Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

81. Biegungssteife rotationssymmetrische Schalen

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

Die Wanddicke $\bar h$ stimmt also im Scheitel ($\alpha = 0$) mit der Wanddicke h überein und erreicht am Kämpfer $\alpha = 90^0$ ihren Grenzwert $\bar h^* = h/\varkappa$. Die Wanddicke nimmt also bei abgeplatteten Rotationsschalen ($\varkappa < 1$) gegen den Kämpfer zu und bei überhöhten Rotationsschalen ($\varkappa > 1$) ab. In beiden Fällen wird das Eigengewicht allein durch Längsspannungen abgetragen.

Dasselbe gilt auch bei Schneebelastung, da die Bedingung $p_s \cos\alpha\, dF = p_s \cos\bar\alpha\, d\bar F$ mit $d\bar y/dy = d\bar F/dF$ erfüllt ist.

Ähnliche Betrachtungen lassen sich auch für abgeplattete oder überhöhte Schalen mit ellipsenförmigem Grundriß wiederholen. Ihre geometrische Verwandtschaft zur Halbkugelschale kann z. B. mit $\bar r/r = \lambda$, $\bar s/s = 1$, $\bar t/t = \varkappa$ beschrieben werden.

81. Biegungssteife rotationssymmetrische Schalen.

Die Spannungen $\sigma_\alpha(z), \sigma_\beta(z)$ usw. sind nach den Bemerkungen auf S. 744 lineare Funktionen der Dehnungen $\varepsilon_{0\alpha} \to \varepsilon_\alpha$, $\varepsilon_{0\beta} \to \varepsilon_\beta$ der Mittelfläche und der Krümmungsänderung $d(1/R_\beta) = \varkappa_\alpha$, $d(1/R_\alpha) = \varkappa_\beta$ ihrer Hauptschnitte. Sie lassen sich daher zu Schnittkräften zusammenfassen, von denen jedoch die Querkräfte $Q_{\beta z}$, die Schnittkräfte $N_{\alpha\beta}$ und die Drillungsmomente $M_{\alpha\beta}$ bei rotationssymmetrischer Belastung Null sind. Der Spannungszustand ist daher in diesem Falle durch die folgenden Schnittkräfte bestimmt:

$$\text{Schnitt } \alpha = \text{const}: \quad N_\alpha,\ M_\alpha,\ Q_{\alpha z} = Q_\alpha,$$
$$\text{Schnitt } \beta = \text{const}: \quad N_\beta,\ M_\beta,\ Q_{\beta z} = 0.$$

Sie werden für $\sigma_z = 0$ und $h \ll R_\beta$ nach dem Hookeschen Gesetz ebenso wie auf S. 747 und S. 645 aus der Verzerrung der Mittelfläche berechnet.

$$\left.\begin{aligned} N_\alpha &= D(\varepsilon_\alpha + \mu\,\varepsilon_\beta), & N_\beta &= D(\varepsilon_\beta + \mu\,\varepsilon_\alpha), & D &= \frac{E\,h}{1-\mu^2}, \\ M_\alpha &= -B(\varkappa_\alpha + \mu\,\varkappa_\beta), & M_\beta &= -B(\varkappa_\beta + \mu\,\varkappa_\alpha), & B &= \frac{E\,h^3}{12(1-\mu^2)}. \end{aligned}\right\} \quad (1176)$$

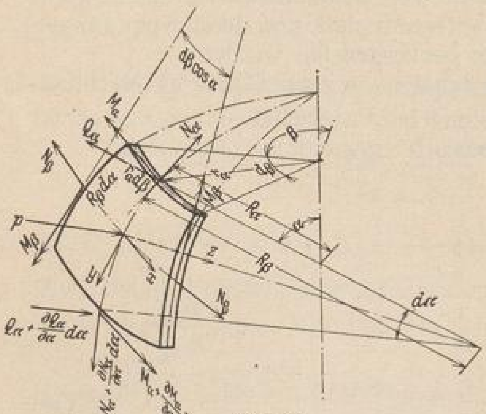

Abb. 805.

Die Verzerrung ($\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \varkappa_\alpha, \varkappa_\beta$) des differentialen Abschnitts der Mittelfläche steht mit den Komponenten v, w des Verschiebungszustandes (Abb. 769) nach S. 747 in folgenden Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_\alpha = \frac{v' - w}{R_\beta}, \qquad \varepsilon_\beta = \frac{v \operatorname{ctg}\alpha - w}{R_\alpha}, \\ &\qquad \vartheta = \frac{v + w'}{R_\beta}, \\ &\varkappa_\alpha = \frac{\vartheta'}{R_\beta}, \qquad \varkappa_\beta = \frac{\vartheta \operatorname{ctg}\alpha}{R_\alpha}, \\ &\qquad (\ )' = \frac{d(\ )}{d\alpha}. \end{aligned}\right| \quad (1177)$$

