aligned} N_\alpha &= -\frac{a \dot{p}_s}{2} \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha_1}{\sin^2 \alpha} \right), & N_\beta &= \frac{a \dot{p}_s}{2} \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha_1}{\sin^2 \alpha} - 2 \cos^2 \alpha \right), \\ \Delta r_\alpha &= \frac{a^2 \dot{p}_s}{Eh} \frac{\sin \alpha}{2} \left[\left(1 - \frac{\sin^2 \alpha_1}{\sin^2 \alpha} \right) (1 + \mu) - 2 \cos^2 \alpha \right], \\ \vartheta &= -\frac{a \dot{p}_s}{Eh} (3 + \mu) \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (1119)$$

Schnittkräfte aus der Belastung $G_L = 2\pi a P \sin \alpha_1$ durch die Laterne und den Laternenring. $N_{\alpha,1} = -P/\sin \alpha_1$ (Abb. 776).

$$N_\alpha = -N_\beta = -P \frac{\sin \alpha_1}{\sin^2 \alpha}, \quad \Delta r = \frac{Pa}{Eh} (1 + \mu) \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha}, \quad \vartheta = 0. \quad (1120)$$

Äußere Kraft H zur tangentialen Eintragung der Laternenlast P : $H = P \operatorname{ctg} \alpha_1$, Längskraft im Laternenring $N_L = -Pa \cos \alpha_1$.

Die geschlossene Kugelschale mit rotationssymmetrischer Belastung. Für $\alpha = 0$ ist $N_\alpha = N_\beta$.

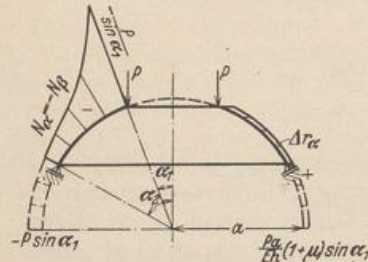


Abb. 776. Schaulinien für Laternenlast.

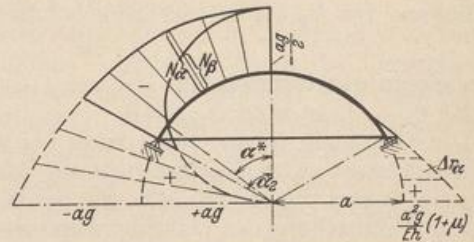


Abb. 777. Schaulinien für Eigengewicht.

Schnittkräfte für Eigengewicht $p_x = 0$, $p_y = g \sin \alpha$, $p_z = g \cos \alpha$ (Abb. 777).

$$N_\alpha = -\frac{ag}{1 + \cos \alpha}, \quad N_\beta = \frac{ag}{1 + \cos \alpha} (1 - \cos \alpha - \cos^2 \alpha), \quad N_{\alpha\beta} = 0. \quad (1121)$$

Die Längskraft N_α in Richtung des Meridians erzeugt für alle Winkel α zwischen 0° und 90° Druckspannungen. Das Vorzeichen der Längskraft N_β wechselt bei $\alpha = \alpha^*$. N_β erzeugt für alle Winkel $\alpha > \alpha^*$ Zugspannungen. Der Breitenkreis α^* mit dem Spannungswechsel $N_\beta = 0$ ist durch die Bedingung $(1 - \cos \alpha^* - \cos^2 \alpha^*) = 0$ bestimmt, so daß $\alpha^* = 51^\circ 50'$.

$$\alpha = 0: \quad N_\alpha = N_\beta = -\frac{ag}{2}.$$

Um den senkrechten Auflagerdruck der Schale tangential zuzuführen, ist eine waagerechte Kraft $H = N_{\alpha_2} \cos \alpha_2$ notwendig. Sie erzeugt den Ringzug (Abb. 778)

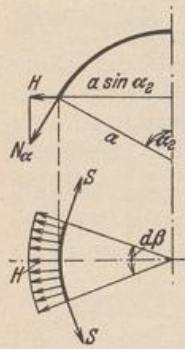


Abb. 778.

