



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Die Statik im Stahlbetonbau**

**Beyer, Kurt**

**Berlin [u.a.], 1956**

Die geschlossene Kugelschale mit rotationssymmetrischer Belastung

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

Schnittkräfte aus der Belastung  $G_L = 2\pi a P \sin \alpha_1$  durch die Laterne und den Laternenring.  $N_{\alpha,1} = -P/\sin \alpha_1$  (Abb. 776).

$$N_\alpha = -N_\beta = -P \frac{\sin \alpha_1}{\sin^2 \alpha}, \quad \Delta r = \frac{Pa}{Eh} (1 + \mu) \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha}, \quad \vartheta = 0. \quad (1120)$$

Äußere Kraft  $H$  zur tangentialen Eintragung der Laternenlast  $P$ :  $H = P \operatorname{ctg} \alpha_1$ , Längskraft im Laternenring  $N_L = -Pa \cos \alpha_1$ .

Die geschlossene Kugelschale mit rotationssymmetrischer Belastung. Für  $\alpha = 0$  ist  $N_\alpha = N_\beta$ .

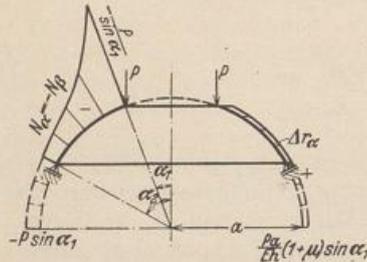


Abb. 776. Schaulinien für Laternenlast.

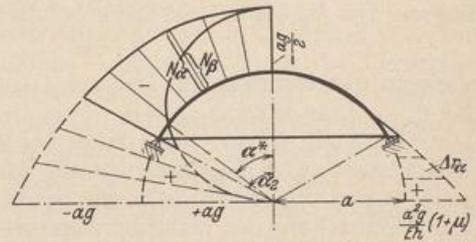


Abb. 777. Schaulinien für Eigengewicht.

Schnittkräfte für Eigengewicht  $p_x = 0$ ,  $p_y = g \sin \alpha$ ,  $p_z = g \cos \alpha$  (Abb. 777).

$$N_\alpha = -\frac{ag}{1 + \cos \alpha}, \quad N_\beta = \frac{ag}{1 + \cos \alpha} (1 - \cos \alpha - \cos^2 \alpha), \quad N_{\alpha\beta} = 0. \quad (1121)$$

Die Längskraft  $N_\alpha$  in Richtung des Meridians erzeugt für alle Winkel  $\alpha$  zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$  Druckspannungen. Das Vorzeichen der Längskraft  $N_\beta$  wechselt bei  $\alpha = \alpha^*$ .  $N_\beta$  erzeugt für alle Winkel  $\alpha > \alpha^*$  Zugspannungen. Der Breitenkreis  $\alpha^*$  mit dem Spannungswechsel  $N_\beta = 0$  ist durch die Bedingung  $(1 - \cos \alpha^* - \cos^2 \alpha^*) = 0$  bestimmt, so daß  $\alpha^* = 51^\circ 50'$ .

$$\alpha = 0: \quad N_\alpha = N_\beta = -\frac{ag}{2}.$$

Um den senkrechten Auflagerdruck der Schale tangential zuzuführen, ist eine waagerechte Kraft  $H = N_{\alpha_2} \cos \alpha_2$  notwendig. Sie erzeugt den Ringzug (Abb. 778)

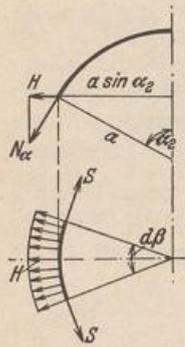


Abb. 778.

$$\text{ist } \left. \begin{aligned} S &= H a \sin \alpha_2, & \text{Mit } H &= ag \frac{\cos \alpha_2}{1 + \cos \alpha_2} \\ S &= \frac{a^2 g}{2} \frac{\sin 2\alpha_2}{1 + \cos \alpha_2}. \end{aligned} \right\} \quad (1122)$$

