



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Die Statik im Stahlbetonbau**

**Beyer, Kurt**

**Berlin [u.a.], 1956**

Die Kugelschale mit einer vom Meridianwinkel  $\beta$  periodisch abhängigen  
Belastung

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

$$\left. \begin{aligned} N_\alpha &= -\frac{\gamma a^2}{6} \left( 3 \frac{f}{a} - 2 \frac{1 - \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right), & N_\beta &= -\frac{\gamma a^2}{6} \left( 3 \frac{f}{a} - 6 \cos \alpha + 2 \frac{1 - \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right), \\ \Delta r_\alpha &= -\frac{\gamma a^3}{6 E h} \sin \alpha \left[ 3(1 - \mu) \frac{f}{a} - 6 \cos \alpha + 2(1 + \mu) \frac{1 - \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right], \\ \vartheta &= \gamma \frac{a^2}{E h} \sin \alpha. \end{aligned} \right\} (1132)$$

Wird die Kugelschale nach Abb. 782 als Hängeboden eines Wasserbehälters verwendet, so erhält die bezogene Kraft  $g$  unter Beibehaltung des Koordinatensystems in den Ergebnissen (1121) bis (1127) das negative Vorzeichen.

Schnittkräfte durch Wasserauflast bei Verwendung der Kugelschale als Hängeboden eines Behälters (Abb. 782).

$$\left. \begin{aligned} p_x &= 0, & p_y &= 0, & p_z &= -\gamma a \left( \frac{f}{a} + \cos \alpha \right), \\ N_\alpha &= \frac{\gamma a^2}{6} \left( 3 \frac{f}{a} + 2 \frac{1 - \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right), & N_\beta &= \frac{\gamma a^2}{6} \left( 3 \frac{f}{a} + 6 \cos \alpha - 2 \frac{1 - \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right), \\ \Delta r_\alpha &= \frac{\gamma a^3}{6 E h} \sin \alpha \left[ 3(1 - \mu) \frac{f}{a} + 6 \cos \alpha - 2(1 + \mu) \frac{1 - \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right], \\ \vartheta &= \frac{\gamma a^2}{E h} \sin \alpha. \end{aligned} \right\} (1133)$$

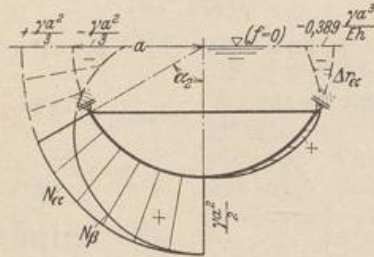


Abb. 782. Schaulinien für Wasserauflast beim Hängeboden.

Aus der Ableitung an einem Spiegelbild der Abb. 782 folgt, daß  $\vartheta$  im Gegensatz zu (1132) bei Rechtsdrehung der Meridiantangente positiv ist.

Die Kugelschale mit einer vom Meridianwinkel  $\beta$  periodisch abhängigen Belastung. Die allgemeinen Differentialgleichungen (1101) für das Gleichgewicht der Kräfte an einer Rotationsschale lassen sich für  $R_\alpha = R_\beta = a$  folgendermaßen vereinfachen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN_{\alpha\beta n}}{d\alpha} + 2N_{\alpha\beta n} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{n}{\sin \alpha} N_{\alpha n} &= -a \left( X_n + \frac{n}{\sin \alpha} Z_n \right), \\ \frac{dN_{\alpha n}}{d\alpha} + 2N_{\alpha n} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{n}{\sin \alpha} N_{\alpha\beta n} &= -a \left( Y_n + Z_n \operatorname{ctg} \alpha \right). \end{aligned} \right\} (1134)$$

Sie enthalten die Unbekannten in symmetrischer Form, so daß daraus neue Unbekannte  $U_1 = N_{\alpha n} + N_{\alpha\beta n}$ ,  $U_2 = N_{\alpha n} - N_{\alpha\beta n}$  gebildet werden, die sich nach H. Reißner auf Grund bekannter Regeln unabhängig berechnen lassen.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU_1}{d\alpha} + U_1 \left( 2 \operatorname{ctg} \alpha + \frac{n}{\sin \alpha} \right) &= -a \left( X_n + Y_n + \frac{n + \cos \alpha}{\sin \alpha} Z_n \right), \\ \frac{dU_2}{d\alpha} + U_2 \left( 2 \operatorname{ctg} \alpha - \frac{n}{\sin \alpha} \right) &= +a \left( X_n - Y_n + \frac{n - \cos \alpha}{\sin \alpha} Z_n \right), \end{aligned} \right\} (1135)$$

Bei Windbelastung ist  $p_x = 0$ ,  $p_y = 0$ ,  $p_z = \sum Z_n(\alpha) \cos n\beta$ . Der auf jeden Schalen-sektor von der Winkelbreite  $\pi/n$  entfallende Anteil bildet eine Resultierende. Je zwei sind einander symmetrisch oder antimetrisch zugeordnet, je nachdem  $n$  eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Sie geben geometrisch addiert eine senkrechte ( $W_v$ ) oder eine waagerechte Kraft ( $W_h$ ), deren Wirkungslinie die Drehachse im Schalenmittelpunkt schneidet (Abb. 783).