$$\text{ist } \left. \begin{aligned} S &= H a \sin \alpha_2, & \text{Mit } H &= ag \frac{\cos \alpha_2}{1 + \cos \alpha_2} \\ S &= \frac{a^2 g}{2} \frac{\sin 2\alpha_2}{1 + \cos \alpha_2}. \end{aligned} \right\} \quad (1122)$$

Verschiebungszustand für Eigengewicht nach Abschn. 80:

$$\epsilon_\alpha = -\frac{ag}{Eh} \frac{1 + \mu(1 - \cos \alpha - \cos^2 \alpha)}{1 + \cos \alpha}, \quad \epsilon_\beta = \frac{ag}{Eh} \frac{1 - \cos \alpha - \cos^2 \alpha + \mu}{1 + \cos \alpha}, \quad (1123)$$

$$R_\beta \epsilon_\alpha - R_\alpha \epsilon_\beta = -A \frac{2 - \cos \alpha - \cos^2 \alpha}{1 + \cos \alpha}, \quad A = \frac{a^2 g (1 + \mu)}{Eh},$$

$$\int \frac{(R_\beta \epsilon_\alpha - R_\alpha \epsilon_\beta)}{\sin \alpha} d\alpha = A \left[\ln(1 + \cos \alpha) - \frac{1}{1 + \cos \alpha} \right] + C_1$$

und daher nach (1103)

$$\left. \begin{aligned} v &= \sin \alpha \left[A \left(\ln(1 + \cos \alpha) - \frac{1}{1 + \cos \alpha} \right) + C_1 \right], \\ w &= A \cos \alpha \left[\ln(1 + \cos \alpha) + \frac{1}{1 + \mu} \right] - A + C_1 \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (1124)$$

Die senkrechten und waagerechten Komponenten t , Δr_α der Verschiebung sind mit Abb. 779 nach S. 753

$$t = w \cos \alpha + v \sin \alpha, \quad \Delta r_\alpha = -w \sin \alpha + v \cos \alpha. \quad (1125)$$

Für $\alpha = \alpha_2$ wird $v = 0$, so daß C_1 berechnet werden kann.

$$C_1 = -A \left[\ln(1 + \cos \alpha_2) - \frac{1}{1 + \cos \alpha_2} \right],$$

so daß

$$\left. \begin{aligned} v &= A \sin \alpha \left[\ln \frac{1 + \cos \alpha}{1 + \cos \alpha_2} + \frac{1}{1 + \cos \alpha_2} - \frac{1}{1 + \cos \alpha} \right], \\ w &= A \cos \alpha \left[\ln \frac{1 + \cos \alpha}{1 + \cos \alpha_2} + \frac{1}{1 + \mu} + \frac{1}{1 + \cos \alpha_2} \right] - A, \\ \Delta r_\alpha &= \frac{a^2 g}{E h} \sin \alpha \left(\frac{1 + \mu}{1 + \cos \alpha} - \cos \alpha \right), \\ \vartheta &= -\frac{a g}{E h} (2 + \mu) \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (1126)$$

Die senkrechte Verschiebung w_0 des Scheitels ($\alpha = 0$) ist

$$w_0 = A \left[\ln \frac{2}{1 + \cos \alpha_2} + \frac{1}{(1 + \cos \alpha_2)} - \frac{\mu}{1 + \mu} \right]. \quad (1127a)$$

Sonderfall $\alpha_2 = 90^\circ$

$$w_0 = w_0^* = \frac{a^2 g}{E h} (1,69315 + 0,69315 \mu), \quad \Delta r_{\alpha_2}^* = A = \frac{a^2 g}{E h} (1 + \mu). \quad (1127b)$$

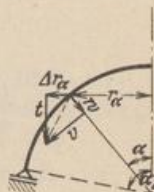


Abb. 779.

Eine gleichförmige Erwärmung der Kugelschale um t^0 erzeugt

$$\Delta r_\alpha = \alpha_1 t a \sin \alpha, \quad \vartheta = 0. \quad (1128)$$

Schnittkräfte bei Schneebelastung. $p_x = 0$, $p_y = p_s \sin \alpha \cos \alpha$, $p_z = p_s \cos^2 \alpha$ (Abb. 780).

$$N_\alpha = -\frac{a p_s}{2}, \quad N_\beta = -\frac{a p_s}{2} \cos 2\alpha. \quad (1129)$$

Bei $\alpha > 45^\circ$ entstehen daher Zugspannungen σ_β .

