Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

c) Die Zylinderschale

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

$$W = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^y p_z \sin\alpha\cos\beta\, dy\, r_z\, d\beta = 4\,p\sin^2\alpha\cos\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^y y\cos^2\beta\, dy\, d\beta \quad = \frac{\pi}{2}\,p\,z^2\cos\alpha\,.$$

$$W\cdot(z-e) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^y p_z\sin\alpha\cos\beta\,\frac{s}{\sin\alpha}\,r_z\,dy\,d\beta = \pi\,p\,\frac{y^3}{3}\sin\alpha\cos\alpha\,,\ (z-e) = \frac{2\,y}{3\sin\alpha}\,.$$

Gleichgewicht aller äußeren Kräfte gegen Drehen um eine Achse $\beta^* = \frac{\pi}{2}$ in der Ebene des Breitenkreises.

$$We = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} N_{y1}\cos\beta\sin\alpha\cdot r_z\cos\beta\cdot r_z\,d\beta\,,\qquad N_y = \frac{p\,z}{6}\,\frac{1-3\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\cos\beta\,.$$

Gleichgewichtsbedingung (1137)

$$N_\beta = -\,p\,z\operatorname{ctg}\alpha\cos\beta\,.$$

Gleichgewicht gegen Verschieben in der Richtung W

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} N_y\cos\alpha\cos\beta\cdot r_z\,d\beta + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} N_{y\beta 1}\sin^2\beta\cdot r_z\,d\beta - W = 0\,,$$

$$N_{y\beta} = -\,\frac{p\,z}{3\sin\alpha}\sin\beta\,.$$

c) Die Zylinderschale. Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen (1137) der Kegelschale vereinfachen sich mit $r = a = \text{const}$ und $\alpha = 90^0$. Sie lauten

$$\frac{\partial N_\beta}{\partial\beta} + a\,\frac{\partial N_{y\beta}}{\partial y} + a\,p_x = 0\,,\quad \frac{\partial N_{y\beta}}{\partial\beta} + a\,\frac{\partial N_y}{\partial y} + a\,p_y = 0\,,\quad N_\beta + a\,p_z = 0\,,\quad (1148)$$

so daß die Schnittkräfte N_β, $N_{y\beta}$, N_y in Verbindung mit zwei Integrationskonstanten der Reihe nach berechnet werden können. Diese sind durch die Randbedingungen bestimmt.

$$\left.\begin{aligned} N_\beta = -\,p_z\,a\,,\qquad N_{y\beta} &= \int\Big(\frac{\partial p_z}{\partial\beta} - p_x\Big)\,dy + C_1(\beta)\,,\\ N_y = -\int\Big[p_y + \frac{1}{a}\int\Big(\frac{\partial^2 p_z}{\partial\beta^2} - \frac{\partial p_x}{\partial\beta}\Big)\,dy &+ \frac{d\,C_1(\beta)}{d\beta}\Big]\,dy + C_2(\beta)\,.\end{aligned}\right\}\quad (1149)$$

Die Formänderung der Zylinderschale ist den Verträglichkeitsbedingungen zwischen den Komponenten u, v, w des Verschiebungszustandes und den Komponenten ε_y, ε_β, $\gamma_{y\beta}$ der Verzerrung eines differentialen Abschnitts unterworfen.

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}\,,\qquad \varepsilon_\beta = \frac{\partial u}{a\,\partial\beta} - \frac{w}{a}\,,\qquad \gamma_{y\beta} = \frac{\partial v}{a\,\partial\beta} + \frac{\partial u}{\partial y}\,,$$

so daß

$$v = \int\varepsilon_y\,dy + C_3(\beta)\,,\qquad u = \int\Big(\gamma_{y\beta} - \frac{\partial v}{a\,\partial\beta}\Big)\,dy + C_4(\beta)\,,\qquad w = \frac{\partial u}{\partial\beta} - a\,\varepsilon_\beta\,.\quad (1150)$$

Die Dehnungen ε_y, ε_β und die Winkeländerung $\gamma_{y\beta}$ sind durch das Elastizitätsgesetz bestimmt (1104). Darnach ist

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E\,h}(N_y - \mu\,N_\beta)\,,\qquad \varepsilon_\beta = \frac{1}{E\,h}(N_\beta - \mu\,N_y)\,,\qquad \gamma_{y\beta} = \frac{2(1+\mu)}{E\,h}\,N_{y\beta}\,.\quad (1151)$$

