Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

e) Rotationssymmetrische Schalen mit beliebiger Meridiankurve

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

die Ringdehnung ε_β der Schale mit der Dehnung $\bar{\varepsilon}_\beta$ des Ringträgers übereinstimmt, also für $\alpha \to \alpha_2$ (Abb. 798).

$$E\varepsilon_{\beta 2} = \frac{1}{h}(N_{\beta 2} - \mu N_{\alpha 2}) = E\bar{\varepsilon}_{\beta 2} = -\left(\frac{r_2 N_{\alpha 2}\cos\alpha_2}{F_2} + \frac{\mu N_{\alpha 2}\sin\alpha_2}{b_2}\right),$$

$$-\frac{N_{\beta 2}}{N_{\alpha 2}} + \mu = \frac{h}{F_2} r_2 \cos\alpha_2 + \mu\frac{h}{b_2}\sin\alpha_2 . \qquad (1163)$$

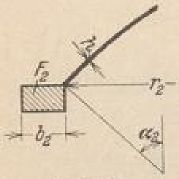
Abb. 798.

Ein Zugringträger kann daher nur unterhalb der Bruchfuge der Schale angeordnet werden ($N_{\beta 2} > 0$), so daß flache Kugel- oder Kegelschalen nach F. Dischinger einen Übergangsbogen zum Ringträger erhalten müssen, in welchem ein Teil des Bogenschubes durch Ringkräfte aufgenommen wird. Diese sind nach (1097) um so größer, je kleiner der Krümmungshalbmesser R_β der Kurve und damit auch die Länge des Übergangsbogens wird. In der Regel nimmt die Krümmung mit dem Winkel α stetig zu, um auch die Wanddicke h der Randzone gegen den Randträger allmählich vergrößern zu können. Die Bedingung (1163) kann dann durch Veränderung von h, F_2 oder α_2 erfüllt werden (s. S. 765).

Der Übergangsbogen leistet auch bei offenen Schalen gute Dienste, wenn an dem oberen Rande das Eigengewicht einer Laterne aufgenommen werden soll. Die Dehnung ε_β der Schale ist nahezu Null, während die Dehnung $\bar{\varepsilon}_\beta$ des Ringträgers sehr groß wird.

e) Rotationssymmetrische Schalen mit beliebiger Meridiankurve. Neben der Kugel-, Kegel- und Zylinderschale werden zur Lösung von Bauaufgaben noch

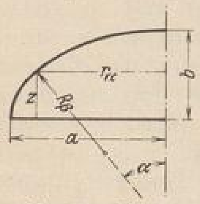
Abb. 799 a. Ellipse.

$$r_\alpha = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - z^2} = \frac{a^2 \sin\alpha}{(a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha)^{1/2}},$$

$$R_\beta = \frac{a^2 b^2}{(a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha)^{3/2}}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{dr_\alpha}{dz} = -\frac{a}{b}\,\frac{z}{\sqrt{b^2 - z^2}},$$

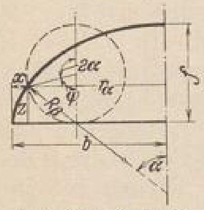
Abb. 799 b. Zykloide.

$$x = \frac{f}{2}(\varphi - \sin\varphi), \qquad z = \frac{f}{2}(1 - \cos\varphi), \qquad 0 \leqq \varphi \leqq 180^\circ,$$

$$b = \frac{\pi f}{2}, \qquad r_\alpha = \frac{f}{2}(2\alpha + \sin 2\alpha), \qquad R_\beta = 2f\cos\alpha,$$

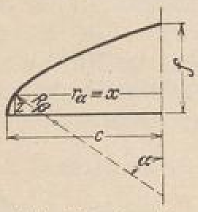
Abb. 799 c. Parabel.

$$x = \frac{2pc - z^2}{2p}, \qquad f = \sqrt{2pc},$$

$$\sin\alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2 + z^2}}, \qquad \cos\alpha = \frac{z}{\sqrt{p^2 + z^2}},$$

$$R_\alpha = \frac{x}{\sin\alpha}, \qquad R_\beta = 2\sqrt{\frac{2}{p}\left(c - x + \frac{p}{2}\right)^3}.$$

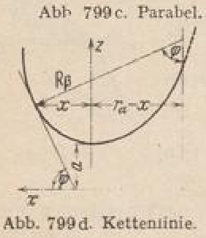
Abb. 799 d. Kettenlinie.