Die waagerechte Verschiebung beträgt

$$\Delta r_\alpha = \frac{a^2 p_s}{E h} \sin \alpha \left(\frac{1 + \mu}{2} - \cos^2 \alpha \right) \quad (1130)$$

und die Verdrehung der Meridiantangente

$$\vartheta = -\frac{a p_s}{E h} (3 + \mu) \sin \alpha \cos \alpha. \quad (1131)$$

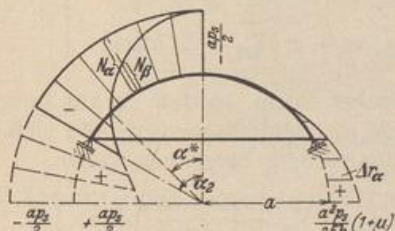


Abb. 780. Schaulinien für Schneelast.

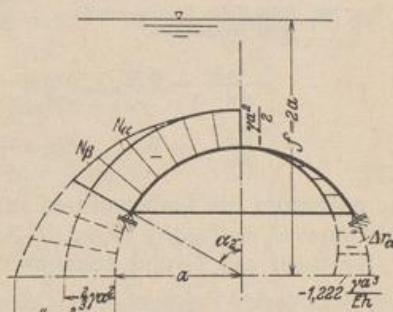


Abb. 781. Schaulinien für Wasserauflast beim Stützboden.

Wasserauflast bei Verwendung der Kugelschale als Stützboden eines Behälters (Abb. 781).

$$\begin{aligned} p_x &= 0, \quad p_y = 0, \quad p_z = p_w = \gamma a \left(\frac{t}{a} - \cos \alpha \right), \\ N_\alpha &= -\frac{\gamma a^2}{\sin^2 \alpha} \left[\int \left(\frac{t}{a} - \cos \alpha \right) \sin \alpha \cos \alpha d\alpha + C_1 \right] \\ &= -\frac{\gamma a^2}{6 \sin^2 \alpha} \left[\frac{3t}{a} \sin^2 \alpha + 2 \cos^3 \alpha + 6 C_1 \right]. \end{aligned}$$

Da N_α für $\alpha = 0$ endlich ist, wird die Klammer Null und daher $6 C_1 = -2$.

$$\left. \begin{aligned} N_\alpha &= -\frac{\gamma a^2}{6} \left(3 \frac{f}{a} - 2 \frac{1 - \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right), & N_\beta &= -\frac{\gamma a^2}{6} \left(3 \frac{f}{a} - 6 \cos \alpha + 2 \frac{1 - \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right), \\ \Delta r_\alpha &= -\frac{\gamma a^3}{6 E h} \sin \alpha \left[3(1 - \mu) \frac{f}{a} - 6 \cos \alpha + 2(1 + \mu) \frac{1 - \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right], \\ \vartheta &= \gamma \frac{a^2}{E h} \sin \alpha. \end{aligned} \right\} (1132)$$

Wird die Kugelschale nach Abb. 782 als Hängeboden eines Wasserbehälters verwendet, so erhält die bezogene Kraft g unter Beibehaltung des Koordinatensystems in den Ergebnissen (1121) bis (1127) das negative Vorzeichen.

Schnittkräfte durch Wasserauflast bei Verwendung der Kugelschale als Hängeboden eines Behälters (Abb. 782).

$$\left. \begin{aligned} p_x &= 0, & p_y &= 0, & p_z &= -\gamma a \left(\frac{f}{a} + \cos \alpha \right), \\ N_\alpha &= \frac{\gamma a^2}{6} \left(3 \frac{f}{a} + 2 \frac{1 - \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right), & N_\beta &= \frac{\gamma a^2}{6} \left(3 \frac{f}{a} + 6 \cos \alpha - 2 \frac{1 - \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right), \\ \Delta r_\alpha &= \frac{\gamma a^3}{6 E h} \sin \alpha \left[3(1 - \mu) \frac{f}{a} + 6 \cos \alpha - 2(1 + \mu) \frac{1 - \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right], \\ \vartheta &= \frac{\gamma a^2}{E h} \sin \alpha. \end{aligned} \right\} (1133)$$

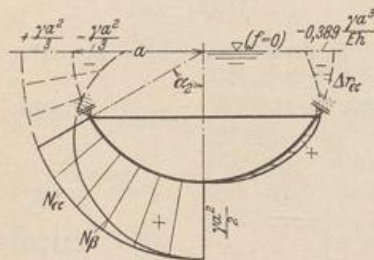


Abb. 782. Schaulinien für Wasserauflast beim Hängeboden.