Auf diese Weise sind 12 unbekannte Komponenten des Spannungs- und Formänderungszustandes durch 9 Bedingungen miteinander verknüpft. Ihre eindeutige Berechnung gelingt in Verbindung mit den Gleichgewichtsbedingungen für die äußeren Kräfte an einem differentialen Schalenteil, die nach Abb. 805 folgendermaßen lauten:

$$\left.\begin{aligned} &(N_\alpha R_\alpha \sin\alpha)' - N_\beta R_\beta \cos\alpha - Q_\alpha R_\alpha \sin\alpha + p_y R_\alpha R_\beta \sin\alpha = 0, \\ &(Q_\alpha R_\alpha \sin\alpha)' + N_\alpha R_\alpha \sin\alpha + N_\beta R_\beta \sin\alpha + p_z R_\alpha R_\beta \sin\alpha = 0, \\ &(M_\alpha R_\alpha \sin\alpha)' - M_\beta R_\beta \cos\alpha - Q_\alpha R_\alpha R_\beta \sin\alpha = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1178)$$

Um diese 12 linearen Gleichungen in mathematischer Beziehung übersichtlich zu lösen, wird die Querkraft Q_α bei der Untersuchung von Schalen mit konstanter Wanddicke h und veränderlichem Halbmesser $R_\alpha(\alpha)$ durch die Unbekannte $V_\alpha = R_\alpha Q_\alpha$ und bei Schalen mit stetig veränderlicher Wanddicke $h(\alpha)$ durch die Unbekannte $U_\alpha = Q_\alpha R_\alpha/h^2$ ersetzt. Die Wurzeln des Ansatzes lassen sich dann durch geeignete Verknüpfung der Gleichungen allmählich ausschließen, so daß zwei simultane Differentialgleichungen zwischen den Unbekannten V oder U und der Verdrehung ϑ der Meridiantangente entstehen, die sich durch gleichartigen Aufbau auszeichnen. Sie lauten in Symbolen

$$\mathfrak{L}(\vartheta) + \vartheta \cdot F_1(\alpha) = -\lambda_1 U, \qquad \mathfrak{L}(U) + U \cdot F_2(\alpha) = \lambda_2 \vartheta + \Phi(\alpha), \quad (1179)$$

Die Buchstaben $\mathfrak{L}(\ )$ bezeichnen Differentialoperationen, die Buchstaben $F_1(\alpha)$, $F_2(\alpha)$ bekannte, mit der Schalenform vorgeschriebene Funktionen. Die Buchstaben λ_1, λ_2 sind konstante Größen, die von den elastischen Eigenschaften des Baustoffs abhängen, während die Funktion $\Phi(\alpha)$ mit der Belastung p_y, p_z der Oberfläche verschwindet.

Die vollständige Lösung J enthält neben der allgemeinen Lösung $\overline{J}$ der homogenen Gleichungen (1179) mit $\Phi(\alpha) = 0$ ein partikuläres Integral J_0 des inhomogenen Ansatzes ($\Phi(\alpha) \neq 0$). Dieses stimmt mit großer Genauigkeit mit der Lösung für den Längsspannungszustand der statisch bestimmt abgestützten Schale (Abschn. 80) überein. Daher wird die vollständige Lösung für die biegungssteife Schale durch die Überlagerung der Schnittkräfte $N_{\alpha,0}, N_{\beta,0}, M_{\alpha,0} = M_{\beta,0} = Q_{\alpha,0} = 0$ aus dem Längsspannungszustand mit den Schnittkräften $\overline{N}_\alpha, \overline{N}_\beta, \overline{M}_\alpha, \overline{M}_\beta, \overline{Q}_\alpha$ aus der Randstörung erhalten.

Die allgemeine Lösung des homogenen Ansatzes enthält vier Integrationskonstanten, so daß neben den statischen oder geometrischen Bedingungen des Längsspannungszustandes noch zwei Bedingungen an jedem Schalenrande vorgeschrieben werden können.

a) Freier Rand $U = 0$, $M_\alpha = 0$.

b) Frei drehbare Lagerung des Schalenrandes $\Delta r_\alpha = 0$, $M_\alpha = 0$.

c) Eingespannter Schalenrand $\Delta r_\alpha = 0$, $\vartheta = 0$.

d) Bei einer Verbindung des Schalenrandes mit anderen Bauteilen sind die gegenseitige Verschiebung δ_1 und die gegenseitige Verdrehung δ_2 der Anschlußflächen Null.

Geckeler, J. W.: Über die Festigkeit achsensymmetrischer Schalen. Forsch.-Arb. Ing.-Wes. Heft 276. Berlin 1926.

a) Die Kugelschale mit gleichbleibender Wandstärke. Die Krümmung der Mittelfläche ist konstant ($R_\alpha = R_\beta = a$). Dasselbe gilt von der Schalendicke h und daher auch von der Dehnungssteifigkeit D und der Biegungssteifigkeit B ($h =$ const, $D =$ const, $B =$ const). Unter diesen Umständen lassen sich durch Verknüpfung von (1177) die allgemeinen Beziehungen zwischen den Komponenten des Verschiebungszustandes der Mittelfläche und der Verzerrung des Schalendifferentials folgendermaßen ergänzen:

$$\vartheta = (\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)\operatorname{ctg}\alpha - \varepsilon'_\beta, \qquad d(\ )/d\alpha = (\ )'. \quad (1180)$$

Die Schnittkräfte unterliegen den Gleichgewichtsbedingungen (1178). Sie lauten für $R_\alpha = R_\beta = a$

$$\left.\begin{aligned} (N_\alpha \sin\alpha)' - N_\beta \cos\alpha - Q_\alpha \sin\alpha + p_y a \sin\alpha &= 0, \\ (Q_\alpha \sin\alpha)' + N_\alpha \sin\alpha + N_\beta \sin\alpha + p_z a \sin\alpha &= 0, \\ M'_\alpha - (M_\beta - M_\alpha)\operatorname{ctg}\alpha - Q_\alpha a &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (1181)$$

