Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

b) Die Kegelschale

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

Zur Berechnung der Schnittkräfte aus Schneelast wird $g = p_s \cos\alpha$ eingesetzt.

Waagerecht abgeglichene Auflast (Abb. 788 u. 789):

$$\left.\begin{aligned} &G=\gamma\pi r_z^2\left(f\pm\tfrac{2}{3}z\right). \quad N_y=\mp\frac{\gamma z\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{6\sin\alpha}(3f\pm 2z), \quad N_\beta=\mp\gamma z(f\pm z)\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha},\\ &\Delta r_z=\mp\frac{\gamma z^2}{E h}\frac{\cos^2\alpha}{\sin^3\alpha}\left[(f\pm z)-\frac{\mu}{6}(3f\pm 2z)\right],\\ &\vartheta=\pm\frac{\gamma z}{E h}\frac{\cos^2\alpha}{\sin^3\alpha}\left(\frac{3}{2}f\pm\frac{8}{3}z\right). \end{aligned}\right\} \tag{1143}$$

Eigengewicht (g) einer offenen Kegelschale (Abb. 790)

$$\left.\begin{aligned} &N_y=-\frac{g z}{2\sin^2\alpha}\left(1-\frac{z_1^2}{z^2}\right), \quad N_\beta=-g z\,\mathrm{ctg}^2\alpha,\\ &\Delta r_z=-\frac{g z^2}{E h}\mathrm{ctg}^3\alpha\left[1-\frac{\mu}{2\cos^2\alpha}\left(1-\frac{z_1^2}{z^2}\right)\right],\\ &\vartheta=-\frac{g z}{E h}\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha}{\sin^2\alpha}\times\\ &\qquad\times\left[\frac{1}{2}+\mu-(2+\mu)\cos^2\alpha-\frac{1}{2}\frac{z_1^2}{z^2}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{1144}$$

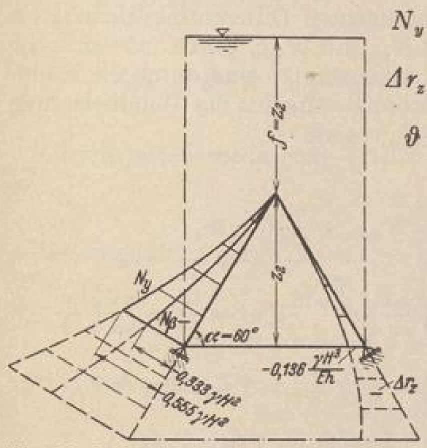

Abb. 788. Schaulinien für Auflast bei der aufgestützten Kegelschale.

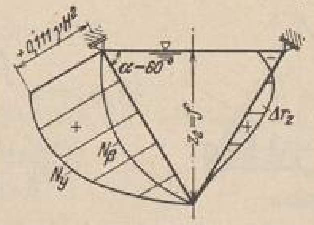

Abb. 789. Schaulinien für Auflast bei der aufgehängten Kegelschale.

Offene Kegelschale mit Kopfring und Ringlast G_0 (Abb. 791)

$$\left.\begin{aligned} &N_y=-\frac{G_0}{2\pi z\cos\alpha}, && N_\beta=0,\\ &\Delta r_z=\frac{\mu G_0}{2\pi E h\sin\alpha}, && \vartheta=-\frac{G_0}{E h}\frac{1}{2\pi z\sin\alpha}. \end{aligned}\right\} \tag{1145}$$

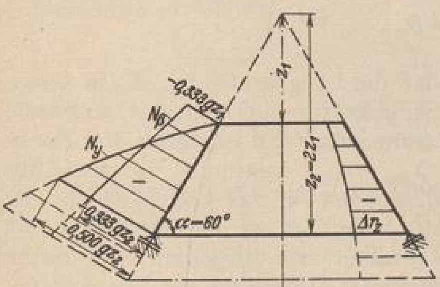

Abb. 790. Schaulinien für Eigengewicht.

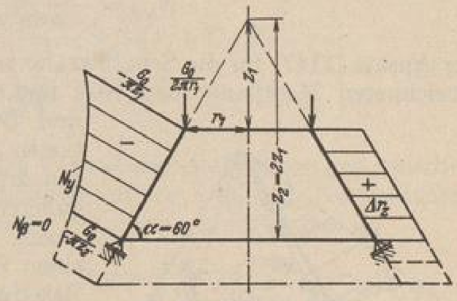

Abb. 791. Schaulinien für Ringlast.