$$z = a\,\mathfrak{Cof}\left(\frac{x}{a}\right), \qquad \sin\varphi = \mathfrak{Tg}\left(\frac{x}{a}\right), \qquad \cos\varphi = \frac{1}{\mathfrak{Cof}\left(\frac{x}{a}\right)},$$

$$R_\alpha = r_\alpha\,\mathfrak{Ctg}\left(\frac{x}{a}\right), \qquad R_\beta = a\,\mathfrak{Cof}^2\left(\frac{x}{a}\right).$$

rotationssymmetrische Schalen mit einer Ellipse, Zykloide, Parabel oder Kettenlinie als Meridiankurve verwendet (Abb. 799). Die analytische Berechnung ihrer Längskräfte bereitet nach S. 745 keine Schwierigkeiten. Dagegen sind zur Untersuchung von Schalen mit beliebiger Meridiankurve noch einige Bemerkungen notwendig, die sich auch zur angenäherten Berechnung von Schalen mit mathematisch definierter Meridianlinie und veränderlicher Wanddicke eignen.

a) Rotationssymmetrische Belastung. Die Schnittkräfte werden aus dem Gleichgewicht der äußeren Kräfte an einem geeigneten Abschnitt des Flächentragwerks berechnet. An dem Schalenteil über einem Breitenschnitt mit dem Halbmesser r_α wirken neben der stetigen Belastung $p = p_x \mp p_z$ die Längskräfte N_α. Die Schubkräfte $N_{\alpha\beta}$ sind Null, da $N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha}$ und diese bei rotationssymmetrischer Belastung wegfallen. Mit Q_α als senkrechter Komponente der resultierenden Belastung und $p_z \sin\alpha - p_y \cos\alpha = p_h$ als waagerechter Komponente der stetigen Belastung p lauten die Gleichgewichtsbedingungen für die Kräfte an den Abschnitten Abb. 767 nach S. 745

$$\left.\begin{aligned} r_\alpha N_\alpha &= -\frac{1}{\sin\alpha}\frac{Q_\alpha}{2\pi}, \\ N_\beta &= -N_\alpha \frac{R_\alpha}{R_\beta} - p_z R_\alpha \\ &= \frac{d}{ds}(r_\alpha N_\alpha \cos\alpha) - p_h r_\alpha . \end{aligned}\right\} \qquad (1164)$$

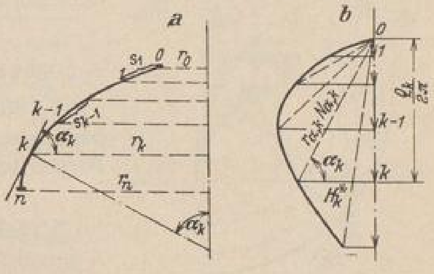

Abb. 800.

Bei senkrechter Belastung ist also

$$N_\beta = -\frac{1}{2\pi}\frac{d\,(Q_\alpha \operatorname{ctg}\alpha)}{ds} \qquad (1165)$$

Die Schnittkräfte lassen sich daher rechnerisch oder zeichnerisch bei jeder Form des Meridianschnittes angeben, wenn dieser mit der Punktfolge $O \ldots k \ldots n$ in n gleichgroße Intervalle s geteilt und der Differentialquotient (1165) durch den Differenzenquotienten (1166) ersetzt wird.

Die Buchstaben α_k bezeichnen die Winkel der Tangenten in den Intervallgrenzen, die Buchstaben r_k den Halbmesser der Breitenschnitte k. Ihnen sind die Kräfte Q_k und der Bogenschub $H_k^* = Q_k/2\pi \cdot \operatorname{ctg}\alpha_k$ zugeordnet.

$$\left.\begin{aligned} r_{\alpha,k} N_{\alpha,k} &= \frac{1}{\sin\alpha_k}\cdot\frac{Q_{\alpha,k}}{2\pi}, \\ N_{\beta,k} &= \frac{H_k^* - H_{k-1}^*}{s_k} - \frac{p_{h,k} + p_{h,(k-1)}}{2}\cdot\frac{r_k + r_{k-1}}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (1166)$$

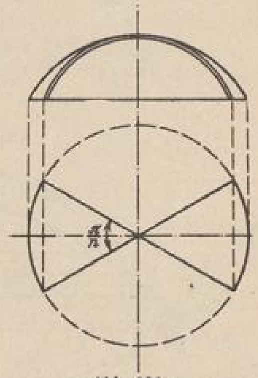
Abb. 801.