Verschiebungszustand für Eigengewicht nach Abschn. 80:

$$\epsilon_\alpha = -\frac{ag}{Eh} \frac{1 + \mu(1 - \cos \alpha - \cos^2 \alpha)}{1 + \cos \alpha}, \quad \epsilon_\beta = \frac{ag}{Eh} \frac{1 - \cos \alpha - \cos^2 \alpha + \mu}{1 + \cos \alpha}, \quad (1123)$$

$$R_\beta \epsilon_\alpha - R_\alpha \epsilon_\beta = -A \frac{2 - \cos \alpha - \cos^2 \alpha}{1 + \cos \alpha}, \quad A = \frac{a^2 g (1 + \mu)}{Eh},$$

$$\int \frac{(R_\beta \epsilon_\alpha - R_\alpha \epsilon_\beta)}{\sin \alpha} d\alpha = A \left[ \ln(1 + \cos \alpha) - \frac{1}{1 + \cos \alpha} \right] + C_1$$

und daher nach (1103)

$$\left. \begin{aligned} v &= \sin \alpha \left[ A \left( \ln(1 + \cos \alpha) - \frac{1}{1 + \cos \alpha} \right) + C_1 \right], \\ w &= A \cos \alpha \left[ \ln(1 + \cos \alpha) + \frac{1}{1 + \mu} \right] - A + C_1 \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (1124)$$

Die senkrechten und waagerechten Komponenten  $t$ ,  $\Delta r_\alpha$  der Verschiebung sind mit Abb. 779 nach S. 753

$$t = w \cos \alpha + v \sin \alpha, \quad \Delta r_\alpha = -w \sin \alpha + v \cos \alpha. \quad (1125)$$

Für  $\alpha = \alpha_2$  wird  $v = 0$ , so daß  $C_1$  berechnet werden kann.

$$C_1 = -A \left[ \ln(1 + \cos \alpha_2) - \frac{1}{1 + \cos \alpha_2} \right],$$

so daß

$$\left. \begin{aligned} v &= A \sin \alpha \left[ \ln \frac{1 + \cos \alpha}{1 + \cos \alpha_2} + \frac{1}{1 + \cos \alpha_2} - \frac{1}{1 + \cos \alpha} \right], \\ w &= A \cos \alpha \left[ \ln \frac{1 + \cos \alpha}{1 + \cos \alpha_2} + \frac{1}{1 + \mu} + \frac{1}{1 + \cos \alpha_2} \right] - A, \\ \Delta r_\alpha &= \frac{a^2 g}{E h} \sin \alpha \left( \frac{1 + \mu}{1 + \cos \alpha} - \cos \alpha \right), \\ \vartheta &= -\frac{a g}{E h} (2 + \mu) \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (1126)$$

Die senkrechte Verschiebung  $w_0$  des Scheitels ( $\alpha = 0$ ) ist

$$w_0 = A \left[ \ln \frac{2}{1 + \cos \alpha_2} + \frac{1}{(1 + \cos \alpha_2)} - \frac{\mu}{1 + \mu} \right]. \quad (1127a)$$

Sonderfall  $\alpha_2 = 90^\circ$

$$w_0 = w_0^* = \frac{a^2 g}{E h} (1,69315 + 0,69315 \mu), \quad \Delta r_{\alpha_2}^* = A = \frac{a^2 g}{E h} (1 + \mu). \quad (1127b)$$

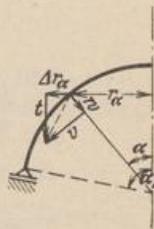


Abb. 779.