Die letzte Bedingung liefert mit (1176), also mit

$$M_\alpha = -\frac{B}{a}(\vartheta' + \mu\,\vartheta \operatorname{ctg}\alpha), \qquad M_\beta = -\frac{B}{a}(\vartheta \operatorname{ctg}\alpha + \mu\,\vartheta'),$$

$$L(\vartheta) - \mu\,\vartheta = \vartheta'' + \vartheta' \operatorname{ctg}\alpha - \vartheta \operatorname{ctg}^2\alpha - \mu\,\vartheta = -\frac{a^2}{B} Q_\alpha. \tag{1182}$$

Aus den anderen beiden Gleichgewichtsbedingungen folgt

$$N_\alpha = -Q_\alpha \operatorname{ctg}\alpha - \frac{aF}{\sin^2\alpha}, \qquad N_\beta = \frac{aF}{\sin^2\alpha} - Q'_\alpha - p_z a$$

mit

$$dF/d\alpha = p_z \sin\alpha\cos\alpha + p_y \sin^2\alpha$$

und daher in Verbindung mit (1176) und (1180)

$$L(Q_\alpha) + \mu\,Q_\alpha = Q''_\alpha + Q'_\alpha \operatorname{ctg}\alpha - Q_\alpha \operatorname{ctg}^2\alpha + \mu Q_\alpha = E h \vartheta - a[p'_z - (1+\mu) p_y]. \tag{1183}$$

Auf diese Weise ist ein System von zwei simultanen Differentialgleichungen zweiter Ordnung entstanden, aus dem jede der beiden Unbekannten durch Wiederholung der Differentialoperation $L(\;)$ mit einer Differentialgleichung vierter Ordnung berechnet werden kann. Die Partikularlösung ϑ_0, $Q_{\alpha 0}$ der vollständigen Gleichung läßt sich nach E. Meißner für die wesentlichen Belastungsfälle angeben. Z. B. wird bei Eigengewicht mit $p_y = g \sin\alpha$, $p_z = g\cos\alpha$ in (1183)

$$-a[p'_z - (1+\mu) p_y] = ag(2+\mu)\sin\alpha.$$

Die simultanen Differentialgleichungen (1182) und (1183) für ϑ_0, $Q_{\alpha 0}$ werden durch den Ansatz $\vartheta_0 = A_1 \sin\alpha$, $Q_{\alpha 0} = A_2 \sin\alpha$ erfüllt, wenn

$$A_1 = -\frac{(2+\mu)\,a^3 g}{(1-\mu^2)[1+12(a/h)^2]B} = \frac{a^2 A_2}{(1+\mu)B}.$$

Damit sind ϑ_0, $Q_{\alpha 0}$ und in Verbindung mit (1176) auch $M_{\alpha 0}$, $M_{\beta 0}$ bestimmt.

$$M_{\alpha 0} = M_{\beta 0} = -\frac{B}{a} A_1 (1+\mu)\cos\alpha.$$

Diese Schnittkräfte sind im Vergleich zu dem Anteil aus den Randstörungen nach S. 770 klein von höherer Ordnung und werden daher vernachlässigt. Mit

$$Q_{\alpha 0} = 0, \qquad M_{\alpha 0} = 0, \qquad M_{\beta 0} = 0$$

stimmt der Spannungszustand der biegungssteifen Schale bei statisch bestimmter Stützung mit dem Längsspannungszustand auf S. 751 überein. Dasselbe gilt damit auch für den Verschiebungszustand. Das Ergebnis wiederholt sich bei den Partikularlösungen für die anderen rotationssymmetrischen Belastungsfälle.

Die Schnittkräfte und Verschiebungen der biegungssteifen Kugelschale lassen sich daher, wie bereits auf S. 767 bemerkt, mit großer Genauigkeit aus zwei voneinander unabhängigen Anteilen zusammensetzen. Der eine besteht aus den Schnittkräften und Verschiebungen des Längsspannungszustandes durch die vorgeschriebene stetige Belastung, der andere aus den Schnittkräften und Verschiebungen der biegungssteifen Schale infolge der Randkräfte $M_{\alpha 2}$, $Q_{\alpha 2}$ usw., die zur Befriedigung der vorgeschriebenen Stützung notwendig sind.

Die Schnittkräfte und Verschiebungen des Längsspannungszustandes sind für die regelmäßigen Belastungsfälle auf S. 751 ff. angeschrieben. Die Schnittkräfte und Verschiebungen der biegungssteifen Kugelschale aus vorgeschriebenen Randkräften werden aus den homogenen Differentialgleichungen (1182), (1183) für $\overline{\vartheta}$ und $\overline{Q}_\alpha$ berechnet.