Periodische Belastung. Entwicklung als trigonometrische, nach ganzen Vielfachen von β fortschreitende Reihe. Die Koeffizienten sind Funktionen von z.

$$p_x=\sum X_n\sin n\beta, \quad p_y=\sum Y_n\cos n\beta, \quad p_z=\sum Z_n\cos n\beta, \quad n=0,1\ldots\infty.$$

Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen (1113) werden durch den Ansatz

$$N_y=\sum N_{yn}\cos n\beta, \quad N_\beta=\sum N_{\beta n}\cos n\beta, \quad N_{y\beta}=\sum N_{y\beta n}\sin n\beta$$

erfüllt, wenn die allein von z abhängigen Funktionen N_{yn}, $N_{\beta n}$, $N_{y\beta n}$ den folgenden beiden simultanen totalen Differentialgleichungen genügen.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dN_{y\beta n}}{dy} + \frac{2}{y} N_{y\beta n} + X_n + \frac{n}{\sin\alpha} Z_n = 0\,, \\ &\frac{d}{dy}(y N_{yn}) + \frac{n}{\cos\alpha} N_{y\beta n} + y Y_n + y Z_n \operatorname{ctg}\alpha = 0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (1146)$$

Außerdem ist

$$N_{\beta n} = -y Z_n \operatorname{ctg}\alpha\,.$$

Darnach kann $N_{y\beta n}$ unabhängig von den beiden anderen Schnittkräften aus (1146) berechnet werden. Die allgemeine Lösung dieser linearen Differentialgleichung ist bekannt (Hütte 26. Aufl. Bd. 1 S. 101), so daß N_{yn} mit $N_{y\beta n}$ durch eine einfache Quadratur gefunden wird. Die beiden Integrationskonstanten sind durch die Randbedingungen bestimmt. Die Lösung liefert die Schnittkräfte aus der Windbelastung eines Kegeldaches mit $p_x = 0$, $p_y = 0$, $p_z = \sum Z_n \cos n\beta$.

Lösung für $Z_n = Z_n(y) = \text{const.}$

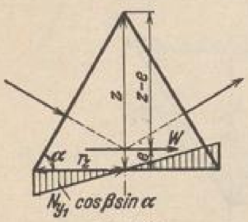

Abb. 792.

$$\frac{dN_{y\beta n}}{dy} + \frac{2}{y} N_{y\beta n} + \frac{n Z_n}{\sin\alpha} = 0\,,$$

$$N_{y\beta n} = e^{-\int \frac{2}{y} dy}\left[C_1 - \int \frac{n Z_n}{\sin\alpha} e^{\int \frac{2}{y} dy} dy\right] = \frac{C_1}{y^2} - \frac{n Z_n}{\sin\alpha}\,\frac{y}{3}\,,$$

$$\frac{d(y N_{yn})}{dy} + \frac{n}{\cos\alpha}\left(\frac{C_1}{y^2} - \frac{n Z_n}{\sin\alpha}\,\frac{y}{3}\right) + y Z_n \operatorname{ctg}\alpha = 0\,,$$

$$N_{yn} = Z_n y \frac{n^2 - 3\cos^2\alpha}{6 \sin\alpha \cos\alpha} + \frac{n C_1}{y^2 \cos\alpha} + \frac{C_2}{y}\,.$$

Damit für $y = 0$ die Schnittkräfte endlich bleiben, ist $C_1 = 0$, $C_2 = 0$.

$$\left.\begin{aligned} N_y &= -\frac{Z_n z}{6}\,\frac{n^2 - 3\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos\alpha} \cos n\beta\,, \\ N_\beta &= -Z_n z \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha} \cos n\beta\,, \\ N_{y\beta} &= -\frac{n Z_n z}{3\sin^2\alpha} \sin n\beta\,. \end{aligned}\right\} \qquad (1147)$$

Der Ansatz (1147) für die Schnittkräfte zeigt, daß die Längskräfte N_y, N_β in n ausgezeichneten Meridianebenen Null und die Schubkräfte gleichzeitig Grenzwerte sind. Der Spannungszustand ist durch drei Funktionen N_{yn}, $N_{\beta n}$, $N_{y\beta n}$ bestimmt, die auch aus den drei Bedingungen für das Gleichgewicht der äußeren Kräfte berechnet werden können, die an einem Schalensektor π/n angreifen, der durch einen Breitenschnitt z begrenzt ist. Die aus der Belastung herrührenden Kräfte schneiden sich auf der Drehachse. Sie sind bei einer geraden Zahl n symmetrisch, ihre Resultierende senkrecht, dagegen bei einer ungeraden Zahl n antimetrisch, so daß eine waagerecht gerichtete resultierende Kraft entsteht. Die Untersuchung kann in beiden Fällen auf den halben Sektor beschränkt werden.