Eine gleichförmige Erwärmung der Kugelschale um  $t^0$  erzeugt

$$\Delta r_\alpha = \alpha_1 t a \sin \alpha, \quad \vartheta = 0. \quad (1128)$$

Schnittkräfte bei Schneebelastung.  $p_x = 0$ ,  $p_y = p_s \sin \alpha \cos \alpha$ ,  $p_z = p_s \cos^2 \alpha$  (Abb. 780).

$$N_\alpha = -\frac{a p_s}{2}, \quad N_\beta = -\frac{a p_s}{2} \cos 2\alpha. \quad (1129)$$

Bei  $\alpha > 45^\circ$  entstehen daher Zugspannungen  $\sigma_\beta$ .

Die waagerechte Verschiebung beträgt

$$\Delta r_\alpha = \frac{a^2 p_s}{E h} \sin \alpha \left( \frac{1 + \mu}{2} - \cos^2 \alpha \right) \quad (1130)$$

und die Verdrehung der Meridiantangente

$$\vartheta = -\frac{a p_s}{E h} (3 + \mu) \sin \alpha \cos \alpha. \quad (1131)$$

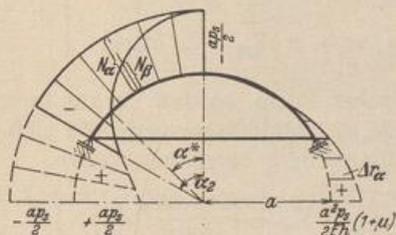


Abb. 780. Schaulinien für Schneelast.

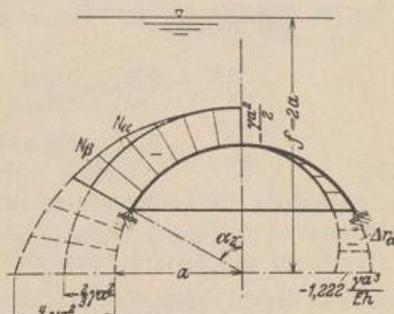


Abb. 781. Schaulinien für Wasserauflast beim Stützboden.

Wasserauflast bei Verwendung der Kugelschale als Stützboden eines Behälters (Abb. 781).

$$\begin{aligned} p_x &= 0, \quad p_y = 0, \quad p_z = p_w = \gamma a \left( \frac{t}{a} - \cos \alpha \right), \\ N_\alpha &= -\frac{\gamma a^2}{\sin^2 \alpha} \left[ \int \left( \frac{t}{a} - \cos \alpha \right) \sin \alpha \cos \alpha d\alpha + C_1 \right] \\ &= -\frac{\gamma a^2}{6 \sin^2 \alpha} \left[ \frac{3t}{a} \sin^2 \alpha + 2 \cos^3 \alpha + 6 C_1 \right]. \end{aligned}$$

Da  $N_\alpha$  für  $\alpha = 0$  endlich ist, wird die Klammer Null und daher  $6 C_1 = -2$ .

$$\left. \begin{aligned} N_\alpha &= -\frac{\gamma a^2}{6} \left( 3 \frac{f}{a} - 2 \frac{1 - \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right), & N_\beta &= -\frac{\gamma a^2}{6} \left( 3 \frac{f}{a} - 6 \cos \alpha + 2 \frac{1 - \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right), \\ \Delta r_\alpha &= -\frac{\gamma a^3}{6 E h} \sin \alpha \left[ 3(1 - \mu) \frac{f}{a} - 6 \cos \alpha + 2(1 + \mu) \frac{1 - \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right], \\ \vartheta &= \gamma \frac{a^2}{E h} \sin \alpha. \end{aligned} \right\} (1132)$$

Wird die Kugelschale nach Abb. 782 als Hängeboden eines Wasserbehälters verwendet, so erhält die bezogene Kraft  $g$  unter Beibehaltung des Koordinatensystems in den Ergebnissen (1121) bis (1127) das negative Vorzeichen.