Das Integral der homogenen Gl. (1182), (1183) kann als Reihenentwicklung angeschrieben werden. Die Lösungen für $\overline{\vartheta}$, $\overline{Q}_\alpha$ und für alle daraus abgeleiteten Schnittkräfte und Verschiebungen klingen vom Rande aus schnell ab. Da jede Ableitung im

Vergleich zu der nächst höheren Ableitung dann klein von zweiter Ordnung ist, können nach einem Vorschlage von J. W. Geckeler die Funktionen $\bar\vartheta$ und $\bar\vartheta'$ gegenüber $\bar\vartheta''$ in (1182) und die Funktionen $\bar Q_\alpha$ und $\bar Q_\alpha'$ gegenüber $\bar Q_\alpha''$ in (1183) vernachlässigt werden, um schnell zu einer übersichtlichen, für technische Aufgaben brauchbaren Näherungslösung zu kommen.

Die Näherungslösung für $\bar\vartheta\,(\alpha)$ und $\bar Q\,(\alpha)$ entsteht also aus den Gleichungen

$$\bar\vartheta'' = -\frac{a^2}{B}\bar Q_\alpha, \qquad \bar Q_\alpha'' = E\,h\,\bar\vartheta. \tag{1184}$$

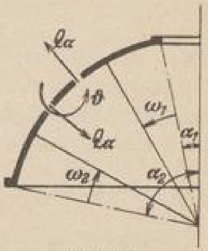

Abb. 806.

Die Elimination von $\bar Q_\alpha$ liefert mit

$$4\,k^4 = \frac{a^2}{B}E\,h = \frac{12(1-\mu^2)a^2}{h^2}, \qquad k = \sqrt{\frac{a}{h}\sqrt{3(1-\mu^2)}}\,, \tag{1185}$$

$$\bar\vartheta_\alpha^{IV} + 4\,k^4\,\bar\vartheta = 0. \tag{1186}$$

Durch Elimination von $\bar\vartheta$ entsteht

$$\bar Q_\alpha^{IV} + 4\,k^4\,\bar Q_\alpha = 0. \tag{1187}$$

Die Gleichungen werden mit dem aus Abschn. 22 bekannten Exponentialansatz gelöst. Da hiernach beide Funktionen $\bar\vartheta$, $\bar Q_\alpha$ ebenso wie alle daraus abgeleiteten Schnittkräfte und Verschiebungen schnell vom Rande aus abklingen, werden sie je nach der Betrachtung der oberen oder unteren Randzone auf den Winkel $\omega_1 = (\alpha - \alpha_1)$, $d\omega_1 = d\alpha$ oder $\omega_2 = (\alpha_2 - \alpha)$, $d\omega_2 = -d\alpha$ als unabhängiger Veränderlicher bezogen (Abb. 806). Daher ist in beiden Fällen

$$\left.\begin{aligned}\bar\vartheta &= e^{-k\omega}(\bar A_1\cos k\,\omega + \bar A_2\sin k\,\omega) + e^{k\omega}(\bar A_3\cos k\,\omega + \bar A_4\sin k\,\omega)\,,\\ \bar Q_\alpha &= e^{-k\omega}(A_1\cos k\,\omega + A_2\sin k\,\omega) + e^{k\omega}(A_3\cos k\,\omega + A_4\sin k\,\omega)\,,\end{aligned}\right\} \tag{1188a}$$

oder nach S. 141 auch

$$\bar Q_\alpha = C_1\,e^{-k\omega}\cos(k\,\omega + \psi_1) + C_2\,e^{k\omega}\cos(k\,\omega + \psi_2)\,. \tag{1188b}$$

Die Integrationskonstanten $\bar A_3$, $\bar A_4$ und A_3, A_4 oder C_2, ψ_2 einer Lösung für die geschlossene Kugelschale mit $\omega_2 = \alpha_2 - \alpha$ als unabhängiger Veränderlicher sind Null, da die Bedingungen $\vartheta = 0$, $Q_\alpha = 0$ im Scheitel nur auf diese Weise erfüllt werden können. Die Funktion $\vartheta\,(\omega)$ und $Q_\alpha\,(\omega)$ verlaufen daher ebenso wie alle abgeleiteten Funktionen der übrigen Schnittkräfte und Verschiebungen nach gedämpften Schwingungen mit dem Winkel $2\,\pi/k$ als Schwingungslänge und π als logarithmischem Dekrement. Sie klingen mit wachsendem ω um so schneller ab, je größer k ist. Der Einfluß der von den Randstörungen des Längsspannungszustandes herrührenden Randkräfte $M_{\alpha 2}$, $Q_{\alpha 2}$ ist daher auf eine schmale Randzone beschränkt. Das Ergebnis läßt sich auch leicht auf Grund des St. Venantschen Prinzips einsehen, da die Randkräfte im Gleichgewicht stehen. Es bestätigt die Richtigkeit der Annahmen für die Näherungslösung, da die zweiten Ableitungen $\bar\vartheta''$, $\bar Q_\alpha''$ den Betrag k^2 als Faktor enthalten, und daher als Glieder des linearen Ansatzes (1182) oder (1183) wesentlich größere Bedeutung besitzen als $\bar\vartheta'$, $\bar\vartheta$ oder $\bar Q_\alpha'$, $\bar Q_\alpha$.