Aus der Ableitung an einem Spiegelbild der Abb. 782 folgt, daß ϑ im Gegensatz zu (1132) bei Rechtsdrehung der Meridiantangente positiv ist.

Die Kugelschale mit einer vom Meridianwinkel β periodisch abhängigen Belastung. Die allgemeinen Differentialgleichungen (1101) für das Gleichgewicht der Kräfte an einer Rotationsschale lassen sich für $R_\alpha = R_\beta = a$ folgendermaßen vereinfachen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN_{\alpha\beta n}}{d\alpha} + 2N_{\alpha\beta n} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{n}{\sin \alpha} N_{\alpha n} &= -a \left(X_n + \frac{n}{\sin \alpha} Z_n \right), \\ \frac{dN_{\alpha n}}{d\alpha} + 2N_{\alpha n} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{n}{\sin \alpha} N_{\alpha\beta n} &= -a \left(Y_n + Z_n \operatorname{ctg} \alpha \right). \end{aligned} \right\} (1134)$$

Sie enthalten die Unbekannten in symmetrischer Form, so daß daraus neue Unbekannte $U_1 = N_{\alpha n} + N_{\alpha\beta n}$, $U_2 = N_{\alpha n} - N_{\alpha\beta n}$ gebildet werden, die sich nach H. Reißner auf Grund bekannter Regeln unabhängig berechnen lassen.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU_1}{d\alpha} + U_1 \left(2 \operatorname{ctg} \alpha + \frac{n}{\sin \alpha} \right) &= -a \left(X_n + Y_n + \frac{n + \cos \alpha}{\sin \alpha} Z_n \right), \\ \frac{dU_2}{d\alpha} + U_2 \left(2 \operatorname{ctg} \alpha - \frac{n}{\sin \alpha} \right) &= +a \left(X_n - Y_n + \frac{n - \cos \alpha}{\sin \alpha} Z_n \right), \end{aligned} \right\} (1135)$$

Bei Windbelastung ist $p_x = 0$, $p_y = 0$, $p_z = \sum Z_n(\alpha) \cos n\beta$. Der auf jeden Schalen-sektor von der Winkelbreite π/n entfallende Anteil bildet eine Resultierende. Je zwei sind einander symmetrisch oder antimetrisch zugeordnet, je nachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Sie geben geometrisch addiert eine senkrechte (W_v) oder eine waagerechte Kraft (W_h), deren Wirkungslinie die Drehachse im Schalenmittelpunkt schneidet (Abb. 783).

Sonderfall $Z_n(\alpha) = p \sin \alpha$, $n = 1$. Die Spannungsverteilung ist durch einen Nullmeridian ausgezeichnet.

a) Lösung der Differentialgleichungen (1135). Die Gleichungen haben die Form

$$\frac{dU}{d\alpha} + U\varphi = \psi.$$

Die Substitution $\varphi = \bar{\varphi}'/\bar{\varphi}$ führt auf

$$\bar{\varphi}U' + U\bar{\varphi}' = \psi\bar{\varphi}, \quad \bar{\varphi}U = \int \psi\bar{\varphi} d\alpha + C.$$

Durch Integration folgt

$$\int \varphi d\alpha = \int \frac{\bar{\varphi}'}{\bar{\varphi}} d\alpha = \ln \bar{\varphi}, \quad \bar{\varphi} = e^{\int \varphi d\alpha}$$

und damit die Lösung

$$U = e^{-\int \varphi d\alpha} \left[\int \psi e^{\int \varphi d\alpha} d\alpha + C \right].$$

Die Integrationskonstanten ergeben sich aus der Bedingung, daß für $\alpha = 0$ die Schnittkräfte und damit auch U_1 und U_2 endlich sind. Die Integration bietet keine Schwierigkeiten; die Lösung lautet (Abb. 785)