Schnittkräfte durch Wasserauflast bei Verwendung der Kugelschale als Hängeboden eines Behälters (Abb. 782).

$$\left. \begin{aligned} p_x &= 0, & p_y &= 0, & p_z &= -\gamma a \left( \frac{f}{a} + \cos \alpha \right), \\ N_\alpha &= \frac{\gamma a^2}{6} \left( 3 \frac{f}{a} + 2 \frac{1 - \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right), & N_\beta &= \frac{\gamma a^2}{6} \left( 3 \frac{f}{a} + 6 \cos \alpha - 2 \frac{1 - \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right), \\ \Delta r_\alpha &= \frac{\gamma a^3}{6 E h} \sin \alpha \left[ 3(1 - \mu) \frac{f}{a} + 6 \cos \alpha - 2(1 + \mu) \frac{1 - \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right], \\ \vartheta &= \frac{\gamma a^2}{E h} \sin \alpha. \end{aligned} \right\} (1133)$$

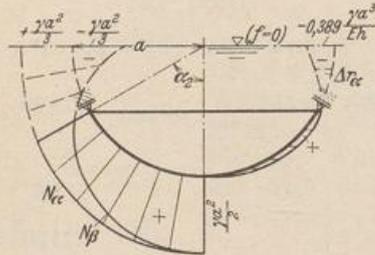


Abb. 782. Schaulinien für Wasserauflast beim Hängeboden.

Aus der Ableitung an einem Spiegelbild der Abb. 782 folgt, daß  $\vartheta$  im Gegensatz zu (1132) bei Rechtsdrehung der Meridiantangente positiv ist.

Die Kugelschale mit einer vom Meridianwinkel  $\beta$  periodisch abhängigen Belastung. Die allgemeinen Differentialgleichungen (1101) für das Gleichgewicht der Kräfte an einer Rotationsschale lassen sich für  $R_\alpha = R_\beta = a$  folgendermaßen vereinfachen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN_{\alpha\beta n}}{d\alpha} + 2N_{\alpha\beta n} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{n}{\sin \alpha} N_{\alpha n} &= -a \left( X_n + \frac{n}{\sin \alpha} Z_n \right), \\ \frac{dN_{\alpha n}}{d\alpha} + 2N_{\alpha n} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{n}{\sin \alpha} N_{\alpha\beta n} &= -a \left( Y_n + Z_n \operatorname{ctg} \alpha \right). \end{aligned} \right\} (1134)$$

Sie enthalten die Unbekannten in symmetrischer Form, so daß daraus neue Unbekannte  $U_1 = N_{\alpha n} + N_{\alpha\beta n}$ ,  $U_2 = N_{\alpha n} - N_{\alpha\beta n}$  gebildet werden, die sich nach H. Reißner auf Grund bekannter Regeln unabhängig berechnen lassen.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU_1}{d\alpha} + U_1 \left( 2 \operatorname{ctg} \alpha + \frac{n}{\sin \alpha} \right) &= -a \left( X_n + Y_n + \frac{n + \cos \alpha}{\sin \alpha} Z_n \right), \\ \frac{dU_2}{d\alpha} + U_2 \left( 2 \operatorname{ctg} \alpha - \frac{n}{\sin \alpha} \right) &= +a \left( X_n - Y_n + \frac{n - \cos \alpha}{\sin \alpha} Z_n \right), \end{aligned} \right\} (1135)$$

Bei Windbelastung ist  $p_x = 0$ ,  $p_y = 0$ ,  $p_z = \sum Z_n(\alpha) \cos n\beta$ . Der auf jeden Schalen-sektor von der Winkelbreite  $\pi/n$  entfallende Anteil bildet eine Resultierende. Je zwei sind einander symmetrisch oder antimetrisch zugeordnet, je nachdem  $n$  eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Sie geben geometrisch addiert eine senkrechte ( $W_v$ ) oder eine waagerechte Kraft ( $W_h$ ), deren Wirkungslinie die Drehachse im Schalenmittelpunkt schneidet (Abb. 783).

Sonderfall  $Z_n(\alpha) = p \sin \alpha$ ,  $n = 1$ . Die Spannungsverteilung ist durch einen Nullmeridian ausgezeichnet.