Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

f) Schalen mit Massenausgleich

k	α_k^0	s_k m	$r_{\alpha,k'}$ m	$\Delta Q_{\alpha,k}/2\pi$ t	$Q_{\alpha,k}/2\pi$ t	$r_{\alpha,k}$ m	$\sin\alpha_k$	$r_{\alpha,k}\sin\alpha_k$	$N_{\alpha,k}$ t/m	$\operatorname{ctg}\alpha_k$	$\frac{Q_{\alpha,k}\operatorname{ctg}\alpha_k}{2\pi}$	$\frac{\Delta(Q_{\alpha,k}\operatorname{ctg}\alpha_k)}{2\pi}$	$N_{\beta,k}$ t/m
0	30				— 9,06	11,88	0,5	5,94	— 1,53	1,732	— 15,70		(— 0,94)
1	35	1,78	12,72	— 2,72	— 11,78	13,48	0,574	7,73	— 1,52	1,428	— 16,81	— 1,11	— 0,62
2	40	1,38	14,03	— 2,32	— 14,10	14,55	0,643	9,36	— 1,51	1,192	— 16,82	— 0,01	— 0,01
3	45	0,86	14,88	— 1,54	— 15,64	15,19	0,707	10,72	— 1,46	1,000	— 15,64	— 1,18	+ 1,38
4	55	0,67	15,39	— 1,24	— 16,88	15,61	0,819	12,76	— 1,32	0,700	— 11,81	— 3,83	+ 5,72
5	65	0,35	15,69	— 0,66	— 17,54	15,81	0,906	14,32	— 1,23	0,466	— 8,19	— 3,62	+ 10,34

Die günstigste Lage und der Querschnitt des Zugringes folgt aus (1163) mit $h = 0{,}05$ m und $h/b \ll 1$.

$$F_k = (0{,}05\, r_{\alpha,k} \cos\alpha_k) : \left(\frac{N_{\beta,k}}{-N_{\alpha,k}} + \mu\right) = \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{N}}.$$

k	$\cos\alpha_k$	$\mathfrak{Z}$	$\frac{N_{\beta,k}}{-N_{\alpha,k}}$	$\mathfrak{N}$	F_k cm²
2	0,766	0,557	— 0,005	0,16	34800
3	0,707	0,537	0,95	1,12	4800
4	0,574	0,448	4,34	4,51	995
5	0,423	0,335	8,40	8,57	391

Der Zugring wird bei $\alpha = 45^0$ angeordnet und erhält den Querschnitt 100/50 cm. Abb. 803 zeigt die neue Lage der Bruchfuge im Gegensatz zur Kugelschale.

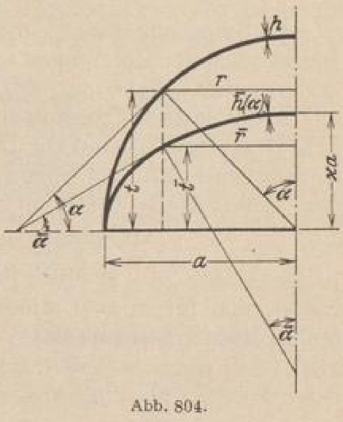

Abb. 804.

f) Schalen mit Massenausgleich. Sind die Schalen mit konstanter Wanddicke h zur Lösung einer Bauaufgabe ungeeignet, so liegt es bei der baulichen Ausbildung eines Querschnitts mit veränderlicher Wanddicke nahe, auf diejenigen elastischen Gebilde (Koordinaten $\bar{R}_\alpha$, $\bar{R}_\beta$, $\bar{\alpha}$ oder $\bar{r}$, $\bar{s}$, $\bar{t}$) zurückzugreifen, die mit einer ausgezeichneten Schale von konstanter Wanddicke (Koordinaten R_α, R_β, α oder r, s, t) geometrisch verwandt sind, und deren Spannungen wiederum im wesentlichen durch Längskräfte hervorgerufen werden.