Sonderfall  $Z_n(\alpha) = p \sin \alpha$ ,  $n = 1$ . Die Spannungsverteilung ist durch einen Nullmeridian ausgezeichnet.



a) Lösung der Differentialgleichungen (1135). Die Gleichungen haben die Form

$$\frac{dU}{d\alpha} + U\varphi = \psi.$$

Die Substitution  $\varphi = \bar{\varphi}'/\bar{\varphi}$  führt auf

$$\bar{\varphi}U' + U\bar{\varphi}' = \psi\bar{\varphi}, \quad \bar{\varphi}U = \int \psi\bar{\varphi} d\alpha + C.$$

Durch Integration folgt

$$\int \varphi d\alpha = \int \frac{\bar{\varphi}'}{\bar{\varphi}} d\alpha = \ln \bar{\varphi}, \quad \bar{\varphi} = e^{\int \varphi d\alpha}$$

und damit die Lösung

$$U = e^{-\int \varphi d\alpha} \left[ \int \psi e^{\int \varphi d\alpha} d\alpha + C \right].$$

Die Integrationskonstanten ergeben sich aus der Bedingung, daß für  $\alpha = 0$  die Schnittkräfte und damit auch  $U_1$  und  $U_2$  endlich sind. Die Integration bietet keine Schwierigkeiten; die Lösung lautet (Abb. 785)

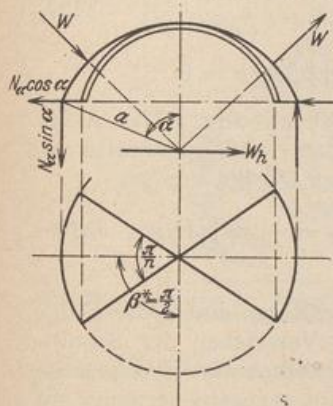
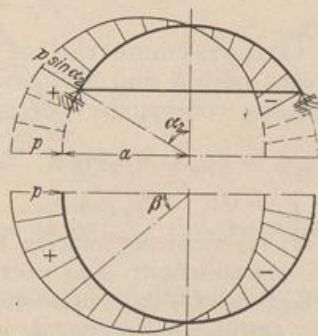
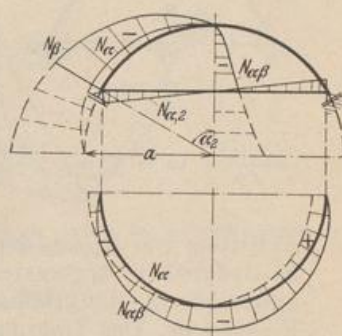


Abb. 783.

Abb. 784. Windlast  $p_2 = p \sin \alpha \cos \beta$ .Abb. 785. Schaulinien für Windbelastung  $p_2 = p \sin \alpha \cos \beta$ .

$$\left. \begin{aligned} N_\alpha &= -\frac{pa \cos \alpha}{3 \sin^3 \alpha} (2 - 3 \cos \alpha + \cos^3 \alpha) \cos \beta, \\ N_{\alpha\beta} &= -\frac{pa}{3 \sin^3 \alpha} (2 - 3 \cos \alpha + \cos^3 \alpha) \sin \beta, \\ N_\beta &= +\frac{pa}{3 \sin^3 \alpha} (2 \cos \alpha - 3 \sin^2 \alpha - 2 \cos^4 \alpha) \cos \beta. \end{aligned} \right\} \quad (1136)$$

b) Unmittelbare Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen (Abb. 783 u. 784).

$$W_h = 4pa^2 \int_0^\alpha \sin^3 \alpha d\alpha \int_0^{\pi/2} \cos^2 \beta d\beta = p \frac{\pi a^2}{3} (2 - 3 \cos \alpha + \cos^3 \alpha).$$

Gleichgewicht aller äußeren Kräfte gegen Drehen um eine Achse  $\beta^* = \pi/2$  in der Ebene des Breitenkreises:

$$W_h a \cos \alpha + 4N_{\alpha 1} a^2 \sin^3 \alpha \int_0^{\pi/2} \cos^2 \beta d\beta = 0; \quad \text{daraus } N_\alpha \text{ nach (1136).}$$

Gleichgewichtsbedingung (1113):

$$N_\beta = N_{\beta 1} \cos \beta = -(pa \sin \alpha + N_{\alpha 1}) \cos \beta; \quad \text{daraus } N_\beta \text{ nach (1136).}$$

48\*



Gleichgewicht gegen Verschieben durch  $W_h$  und durch die Komponenten der Schnittkräfte  $N_\alpha, N_{\alpha\beta}$  in Richtung  $W_h$ :

$$W_h - 4N_{\alpha 1} a \sin \alpha \cos \alpha \int_0^{\pi/2} \cos^2 \beta d\beta + 4N_{\alpha\beta 1} a \sin \alpha \int_0^{\pi/2} \sin^2 \beta d\beta = 0,$$

daraus  $N_{\alpha\beta}$  nach (1136).