Die Lösung $\bar\vartheta$ und $\bar Q_\alpha$ offener Schalen nach (1187) enthält streng genommen vier Integrationskonstante, die aus vier Bedingungen für die Verschiebungen oder für die Schnittkräfte an den beiden Schalenrändern berechnet werden können. Ist die Schalenzone $(\alpha_2 - \alpha_1)$ jedoch breit, so klingen die von jeder Randbelastung herrührenden Komponenten des Spannungs- und Verschiebungszustandes so weit ab, daß je zwei Integrationskonstante A_1, A_2 und A_3, A_4 oder C_1, ψ_1 und C_2, ψ_2 unabhängig voneinander aus

$$\bar Q_\alpha = e^{-k\omega}(A_1\cos k\,\omega + A_2\sin k\,\omega) \quad\text{und}\quad \bar Q_\alpha = e^{-k\omega}(A_3\cdot\cos k\,\omega + A_4\sin k\,\omega) \tag{1189}$$

angegeben werden können, je nachdem der Breitenunterschied $\omega_2 = \alpha_2 - \alpha$ oder $\omega_1 = \alpha - \alpha_1$ vom unteren oder oberen Rande gerechnet wird.

Rechenvorschrift. Im Bereiche des oberen Randes der offenen Kugelschale ist

$$\overline{Q}_\alpha = C\, e^{-k\omega_1} \cos(k\,\omega_1 + \psi) \tag{1190}$$

im Bereiche des unteren Randes

$$\overline{Q}_\alpha = C\, e^{-k\omega_2} \cos(k\,\omega_2 + \psi)\,. \tag{1191}$$

Die Gleichungen bilden die Grundlage für die Berechnung aller Komponenten des Spannungs- und Formänderungszustandes aus den Gleichgewichtsbedingungen (1181) und den Verträglichkeitsbedingungen (1177). Das obere Vorzeichen gilt in der oberen, das untere in der unteren Randzone der Schale.

$$\left.\begin{aligned}
\overline{N}_\alpha &= -\overline{Q}_\alpha \operatorname{ctg}\alpha = -C\,e^{-k\omega}\cos(k\,\omega+\psi)\operatorname{ctg}\alpha\,,\\
\overline{N}_\beta &= -\overline{Q}'_\alpha = \pm C\,k\sqrt{2}\,e^{-k\omega}\sin\left(k\,\omega+\psi+\frac{\pi}{4}\right),\\
\overline{\vartheta} &= \frac{\overline{Q}''_\alpha}{h\,E} = +C\,\frac{2\,k^2}{h\,E}\,e^{-k\omega}\sin(k\,\omega+\psi)\,,\\
\overline{M}_\alpha &= -\frac{B}{a}\,(\overline{\vartheta}'+\mu\overline{\vartheta}\operatorname{ctg}\alpha) \approx -\frac{B}{a}\,\overline{\vartheta}' = \mp C\,\frac{B}{a\,h\,E}\,2\,k^3\sqrt{2}\,e^{-k\omega}\cos\left(k\,\omega+\psi+\frac{\pi}{4}\right),\\
\overline{M}_\beta &= \mu\,\overline{M}_\alpha - \frac{B\operatorname{ctg}\alpha}{a}\,\overline{\vartheta}\,,\\
\overline{\Delta r} &= r_\alpha\,\overline{\varepsilon}_\beta = \frac{r_\alpha}{h\,E}\,(\overline{N}_\beta - \mu\,\overline{N}_\alpha) = -\frac{r_\alpha}{h\,E}\,(\overline{Q}'_\alpha - \mu\,\overline{Q}_\alpha\operatorname{ctg}\alpha) \approx -\frac{r_\alpha \overline{Q}'_\alpha}{h\,E}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{1192}$$

Die Näherungslösungen für $\overline{M}_\alpha$ und $\overline{\varepsilon}_\beta$ lassen sich ebenso begründen wie die Vernachlässigung von $\overline{Q}_\alpha$ neben $\overline{Q}'_\alpha$ in (1183).

Die Integrationskonstanten C, ψ sind bei starrem Unterbau durch die Stützung der Schale, am oberen Rande durch vorgeschriebene äußere Kräfte bestimmt.

1. Der untere Rand ist unverschieblich, aber frei drehbar gestützt

$$\omega = 0,\ \alpha = \alpha_2{:}\qquad \left.\begin{aligned} \varepsilon_{\beta 2,0} + \overline{\varepsilon}_{\beta 2} &= \varepsilon_{\beta 2} = 0\,,\\ M_{\alpha 2,0} + \overline{M}_{\alpha 2} &= M_{\alpha 2} = 0 = \overline{M}_{\alpha 2}\,,\end{aligned}\right\} \tag{1193}$$

wenn die Dehnungen des Längsspannungszustandes wieder mit $\varepsilon_{\beta,0}$ bezeichnet werden. Die Biegungsmomente $M_{\alpha,0}$ sind Null.

$$\left.\begin{aligned}
M_{\alpha 2} &= C\,\frac{B}{a\,h\,E}\,2\,k^3\sqrt{2}\cos\left(\psi+\frac{\pi}{4}\right) = 0\,, \quad \text{d.h.}\quad \psi = \frac{\pi}{4}\,,\\
\varepsilon_{\beta 2} &= \varepsilon_{\beta 2,0} - C\,\frac{k\sqrt{2}}{h\,E}\sin\left(\psi+\frac{\pi}{4}\right) = 0\,, \quad \text{d.h.}\quad C = \frac{\varepsilon_{\beta 2,0}}{k\sqrt{2}}\,h\,E\,.
\end{aligned}\right| \tag{1194}$$