Die numerische Anwendung der Rechenvorschrift ist in dem Zahlenbeispiel auf S. 764 enthalten. Die zeichnerische Lösung besteht aus einem Kräfteplan mit $Q_0/2\pi \ldots Q_k/2\pi \ldots Q_n/2\pi$, aus dem zunächst $(r_{\alpha,k} N_{\alpha,k})$, also auch $N_{\alpha,k}$ und $(r_{\alpha,k} N_{\alpha,k} \cos\alpha_k) = H_k^*$ erhalten werden (Abb. 800). Die Ringkräfte $N_{\beta,k}$ wechseln bei senkrechter Belastung $(p_h = 0)$ mit $\Delta H_k^* = H_k^* - H_{k-1}^* = 0$ das Vorzeichen.

b) Windbelastung. Die Belastung $p_w = p_z$ kann nach S. 746 stets als trigonometrische, nach ganzen Vielfachen n von β fortschreitende Reihe entwickelt und damit in Teile zerlegt werden, die zu einer ausgezeichneten Meridianebene ($\beta = 90^0$) symmetrisch oder antimetrisch sind, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist ($p_w = \sum p_{wn}$). Die Spannungen werden für jeden Anteil p_{wn} einzeln berechnet und darauf überlagert. Die Spannungen aus dem Anteil p_{wn} eines Breitenschnittes sind nach S. 746 durch 3 Parameter bestimmt.

Sie ergeben sich aus den drei Gleichgewichtsbedingungen der äußeren Kräfte des doppelten Schalensektors vom Öffnungswinkel π/n (Abb. 801). Er wird durch Ringzonen unterteilt, in denen der Meridian sich angenähert durch gerade Strecken ersetzen läßt und besteht dann aus einzelnen abgestumpften Kreiskegeln.

Sonderfall $n = 1$, $p_z = p_w \sin\alpha \cos\beta$.

Der Normaldruck auf das Flächenteilchen dF beträgt $p_z dF$, seine Komponente in der Windrichtung mit $dF = r_\alpha \, d\beta \, dz/\sin\alpha$

$$dw = p_w r_\alpha \sin\alpha \cos^2\beta \, d\beta \, dz \,. \tag{1167}$$

Für einen vollen Ring mit der Höhe dz ist daher

$$dW = 4 \int_{\beta=0}^{\beta=\pi/2} dw = \pi p_w r_\alpha \sin\alpha \, dz \,,$$

und für einen endlichen Abschnitt Δz

$$\Delta W_k = \pi p_w r_k \sin\alpha_k \, \Delta z_k \,. \tag{1168}$$

Die Kraft wirkt im Abstand a_k vom Breitenkreis r (Abb. 802), so daß sich folgende Gleichgewichtsbedingungen für die äußeren Kräfte oberhalb des Breitenschnittes r aufstellen lassen.

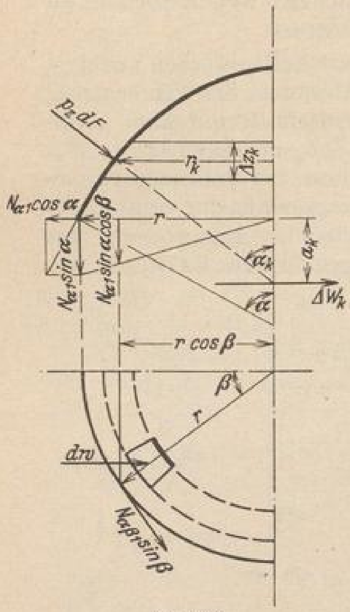

Abb. 802.

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma a_k \Delta W_k + 4 N_{\alpha 1} r^2 \sin\alpha \int_0^{\pi/2} \cos^2\beta \, d\beta = 0 \,, \\ &N_{\alpha 1} = -\frac{\Sigma a_k \Delta W_k}{\pi r^2 \sin\alpha} \,, \qquad N_\alpha = N_{\alpha 1} \cos\beta \,, \end{aligned}\right\} \tag{1169}$$

Gleichgewichtsbedingung (1094)c

$$N_{\beta 1} = -\left(p_w \sin\alpha + \frac{N_{\alpha 1}}{R_\beta}\right) R_\alpha \,, \qquad N_\beta = N_{\beta 1} \cos\beta \,, \tag{1170}$$

und

$$\Sigma \Delta W_k - 4 N_{\alpha 1} r \cos\alpha \int_0^{\pi/2} \cos^2\beta \, d\beta + 4 N_{\alpha\beta 1} r \int_0^{\pi/2} \sin^2\beta \, d\beta = 0 \,.$$

$$N_{\alpha\beta 1} = -\frac{1}{\pi r}\left[\Sigma \Delta W_k + \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{r} \Sigma a_k \Delta W_k\right], \qquad N_{\alpha\beta} = N_{\alpha\beta 1} \sin\beta \,. \tag{1171}$$