Reißner, H.: Spannungen in Kugelschalen. Müller-Breslau-Festschrift S. 192. Leipzig 1912.  
 — Pasternak, P.: Die praktische Berechnung biegeester Kugelschalen usw. Z. angew. Math. Mech. 1926 S. 1.

**b) Die Kegelschale.** Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen für die äußeren Kräfte am unteren differentialen Abschnitt der Fläche erhalten mit  $R_\beta = \infty$ ,  $R_\beta d\alpha = dy$ ,  $r_\alpha \rightarrow r_z = y \cos \alpha$ ,  $N_\alpha \rightarrow N_y$ ,  $N_{\alpha\beta} \rightarrow N_{y\beta}$  folgende Form (Abb. 786):

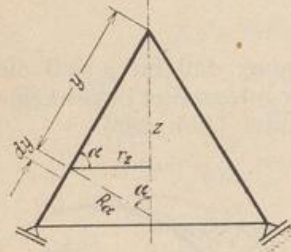


Abb. 786.

$$\left. \begin{aligned} y \frac{\partial N_{y\beta}}{\partial y} + 2N_{y\beta} + \frac{1}{\cos \alpha} \frac{\partial N_\beta}{\partial \beta} y p_x &= 0, \\ y \frac{\partial N_y}{\partial y} + (N_y - N_\beta) + \frac{1}{\cos \alpha} \frac{\partial N_{y\beta}}{\partial \beta} + y p_y &= 0, \\ N_\beta + y p_z \operatorname{ctg} \alpha &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1137)$$

Rotationssymmetrische Belastung: Die Ableitungen nach  $\beta$  sind Null, so daß die Schnittkräfte unabhängig voneinander berechnet werden können.

$$\frac{d(N_{y\beta} y^2)}{dy} = -y^2 p_x, \quad \frac{d(N_y y)}{dy} = -y p_y - y p_z \operatorname{ctg} \alpha, \quad N_\beta = -y p_z \operatorname{ctg} \alpha. \quad (1138)$$

$p_x = 0: \quad N_{y\beta} = 0.$

Ableitung von  $N_y$  aus dem Gleichgewicht der äußeren Kräfte an einem durch den Breitenkreis  $r_z$  begrenzten Schalenabschnitt. Das obere Vorzeichen der Schnittkräfte gilt für die gestützte Kegelschale, das untere Vorzeichen für die hängende Kegelschale. Der Tragring der gestützten Kegelschale wird gezogen, derjenige der hängenden Kegelschale gedrückt.

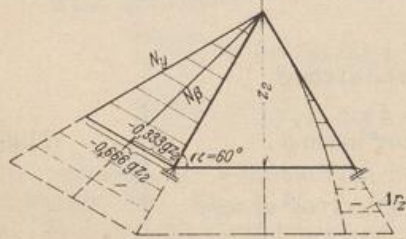


Abb. 787. Schaulinien für Eigengewicht.

$$N_y = \mp \frac{Q}{2\pi r_z \sin \alpha} = \mp \frac{Q}{\pi y \sin 2\alpha}. \quad (1139)$$

Verschiebungszustand bei rotationssymmetrischer Belastung

$$\left. \begin{aligned} r &\rightarrow r + \Delta r_z, \\ \Delta r_z &= \frac{r_z}{E h} (N_\beta - \mu N_y) \\ &= \frac{y \cos \alpha}{E h} (N_\beta - \mu N_y), \end{aligned} \right\} \quad (1140)$$

$$\begin{aligned} \vartheta &= \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{E h} \left[ (1 + \mu) (N_y - N_\beta) - y \frac{\partial}{\partial y} (N_\beta - \mu N_y) \right] \\ &= \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{E h} \left[ \operatorname{ctg} \alpha \frac{\partial}{\partial y} (y^2 p_z) - \mu y p_y + N_y \right]. \end{aligned} \quad (1141)$$

Eigengewicht einer geschlossenen Kegelschale mit gleichbleibender Wanddicke  $h$  (Abb. 787).

$$\left. \begin{aligned} p_z &= g \cos \alpha, & p_y &= g \sin \alpha, & G &= \pi r_z y g, \\ N_y &= \mp \frac{g z}{2 \sin^2 \alpha}, & N_\beta &= \mp g z \operatorname{ctg}^2 \alpha, \\ \Delta r_z &= \mp \frac{g z^2 \operatorname{ctg} \alpha}{2 E h \sin^2 \alpha} (2 \cos^2 \alpha - \mu), & \vartheta &= \mp \frac{g z \operatorname{ctg} \alpha}{E h \sin^2 \alpha} [1 + \mu - (2 + \mu) \cos^2 \alpha]. \end{aligned} \right\} \quad (1142)$$