2. Der untere Rand ist starr eingespannt. $\omega = 0$, $\alpha = \alpha_2$.

$$\left.\begin{aligned}
\vartheta_2 &= \vartheta_{2,0} + C\,\frac{2\,k^2}{h\,E}\sin\psi = 0\,,\\
\varepsilon_{\beta 2} &= \varepsilon_{\beta 2,0} - C\,\frac{k\sqrt{2}}{h\,E}\sin\left(\psi+\frac{\pi}{4}\right) = 0\,,\\
&\text{für}\ \ \vartheta_{2,0}\approx 0\ \ \text{ist}\ \ \psi = 0\ \ \text{und}\ \ C = \frac{\varepsilon_{\beta 2,0}}{k}\,h\,E\,.
\end{aligned}\right| \tag{1195}$$

3. Der obere Rand ist durch einen starren Druckring abgeschlossen. $\omega = 0$, $\alpha = \alpha_1$.

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{\beta 1} &= \varepsilon_{\beta 1,0} + C\,\frac{k\sqrt{2}}{h\,E}\,\sin\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) = 0\,, \\ \vartheta_1 &= \vartheta_{1,0} + C\,\frac{2\,k^2}{h\,E}\,\sin\psi = 0\,, \\ \text{für}\quad \vartheta_{1,0} \approx 0 \quad &\text{ist}\quad \psi = 0 \quad \text{und}\quad C = -\frac{\varepsilon_{\beta 1,0}}{k}\,h\,E\,. \end{aligned}\right\} \tag{1196}$$

Damit sind in Verbindung mit (1192) auch alle Komponenten des Spannungs- und Verschiebungszustandes aus einer Randstörung der statisch bestimmt gestützten Schale bekannt (S. 766). Sie werden mit den zugeordneten Komponenten des Längsspannungszustandes überlagert.

Biegungsspannungen am Rand einer Kugelschale bei Belastung durch Eigengewicht.
(Vgl. Abb. 777, $\alpha_2 = 60^0$.)

1. Der untere Rand ist unverschieblich, aber frei drehbar gestützt. Nach (1123) ist für den Längsspannungszustand

$$\varepsilon_{\beta,0} = \frac{1}{E\,h}\,(N_{\beta,0} - \mu\,N_{\alpha,0}) = \frac{a\,g}{E\,h}\,\frac{1 + \mu - \cos\alpha - \cos^2\alpha}{1 + \cos\alpha} \quad \text{und mit} \quad \mu = \frac{1}{6}\,, \quad \alpha \to \alpha_2$$

$$\varepsilon_{\beta 2,0} = \frac{a\,g}{E\,h}\,\frac{1{,}1667 - 0{,}5 - 0{,}25}{1 + 0{,}5} = 0{,}278\,\frac{a\,g}{E\,h}\,.$$

Für $a/h = 200$ ist nach (1185)

$$k = \sqrt{200\sqrt{3 \cdot 0{,}9722}} = 18{,}49\,,$$

so daß nach (1194)

$$C = a\,g\,\frac{0{,}278}{k\sqrt{2}} = 0{,}01064\,a\,g\,, \qquad \psi = \frac{\pi}{4}\,.$$

Die Schnittkräfte nach (1192) infolge der Randstörung werden nun

$$\overline{N}_\alpha = -0{,}01064\,a\,g\,e^{-k\omega}\cos\left(k\,\omega + \frac{\pi}{4}\right)\operatorname{ctg}\alpha\,,$$

$$\overline{N}_\beta = -0{,}278\,a\,g\,e^{-k\omega}\cos(k\,\omega)\,,$$

$$\overline{M}_\alpha = -0{,}0815\,a\,g\,h\,e^{-k\omega}\sin(k\,\omega)\,,$$

$$\frac{B\operatorname{ctg}\alpha}{a}\,\overline{\vartheta} = 0{,}00311\,a\,g\,h\operatorname{ctg}\alpha\,e^{-k\omega}\sin\left(k\,\omega + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\overline{M}_\beta = \mu\,\overline{M}_\alpha - \frac{B\operatorname{ctg}\alpha}{a}\,\overline{\vartheta}\,.$$

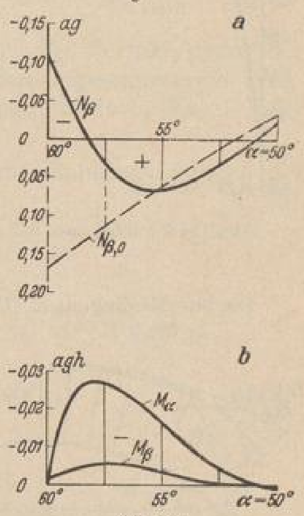

Abb. 807.

Die Längskräfte $\overline{N}_\alpha$ sind gegenüber $N_{\alpha,0}$ aus dem Längsspannungszustand zu vernachlässigen. Die Längskräfte $N_\beta = N_{\beta,0} + \overline{N}_\beta$ sind in Abb. 807a für die Randzone $50^0 < \alpha < 60^0$ dargestellt. Abb. 807b zeigt die Biegungsmomente der Randzone.