Rotationssymmetrische Belastung. Die Ableitung der Funktionen der Schnittkräfte nach β sind Null, so daß nach (1148) folgender Ansatz verwendet werden kann.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dN_{y\beta}}{dy} + p_x = 0, \qquad \frac{dN_y}{dy} + p_y = 0, \qquad N_\beta + a p_z = 0, \\ &-w = \Delta a = \frac{a}{Eh}(N_\beta - \mu N_y), \qquad \vartheta = dw/dy. \end{aligned}\right\} \tag{1152}$$

Schnittkräfte aus dem Eigengewicht g einer Zylinderschale mit Aufbau (Gewicht G_0, Abb. 794)

$$N_y = -gy - \frac{G_0}{2a\pi}, \; N_\beta = 0, \; Ehw = -\mu\left(ayg + \frac{G_0}{2\pi}\right), \; Eh\vartheta = -\mu a g. \tag{1153}$$

Bei den folgenden Belastungsarten ist die Meridianschnittkraft N_y Null.

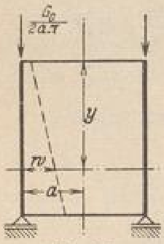

Abb. 794.

1. Wasserfüllung mit $p_z = -\gamma y$:

$$N_\beta = \gamma y a, \qquad Ehw = -\gamma y a^2, \qquad Eh\vartheta = -\gamma a^2. \tag{1154}$$

2. Silodruck nach S. 14 mit $p_s = p_{s,\max}(1 - e^{-y/y_0})$, $p_z = -p_s$:

$$N_\beta = a p_s, \quad Ehw = -a^2 p_s, \quad Eh\vartheta = -p_{s,\max}\frac{a^2}{y_0}e^{-y/y_0}. \tag{1155}$$

3. Erddruck nach S. 9 mit $e = \gamma_e \operatorname{tg}^2(45 - \varphi/2)$, $p_z = e(y + q/\gamma_e)$:

$$N_\beta = -ae(y + q/\gamma_e), \quad Ehw = a^2 e(y + q/\gamma_e), \quad Eh\vartheta = a^2 e. \tag{1156}$$

4. Temperatur und Schwinden:

$$w = -\alpha_t t a, \qquad \vartheta = 0. \tag{1157}$$

Periodische Belastung. Entwicklung als trigonometrische, nach ganzen Vielfachen von β fortschreitende Reihe. Die Koeffizienten X_n, Y_n, Z_n sind Funktionen von y.

$$p_x = \sum X_n \sin n\beta, \qquad p_y = \sum Y_n \cos n\beta, \qquad p_z = \sum Z_n \cos n\beta. \tag{1158}$$

Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen (1148) werden durch den Ansatz

$$N_y = \sum N_{yn} \cos n\beta, \quad N_\beta = \sum N_{\beta n} \cos n\beta, \qquad N_{y\beta} = \sum N_{y\beta n} \sin n\beta \tag{1159}$$

erfüllt, wenn die allein von y abhängigen Funktionen N_{yn}, $N_{\beta n}$, $N_{y\beta n}$ den folgenden beiden simultanen totalen Differentialgleichungen genügen.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dN_{y\beta n}}{dy} + X_n + nZ_n = 0, \qquad \frac{dN_{yn}}{dy} + \frac{n}{a}N_{y\beta n} + Y_n = 0, \\ &N_{\beta n} + aZ_n = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1160}$$

Berechnung einer Zylinderschale (Abb. 795).

(Kühlturm im Kraftwerk Golpa-Zschornewitz.)

Geometrische Abmessungen.

$$a = 16{,}7\,\text{m}, \qquad l = 32{,}0\,\text{m}.$$

Belastung. Windgesetz (1111) der Göttinger Versuchsanstalt mit $p_w = 0{,}200\,\text{t/m}^2$.

$$p_x = 0, \quad p_y = 0, \quad p_z = \sum Z_n \cos n\beta = -0{,}131 + 0{,}056\cos\beta + 0{,}223\cos 2\beta + 0{,}080\cos 3\beta.$$

Lösung der Differentialgleichungen (1160).

$$X_n = 0, \qquad Y_n = 0, \qquad Z_n = \text{const}.$$

$$N_{y\beta n} = -nZ_n(y + C_1),$$

$$N_{yn} = \frac{n^2 Z_n}{a}\left(\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2\right),$$

$$N_{\beta n} = -aZ_n.$$

Für $y = 0$ ist $N_{yn} = 0$, $N_{y\beta n} = 0$, daher $C_1 = 0$, $C_2 = 0$.

$$N_y = \frac{y^2}{2a} \sum n^2 Z_n \cos n\beta ,$$

$$N_\beta = -a \sum Z_n \cos n\beta ,$$

$$N_{y\beta} = -y \sum n Z_n \sin n\beta .$$

Schnittkräfte und Trajektorien der Hauptspannungen sind in Abb. 795 u. 796 dargestellt.