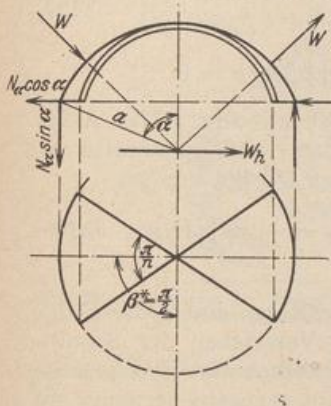
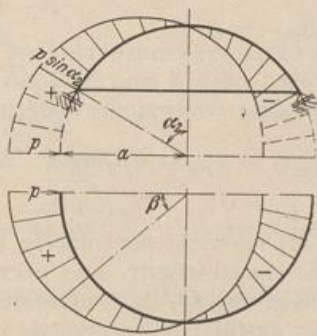
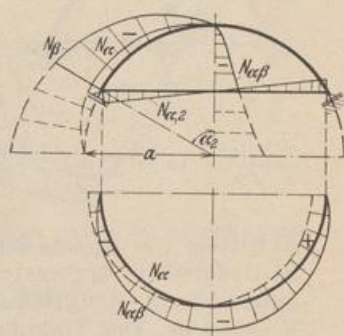


Abb. 783.

Abb. 784. Windlast $p_z = p \sin \alpha \cos \beta$.Abb. 785. Schaulinien für Windbelastung $p_z = p \sin \alpha \cos \beta$.

$$\left. \begin{aligned} N_\alpha &= -\frac{pa \cos \alpha}{3 \sin^3 \alpha} (2 - 3 \cos \alpha + \cos^3 \alpha) \cos \beta, \\ N_{\alpha\beta} &= -\frac{pa}{3 \sin^3 \alpha} (2 - 3 \cos \alpha + \cos^3 \alpha) \sin \beta, \\ N_\beta &= +\frac{pa}{3 \sin^3 \alpha} (2 \cos \alpha - 3 \sin^2 \alpha - 2 \cos^4 \alpha) \cos \beta. \end{aligned} \right\} \quad (1136)$$

b) Unmittelbare Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen (Abb. 783 u. 784).

$$W_h = 4pa^2 \int_0^\alpha \sin^3 \alpha d\alpha \int_0^{\pi/2} \cos^2 \beta d\beta = p \frac{\pi a^2}{3} (2 - 3 \cos \alpha + \cos^3 \alpha).$$

Gleichgewicht aller äußeren Kräfte gegen Drehen um eine Achse $\beta^* = \pi/2$ in der Ebene des Breitenkreises:

$$W_h a \cos \alpha + 4N_{\alpha 1} a^2 \sin^3 \alpha \int_0^{\pi/2} \cos^2 \beta d\beta = 0; \quad \text{daraus } N_\alpha \text{ nach (1136).}$$

Gleichgewichtsbedingung (1113):

$$N_\beta = N_{\beta 1} \cos \beta = -(pa \sin \alpha + N_{\alpha 1}) \cos \beta; \quad \text{daraus } N_\beta \text{ nach (1136).}$$

48*

Gleichgewicht gegen Verschieben durch W_h und durch die Komponenten der Schnittkräfte $N_\alpha, N_{\alpha\beta}$ in Richtung W_h :

$$W_h - 4N_{\alpha 1} a \sin \alpha \cos \alpha \int_0^{\pi/2} \cos^2 \beta d\beta + 4N_{\alpha\beta 1} a \sin \alpha \int_0^{\pi/2} \sin^2 \beta d\beta = 0,$$

daraus $N_{\alpha\beta}$ nach (1136).