2. Der untere Rand ist starr eingespannt.

Für den Längsspannungszustand ist nach (1123) und (1126)

$$\varepsilon_{\beta 2,0} = 0{,}278\,\frac{a\,g}{E\,h}\,, \qquad \vartheta_{2,0} = -\frac{a\,g}{E\,h}\,(2 + \mu)\sin\alpha_2 = -1{,}878\,\frac{a\,g}{E\,h}\,.$$

Die Randbedingungen (1195) lauten dann mit $C = C_1\,a\,g$

$$-1{,}878 + C_1 \cdot 683\sin\psi = 0\,,$$

$$0{,}278 - C_1\,26{,}12\sin\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) = 0\,,$$

oder

$$-49\sin\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) + 190{,}1\sin\psi = 0\,,$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{49}{190{,}1\sqrt{2} - 49} = 0{,}223\,, \qquad \psi = 12^0\,30' = 0{,}2182\,,$$

$$C_1 = \frac{1{,}878}{683\sin\psi} = 0{,}0127\,, \qquad C = 0{,}0127\,a\,g\,.$$

(Für $\vartheta_{2,0} \approx 0$ ist $\psi = 0$, $C \approx 0{,}0151\,a\,g$.)

Die Schnittkräfte nach (1192) infolge der Randstörung werden nun

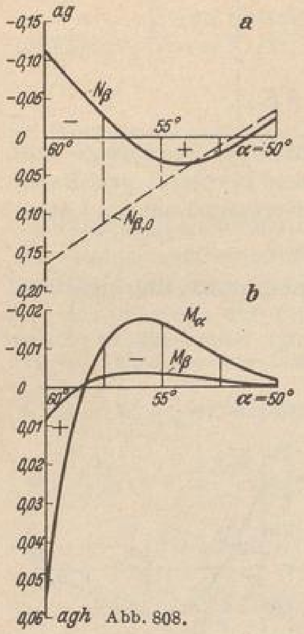

Abb. 808.

$$\overline{N}_\alpha = -0{,}0127\, a\, g\, e^{-k\omega} \cos(k\,\omega + \psi)\, \operatorname{ctg} \alpha\,,$$

$$\overline{N}_\beta = -0{,}332\, a\, g\, e^{-k\omega} \sin\left(k\,\omega + \psi + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\overline{M}_\alpha = 0{,}0973\, a\, g\, h\, e^{-k\omega} \cos\left(k\,\omega + \psi + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\frac{B \operatorname{ctg} \alpha}{a}\, \overline{\vartheta} = 0{,}00372\, a\, g\, h \operatorname{ctg} \alpha\, e^{-k\omega} \sin(k\,\omega + \psi)\,,$$

$$\overline{M}_\beta = \mu\, \overline{M}_\alpha - \frac{B \operatorname{ctg} \alpha}{a}\, \overline{\vartheta}\,.$$

Die Schnittkräfte sind für die Randzone $50^0 < \alpha < 60^0$ in Abb. 808 dargestellt.

Schnittkräfte in einem Stützboden bei Wasserauflast $f = 2a$. (Vgl. Abb. 781, $\alpha_2 = 40^0$.)

Der Rand der Schale ist starr eingespannt.
Nach (1132) ist mit $f = 2a$, $\mu = 1/6$, $\alpha_2 = 40^0$

$$\varepsilon_{\beta 2,0} = -\frac{1}{E\,h}\,\frac{\gamma\, a^2}{6}\left[3\,\frac{f}{a}\,(1-\mu) - 6 \cos \alpha_2 + 2\,(1+\mu)\,\frac{1-\cos^3 \alpha_2}{\sin^2 \alpha_2}\right]$$

$$= -0{,}585\,\frac{\gamma\, a^2}{E\,h}\,,$$

$$\vartheta_{2,0} = \frac{\gamma\, a^2}{E\,h} \sin \alpha_2 = 0{,}643\,\frac{\gamma\, a^2}{E\,h}$$

Aus (1185) folgt mit $a/h = 25$

$$k = \sqrt{25\,\sqrt{3} \cdot 0{,}9722} = 6{,}53\,.$$

Die Randbedingungen (1195) lauten nunmehr mit $C = C_1 \gamma\, a^2$

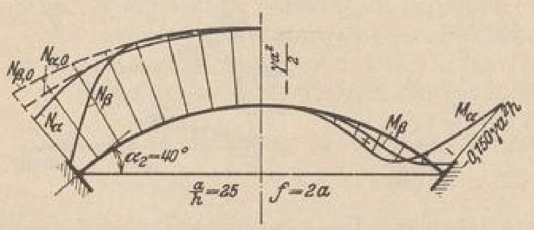

Abb. 809. Schnittkräfte im eingespannten Stützboden.

$$0{,}643 + C_1\, 85{,}3 \sin \psi = 0\,,$$

$$-0{,}585 - C_1\, 9{,}22 \sin\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) = 0\,;$$

oder

$$-5{,}93 \sin\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) + 49{,}9 \sin \psi = 0\,,$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{5{,}93}{49{,}9\,\sqrt{2} - 5{,}93} = 0{,}0917\,,$$

$$\psi = 5^0\, 14' \equiv 0{,}0915\,,$$

$$C_1 = -0{,}0826\,, \qquad C = -0{,}0826\,\gamma\, a^2.$$

(Für $\vartheta_{2,0} \approx 0$ ist $\psi = 0$, $C \approx -0{,}0896\,\gamma\, a^2$.)