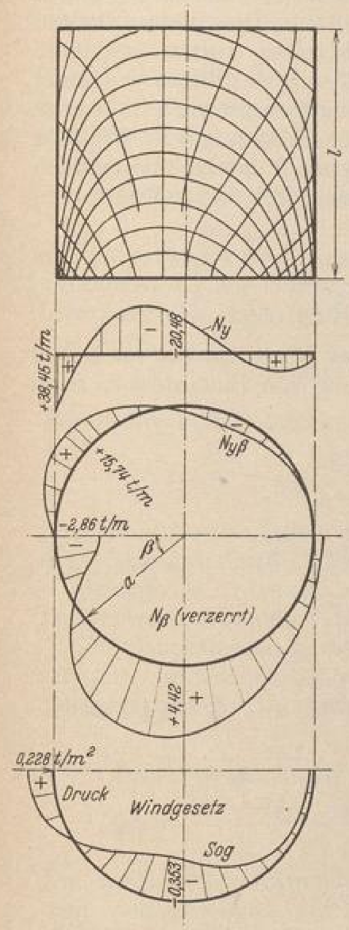

Abb. 795.

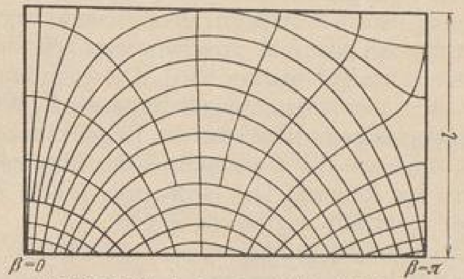

Abb. 796. Trajektorien im abgewickelten Zylindermantel.

d) Der Schalenrand. Ein Längsspannungszustand kann sich auch bei stetiger Krümmung der Mittelfläche, bei stetiger Änderung der Wanddicke und bei stetiger Belastung der Schale nur dann ausbilden, wenn die äußeren Kräfte am Rande in Richtung der Meridiantangente eingetragen werden, ohne daß die Formänderung des Längsspannungszustandes infolge Belastung und Temperaturänderung durch die Stützung oder den biegungssteifen Anschluß anderer Bauteile gestört wird. Diese Bedingungen lassen sich nur bei Schalen mit senkrechter Endtangente erfüllen. Der Meridian wird dabei zum Halbkreis, zur Ellipse, Zykloide, Parabel oder zu einem Korbbogen mit annähernd stetiger Änderung der Krümmung (Abb. 799).

Um Schalen ohne senkrechte Endtangente abzustützen oder senkrechte Lasten in den oberen Rand offener Schalen einzuführen und Schalen in einem Breitenkreis mit unstetiger Krümmung zu verbinden, sind Ringträger notwendig, deren Längskraft an den Unstetigkeitsstellen das Gleichgewicht der inneren Kräfte herstellt. Sie lassen sich auch zur Eintragung von Einzellasten verwenden, die als stetige Funktionen des Winkels β vorgegeben sind. Längskräfte in Ringträgern bei rotationssymmetrischer Belastung (Abb. 770).

Druckring: Zugring:

$$D = -\frac{Q_1}{2\pi} \operatorname{ctg} \alpha_1 , \qquad Z = +\frac{Q_2}{2\pi} \operatorname{ctg} \alpha_2 , \qquad (1161)$$

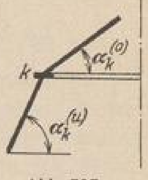

Abb. 797.

Zwischenring k zwischen zwei Meridianabschnitten mit den Tangentenwinkeln $\alpha_k^{(o)}$, $\alpha_k^{(u)}$ (Abb. 797).

$$S_k = -\frac{Q_k}{2\pi} (\operatorname{ctg} \alpha_k^{(u)} - \operatorname{ctg} \alpha_k^{(o)}) . \qquad (1162)$$

Störungen des Längsspannungszustandes werden jedoch hier nur vermieden, wenn