Reißner, H.: Spannungen in Kugelschalen. Müller-Breslau-Festschrift S. 192. Leipzig 1912.
 — Pasternak, P.: Die praktische Berechnung biegeester Kugelschalen usw. Z. angew. Math. Mech. 1926 S. 1.

b) Die Kegelschale. Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen für die äußeren Kräfte am unteren differentialen Abschnitt der Fläche erhalten mit $R_\beta = \infty$, $R_\beta d\alpha = dy$, $r_\alpha \rightarrow r_z = y \cos \alpha$, $N_\alpha \rightarrow N_y$, $N_{\alpha\beta} \rightarrow N_{y\beta}$ folgende Form (Abb. 786):

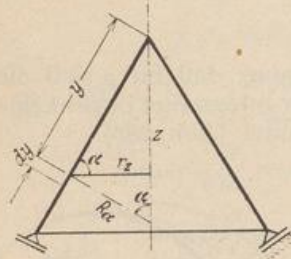


Abb. 786.

$$\left. \begin{aligned} y \frac{\partial N_{y\beta}}{\partial y} + 2N_{y\beta} + \frac{1}{\cos \alpha} \frac{\partial N_\beta}{\partial \beta} y p_x &= 0, \\ y \frac{\partial N_y}{\partial y} + (N_y - N_\beta) + \frac{1}{\cos \alpha} \frac{\partial N_{y\beta}}{\partial \beta} + y p_y &= 0, \\ N_\beta + y p_z \operatorname{ctg} \alpha &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1137)$$

Rotationssymmetrische Belastung: Die Ableitungen nach β sind Null, so daß die Schnittkräfte unabhängig voneinander berechnet werden können.

$$\frac{d(N_{y\beta} y^2)}{dy} = -y^2 p_x, \quad \frac{d(N_y y)}{dy} = -y p_y - y p_z \operatorname{ctg} \alpha, \quad N_\beta = -y p_z \operatorname{ctg} \alpha. \quad (1138)$$

$p_x = 0: \quad N_{y\beta} = 0.$

Ableitung von N_y aus dem Gleichgewicht der äußeren Kräfte an einem durch den Breitenkreis r_z begrenzten Schalenabschnitt. Das obere Vorzeichen der Schnittkräfte gilt für die gestützte Kegelschale, das untere Vorzeichen für die hängende Kegelschale. Der Tragring der gestützten Kegelschale wird gezogen, derjenige der hängenden Kegelschale gedrückt.

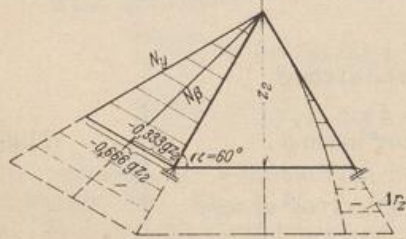


Abb. 787. Schaulinien für Eigengewicht.

$$N_y = \mp \frac{Q}{2\pi r_z \sin \alpha} = \mp \frac{Q}{\pi y \sin 2\alpha}. \quad (1139)$$

Verschiebungszustand bei rotationssymmetrischer Belastung

$$\left. \begin{aligned} r &\rightarrow r + \Delta r_z, \\ \Delta r_z &= \frac{r_z}{E h} (N_\beta - \mu N_y) \\ &= \frac{y \cos \alpha}{E h} (N_\beta - \mu N_y), \end{aligned} \right\} \quad (1140)$$

$$\begin{aligned} \vartheta &= \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{E h} \left[(1 + \mu) (N_y - N_\beta) - y \frac{\partial}{\partial y} (N_\beta - \mu N_y) \right] \\ &= \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{E h} \left[\operatorname{ctg} \alpha \frac{\partial}{\partial y} (y^2 p_z) - \mu y p_y + N_y \right]. \end{aligned} \quad (1141)$$

Eigengewicht einer geschlossenen Kegelschale mit gleichbleibender Wanddicke h (Abb. 787).

$$\left. \begin{aligned} p_z &= g \cos \alpha, & p_y &= g \sin \alpha, & G &= \pi r_z y g, \\ N_y &= \mp \frac{g z}{2 \sin^2 \alpha}, & N_\beta &= \mp g z \operatorname{ctg}^2 \alpha, \\ \Delta r_z &= \mp \frac{g z^2 \operatorname{ctg} \alpha}{2 E h \sin^2 \alpha} (2 \cos^2 \alpha - \mu), & \vartheta &= \mp \frac{g z \operatorname{ctg} \alpha}{E h \sin^2 \alpha} [1 + \mu - (2 + \mu) \cos^2 \alpha]. \end{aligned} \right\} \quad (1142)$$