Die Lösung ist bei rotationssymmetrischen Schalen mit einer Ellipse als Meridianschnitt am einfachsten ($\bar{r}, \bar{t}, \bar{s}, \bar{h}$). Sie wird auf eine Halbkugelschale ($r, s, t, h = \text{const}$) bezogen, die mit ihr in folgender Weise geometrisch verwandt ist (Abb. 804):

$$\bar{r} = r, \qquad \bar{s} = s, \qquad \bar{t} = \varkappa t.$$

$$d\bar{x} = dx, \quad d\bar{y} = dy\sqrt{\cos^2\alpha + \varkappa^2\sin^2\alpha}, \quad d\bar{F} = d\bar{x}\cdot d\bar{y} = dF\sqrt{\cos^2\alpha + \varkappa^2\sin^2\alpha}. \tag{1172}$$

Wird dann für die Belastung g, $\bar{g}$ der beiden geometrisch verwandten Schalen nachgewiesen, daß $g\,dF = \bar{g}\,d\bar{F}$, so ist auch $N_\beta dy = \bar{N}_\beta d\bar{y}$ und $N_\alpha dx \sin\alpha = \bar{N}_\alpha d\bar{x}\sin\bar{\alpha}$, also

$$\bar{N}_\beta = N_\beta \frac{1}{\sqrt{\cos^2\alpha + \varkappa^2\sin^2\alpha}}, \qquad \bar{N}_\alpha = N_\alpha \frac{dt}{dy}\frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} = N_\alpha \frac{\sqrt{\cos^2\alpha + \varkappa^2\sin^2\alpha}}{\varkappa} \tag{1173}$$

und für die Spannungen gilt

$$\bar{\sigma}_\alpha = \sigma_\alpha \frac{h}{\bar{h}} \frac{\sqrt{\cos^2\alpha + \varkappa^2\sin^2\alpha}}{\varkappa}, \qquad \bar{\sigma}_\beta = \sigma_\beta \frac{h}{\bar{h}} \frac{1}{\sqrt{\cos^2\alpha + \varkappa^2\sin^2\alpha}}. \tag{1174}$$

Die Lösung gilt für Eigengewicht bei veränderlicher Wanddicke $\bar{h}$ der geometrisch verwandten Schale, wenn

$$\gamma h\, dF = \gamma \bar{h}\, d\bar{F}, \quad \text{also} \quad \bar{h} = \frac{h}{\sqrt{\cos^2\alpha + \varkappa^2\sin^2\alpha}} \tag{1175}$$

Die Wanddicke $\bar{h}$ stimmt also im Scheitel ($\alpha = 0$) mit der Wanddicke h überein und erreicht am Kämpfer $\alpha = 90^0$ ihren Grenzwert $\bar{h}^* = h/\varkappa$. Die Wanddicke nimmt also bei abgeplatteten Rotationsschalen ($\varkappa < 1$) gegen den Kämpfer zu und bei überhöhten Rotationsschalen ($\varkappa > 1$) ab. In beiden Fällen wird das Eigengewicht allein durch Längsspannungen abgetragen.

Dasselbe gilt auch bei Schneebelastung, da die Bedingung $p_s \cos\alpha\, dF = p_s \cos\bar{\alpha}\, d\bar{F}$ mit $d\bar{y}/dy = d\bar{F}/dF$ erfüllt ist.

Ähnliche Betrachtungen lassen sich auch für abgeplattete oder überhöhte Schalen mit ellipsenförmigem Grundriß wiederholen. Ihre geometrische Verwandtschaft zur Halbkugelschale kann z. B. mit $\bar{r}/r = \lambda$, $\bar{s}/s = 1$, $\bar{t}/t = \varkappa$ beschrieben werden.