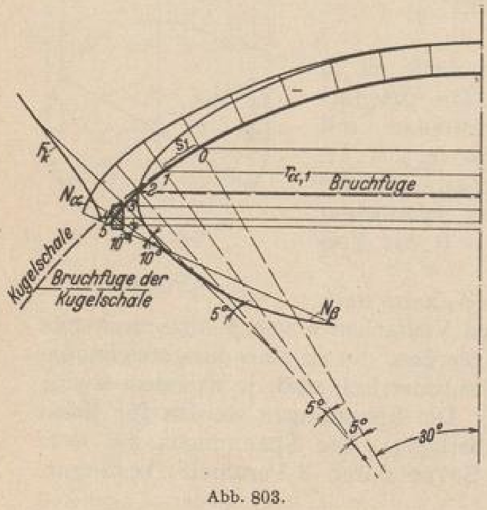

Abb. 803.

Berechnung einer Kugelschale mit Übergangsbogen für Eigengewicht.

Kugelschale: $a = 23{,}75$ m, $g = 0{,}12$ t/m², Schnittkräfte nach (1121). Bei $\alpha = 30^0$ ist

$$N_{\alpha,0} = -1{,}526 \text{ t/m} \,, \qquad N_{\beta,0} = -0{,}94 \text{ t/m} \,.$$

$$\frac{Q_{\alpha,0}}{2\pi} = -N_{\alpha,0} \cdot a \sin^2\alpha = +9{,}06 \text{ t} \,.$$

Der Übergangsbogen beginnt bei $\alpha = 30^0$ und ist geometrisch durch Abb. 803 gegeben. Er wird in Intervalle mit $\Delta\alpha = 5^0$ oder 10^0 eingeteilt. Die Radien der Breitenkreise $r_{\alpha,k}$ für die Intervallgrenze, $r_{\alpha,k'}$ für die Intervallmitte werden der Zeichnung entnommen. Schnittkräfte nach (1166).

$$Q_{\alpha,k} = Q_{\alpha,0} + \Sigma \Delta Q_{\alpha,k} \,,$$

$$\Delta Q_{\alpha\,k} = g \, s_k \, 2\pi \, r_{\alpha,k'} \,,$$

k	α_k^0	s_k m	$r_{\alpha,k'}$ m	$\Delta Q_{\alpha,k}/2\pi$ t	$Q_{\alpha,k}/2\pi$ t	$r_{\alpha,k}$ m	$\sin\alpha_k$	$r_{\alpha,k}\sin\alpha_k$	$N_{\alpha,k}$ t/m	$\operatorname{ctg}\alpha_k$	$\frac{Q_{\alpha,k}\operatorname{ctg}\alpha_k}{2\pi}$	$\frac{\Delta(Q_{\alpha,k}\operatorname{ctg}\alpha_k)}{2\pi}$	$N_{\beta,k}$ t/m
0	30				−9,06	11,88	0,5	5,94	−1,53	1,732	−15,70		(−0,94)
1	35	1,78	12,72	−2,72	−11,78	13,48	0,574	7,73	−1,52	1,428	−16,81	−1,11	−0,62
2	40	1,38	14,03	−2,32	−14,10	14,55	0,643	9,36	−1,51	1,192	−16,82	−0,01	−0,01
3	45	0,86	14,88	−1,54	−15,64	15,19	0,707	10,72	−1,46	1,000	−15,64	−1,18	+1,38
4	55	0,67	15,39	−1,24	−16,88	15,61	0,819	12,76	−1,32	0,700	−11,81	−3,83	+5,72
5	65	0,35	15,69	−0,66	−17,54	15,81	0,906	14,32	−1,23	0,466	−8,19	−3,62	+10,34

Die günstigste Lage und der Querschnitt des Zugringes folgt aus (1163) mit $h = 0{,}05$ m und $h/b \ll 1$.

$$F_k = (0{,}05\, r_{\alpha,k} \cos\alpha_k) : \left(\frac{N_{\beta,k}}{-N_{\alpha,k}} + \mu\right) = \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{N}}.$$

k	$\cos\alpha_k$	$\mathfrak{Z}$	$\frac{N_{\beta,k}}{-N_{\alpha,k}}$	$\mathfrak{N}$	F_k cm²
2	0,766	0,557	−0,005	0,16	34800
3	0,707	0,537	0,95	1,12	4800
4	0,574	0,448	4,34	4,51	995
5	0,423	0,335	8,40	8,57	391

Der Zugring wird bei $\alpha = 45^0$ angeordnet und erhält den Querschnitt 100/50 cm. Abb. 803 zeigt die neue Lage der Bruchfuge im Gegensatz zur Kugelschale.