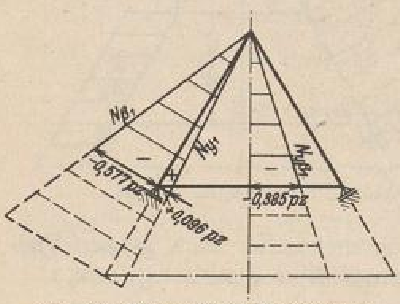

Abb. 793. Schaulinien für Windbelastung $p \sin\alpha \cos\beta$.

Lösung für $p_x = 0$, $p_y = 0$, $p_z = p \sin\alpha \cos\beta$ (Abb. 793).

Waagerechte Resultierende der äußeren Kräfte (Abb. 792).

$$W = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^y p_z \sin\alpha \cos\beta \, dy \, r_z \, d\beta = 4 p \sin^2\alpha \cos\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^y y \cos^2\beta \, dy \, d\beta \quad = \frac{\pi}{2} p z^2 \cos\alpha \, .$$

$$W \cdot (z-e) = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^y p_z \sin\alpha \cos\beta \frac{s}{\sin\alpha} r_z \, dy \, d\beta = \pi p \frac{y^3}{3} \sin\alpha \cos\alpha \, , \; (z-e) = \frac{2y}{3 \sin\alpha} \, .$$

Gleichgewicht aller äußeren Kräfte gegen Drehen um eine Achse $\beta^* = \frac{\pi}{2}$ in der Ebene des Breitenkreises.

$$We = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} N_{y1} \cos\beta \sin\alpha \cdot r_z \cos\beta \cdot r_z \, d\beta \, , \quad N_y = \frac{p z}{6} \frac{1 - 3\cos^2\alpha}{\sin\alpha \cos\alpha} \cos\beta \, .$$

Gleichgewichtsbedingung (1137)

$$N_\beta = -p z \operatorname{ctg}\alpha \cos\beta \, .$$

Gleichgewicht gegen Verschieben in der Richtung W

$$4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} N_y \cos\alpha \cos\beta \cdot r_z \, d\beta + 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} N_{y\beta 1} \sin^2\beta \cdot r_z \, d\beta - W = 0 \, ,$$

$$N_{y\beta} = - \frac{p z}{3 \sin\alpha} \sin\beta \, .$$

c) Die Zylinderschale. Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen (1137) der Kegelschale vereinfachen sich mit $r = a = \text{const}$ und $\alpha = 90^0$. Sie lauten

$$\frac{\partial N_\beta}{\partial \beta} + a \frac{\partial N_{y\beta}}{\partial y} + a p_x = 0 \, , \quad \frac{\partial N_{y\beta}}{\partial \beta} + a \frac{\partial N_y}{\partial y} + a p_y = 0 \, , \quad N_\beta + a p_z = 0 \, , \qquad (1148)$$

so daß die Schnittkräfte N_β, $N_{y\beta}$, N_y in Verbindung mit zwei Integrationskonstanten der Reihe nach berechnet werden können. Diese sind durch die Randbedingungen bestimmt.

$$\left. \begin{aligned} N_\beta = -p_z a \, , \qquad N_{y\beta} = \int \left(\frac{\partial p_z}{\partial \beta} - p_x \right) dy + C_1(\beta) \, , \\ N_y = - \int \left[p_y + \frac{1}{a} \int \left(\frac{\partial^2 p_z}{\partial \beta^2} - \frac{\partial p_x}{\partial \beta} \right) dy + \frac{d C_1(\beta)}{d\beta} \right] dy + C_2(\beta) \, . \end{aligned} \right\} \qquad (1149)$$

Die Formänderung der Zylinderschale ist den Verträglichkeitsbedingungen zwischen den Komponenten u, v, w des Verschiebungszustandes und den Komponenten ε_y, ε_β, $\gamma_{y\beta}$ der Verzerrung eines differentialen Abschnitts unterworfen.

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \, , \quad \varepsilon_\beta = \frac{\partial u}{a \, \partial \beta} - \frac{w}{a} \, , \quad \gamma_{y\beta} = \frac{\partial v}{a \, \partial \beta} + \frac{\partial u}{\partial y} \, ,$$

so daß

$$v = \int \varepsilon_y \, dy + C_3(\beta) \, , \quad u = \int \left(\gamma_{y\beta} - \frac{\partial v}{a \, \partial \beta} \right) dy + C_4(\beta) \, , \quad w = \frac{\partial u}{\partial \beta} - a \varepsilon_\beta \, . \qquad (1150)$$

Die Dehnungen ε_y, ε_β und die Winkeländerung $\gamma_{y\beta}$ sind durch das Elastizitätsgesetz bestimmt (1104). Darnach ist

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E h} (N_y - \mu N_\beta) \, , \quad \varepsilon_\beta = \frac{1}{E h} (N_\beta - \mu N_y) \, , \quad \gamma_{y\beta} = \frac{2(1+\mu)}{E h} N_{y\beta} \, . \qquad (1151)$$