81. Biegungssteife rotationssymmetrische Schalen.

Die Spannungen $\sigma_\alpha(z), \sigma_\beta(z)$ usw. sind nach den Bemerkungen auf S. 744 lineare Funktionen der Dehnungen $\varepsilon_{0\alpha} \to \varepsilon_\alpha$, $\varepsilon_{0\beta} \to \varepsilon_\beta$ der Mittelfläche und der Krümmungsänderung $d(1/R_\beta) = \varkappa_\alpha$, $d(1/R_\alpha) = \varkappa_\beta$ ihrer Hauptschnitte. Sie lassen sich daher zu Schnittkräften zusammenfassen, von denen jedoch die Querkräfte $Q_{\beta z}$, die Schnittkräfte $N_{\alpha\beta}$ und die Drillungsmomente $M_{\alpha\beta}$ bei rotationssymmetrischer Belastung Null sind. Der Spannungszustand ist daher in diesem Falle durch die folgenden Schnittkräfte bestimmt:

$$\begin{aligned}&\text{Schnitt } \alpha = \text{const}: && N_\alpha, M_\alpha, Q_{\alpha z} = Q_\alpha,\\ &\text{Schnitt } \beta = \text{const}: && N_\beta, M_\beta, Q_{\beta z} = 0.\end{aligned}$$

Sie werden für $\sigma_z = 0$ und $h \ll R_\beta$ nach dem Hookeschen Gesetz ebenso wie auf S. 747 und S. 645 aus der Verzerrung der Mittelfläche berechnet.

$$\left.\begin{aligned}N_\alpha &= D(\varepsilon_\alpha + \mu\varepsilon_\beta), & N_\beta &= D(\varepsilon_\beta + \mu\varepsilon_\alpha), & D &= \frac{Eh}{1-\mu^2},\\ M_\alpha &= -B(\varkappa_\alpha + \mu\varkappa_\beta), & M_\beta &= -B(\varkappa_\beta + \mu\varkappa_\alpha), & B &= \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}.\end{aligned}\right\} \quad (1176)$$

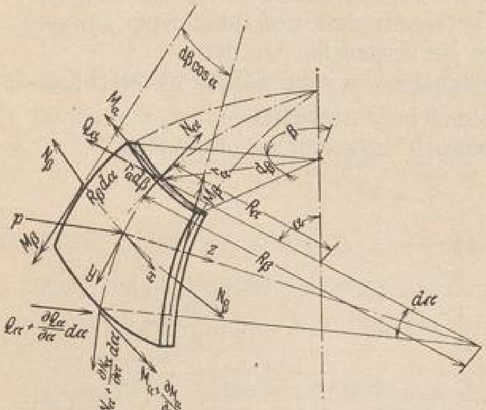

Abb. 805.

Die Verzerrung ($\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \varkappa_\alpha, \varkappa_\beta$) des differentialen Abschnitts der Mittelfläche steht mit den Komponenten v, w des Verschiebungszustandes (Abb. 769) nach S. 747 in folgenden Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_\alpha = \frac{v' - w}{R_\beta}, \qquad \varepsilon_\beta = \frac{v\operatorname{ctg}\alpha - w}{R_\alpha},\\ &\vartheta = \frac{v + w'}{R_\beta},\\ &\varkappa_\alpha = \frac{\vartheta'}{R_\beta}, \qquad \varkappa_\beta = \frac{\vartheta\operatorname{ctg}\alpha}{R_\alpha},\\ &(\,)' = \frac{d(\,)}{d\alpha}.\end{aligned}\right| \quad (1177)$$

Auf diese Weise sind 12 unbekannte Komponenten des Spannungs- und Formänderungszustandes durch 9 Bedingungen miteinander verknüpft. Ihre eindeutige Berechnung gelingt in Verbindung mit den Gleichgewichtsbedingungen für die äußeren Kräfte an einem differentialen Schalenteil, die nach Abb. 805 folgendermaßen lauten:

$$\left.\begin{aligned}&(N_\alpha R_\alpha \sin\alpha)' - N_\beta R_\beta \cos\alpha - Q_\alpha R_\alpha \sin\alpha + p_y R_\alpha R_\beta \sin\alpha = 0,\\ &(Q_\alpha R_\alpha \sin\alpha)' + N_\alpha R_\alpha \sin\alpha + N_\beta R_\beta \sin\alpha + p_z R_\alpha R_\beta \sin\alpha = 0,\\ &(M_\alpha R_\alpha \sin\alpha)' - M_\beta R_\beta \cos\alpha - Q_\alpha R_\alpha R_\beta \sin\alpha = 0.\end{aligned}\right\} \quad (1178)$$