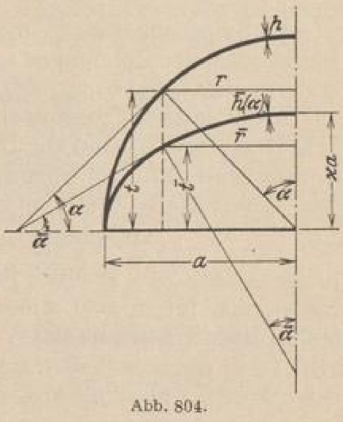

Abb. 804.

f) Schalen mit Massenausgleich. Sind die Schalen mit konstanter Wanddicke h zur Lösung einer Bauaufgabe ungeeignet, so liegt es bei der baulichen Ausbildung eines Querschnitts mit veränderlicher Wanddicke nahe, auf diejenigen elastischen Gebilde (Koordinaten $\bar{R}_\alpha$, $\bar{R}_\beta$, $\bar{\alpha}$ oder $\bar{r}$, $\bar{s}$, $\bar{t}$) zurückzugreifen, die mit einer ausgezeichneten Schale von konstanter Wanddicke (Koordinaten R_α, R_β, α oder r, s, t) geometrisch verwandt sind, und deren Spannungen wiederum im wesentlichen durch Längskräfte hervorgerufen werden.

Die Lösung ist bei rotationssymmetrischen Schalen mit einer Ellipse als Meridianschnitt am einfachsten ($\bar{r}, \bar{t}, \bar{s}, \bar{h}$). Sie wird auf eine Halbkugelschale ($r, s, t, h = \text{const}$) bezogen, die mit ihr in folgender Weise geometrisch verwandt ist (Abb. 804):

$$\bar{r} = r, \qquad \bar{s} = s, \qquad \bar{t} = \varkappa t.$$

$$d\bar{x} = dx, \quad d\bar{y} = dy\sqrt{\cos^2\alpha + \varkappa^2\sin^2\alpha}, \quad d\bar{F} = d\bar{x}\cdot d\bar{y} = dF\sqrt{\cos^2\alpha + \varkappa^2\sin^2\alpha}. \qquad (1172)$$

Wird dann für die Belastung g, $\bar{g}$ der beiden geometrisch verwandten Schalen nachgewiesen, daß $g\,dF = \bar{g}\,d\bar{F}$, so ist auch $N_\beta dy = \bar{N}_\beta d\bar{y}$ und $N_\alpha dx \sin\alpha = \bar{N}_\alpha d\bar{x}\sin\bar{\alpha}$, also

$$\bar{N}_\beta = N_\beta \frac{1}{\sqrt{\cos^2\alpha + \varkappa^2\sin^2\alpha}}, \qquad \bar{N}_\alpha = N_\alpha \frac{dt}{dy}\frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} = N_\alpha \frac{\sqrt{\cos^2\alpha + \varkappa^2\sin^2\alpha}}{\varkappa} \qquad (1173)$$

und für die Spannungen gilt

$$\bar{\sigma}_\alpha = \sigma_\alpha \frac{h}{\bar{h}} \frac{\sqrt{\cos^2\alpha + \varkappa^2\sin^2\alpha}}{\varkappa}, \qquad \bar{\sigma}_\beta = \sigma_\beta \frac{h}{\bar{h}} \frac{1}{\sqrt{\cos^2\alpha + \varkappa^2\sin^2\alpha}}. \qquad (1174)$$

Die Lösung gilt für Eigengewicht bei veränderlicher Wanddicke $\bar{h}$ der geometrisch verwandten Schale, wenn

$$\gamma h\,dF = \gamma\bar{h}\,d\bar{F}, \quad \text{also} \quad \bar{h} = \frac{h}{\sqrt{\cos^2\alpha + \varkappa^2\sin^2\alpha}} \qquad (1175)$$