Die Schnittkräfte infolge der Randstörung sind nach (1192)

$$\overline{N}_\alpha = 0{,}0826\,\gamma\, a^2\, e^{-k\omega} \cos(k\,\omega + \psi) \operatorname{ctg} \alpha\,,$$

$$\overline{N}_\beta = 0{,}762\,\gamma\, a^2\, e^{-k\omega} \sin\left(k\,\omega + \psi + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\overline{M}_\alpha = -0{,}223\,\gamma\, a^2\, h\, e^{-k\omega} \cos\left(k\,\omega + \psi + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\frac{B \operatorname{ctg} \alpha}{a}\, \overline{\vartheta} = -0{,}0242\,\gamma\, a^2\, h \operatorname{ctg} \alpha\, e^{-k\omega} \sin(k\,\omega + \psi)\,,$$

$$\overline{M}_\beta = \mu\, \overline{M}_\alpha - \frac{B \operatorname{ctg} \alpha}{a}\, \overline{\vartheta}\,.$$

Die Schnittkräfte sind in Abb. 809 dargestellt.

Verbindung einer Kugelschale mit verwandten Tragwerken. Der Spannungszustand eines elastischen Gebildes aus einer Kugelschale mit verwandten Tragwerken erfährt keine Änderung, wenn die Verbindung am Anschluß der Kugelschale durch einen Breitenschnitt gelöst wird und die inneren Kräfte an beiden Ufern als äußere Kräfte zur Belastung hinzutreten. Diese sind rotationssymmetrisch, die Längskraft N_α nach S. 745 aus den Gleichgewichtsbedingungen bekannt, die Querkraft Q_α oder ihre waagerechte Komponente $H = X_1$ und das Anschlußmoment $M_\alpha = X_2$ statisch unbestimmt. Sie lassen sich aus der Bedingung berechnen, daß die gegenseitige Verschiebung δ_1 (positiv im Sinne von X_1) und die gegenseitige Verdrehung δ_2 (positiv im Sinne von X_2) der beiden Ufer des Breitenschnittes Null sein müssen, wenn die Formänderung des vorgegebenen Flächentragwerks mit der Formänderung des Hauptsystems durch die Belastung und die überzähligen Schnittkräfte X_1, X_2 übereinstimmt. Diese wird ebenso wie in Abschn. 24 als virtuelle Arbeit berechnet. Nach Abb. 810 ist

$$1_1\,\delta_1 = 1_1(\delta_{10} + X_1\,\delta_{11} + X_2\,\delta_{12}) = 0\,,$$
$$1_2\,\delta_2 = 1_2(\delta_{20} + X_1\,\delta_{21} + X_2\,\delta_{22}) = 0\,.$$

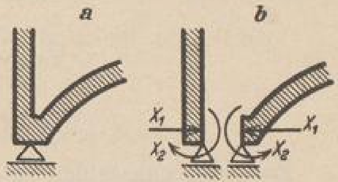

Abb. 810.

Jede Komponente δ_{10}, δ_{11} usw. des Verschiebungszustandes besteht aus zwei Teilen ($\delta_{10} = \delta_{10,1} + \delta_{10,2}$, $\delta_{11} = \delta_{11,1} + \delta_{11,2}$ usw.), von denen $\delta_{10,1}$, $\delta_{11,1}$ usw. durch die Formänderung der Kugelschale, $\delta_{10,2}$, $\delta_{11,2}$ usw. durch die Formänderung des angeschlossenen Tragwerks, also durch die Formänderung torsionssteifer Ringe, Platten, Kegel- oder Zylinderschalen hervorgerufen werden.

Die Vorzahlen $\delta_{11,1}$, $\delta_{12,1}$ werden aus (1192) für die Randbedingungen der Abb. 810 berechnet.

1. Belastungszustand $X_1 = 1$ (Abb. 810).
Randbedingungen:

$$M_{\alpha 2,1} = 0\,, \qquad Q_{\alpha 2,1} = -\sin\alpha_2; \qquad \psi = \frac{\pi}{4}\,, \qquad C = -\sqrt{2}\sin\alpha_2\,.$$

$$\delta_{11,1} = \frac{2\,k\,a}{E\,h}\sin^2\alpha_2\,, \qquad \delta_{21,1} = -\frac{2\,k^2}{E\,h}\sin\alpha_2\,. \tag{1197}$$

Schnittkräfte nach (1192).

$$\left.\begin{aligned}
N_{\alpha,1} &= \sqrt{2}\sin\alpha_2 e^{-k\omega}\cos\left(k\,\omega + \frac{\pi}{4}\right)\operatorname{ctg}\alpha\,,\\
N_{\beta,1} &= 2\,k\sin\alpha_2 e^{-k\omega}\cos(k\,\omega)\,,\\
\vartheta_{\alpha,1} &= -\frac{2\sqrt{2}\,k^2}{h\,E}e^{-k\omega}\sin\alpha_2\sin\left(k\,\omega + \frac{\pi}{4}\right),\\
M_{\alpha,1} &= \frac{k\,h}{\sqrt{3\,(1-\mu^2)}}e^{-k\omega}\sin\alpha_2\sin(k\,\omega)\,,\\
Q_{\alpha,1} &= -\sqrt{2}\,e^{-k\omega}\sin\alpha_2\cos\left(k\,\omega + \frac{\pi}{4}\right),\\
\Delta r_{\alpha,1} &= \frac{2\,k\,a}{E\,h}\sin\alpha_2\,e^{-k\omega}\cos(k\,\omega)\sin\alpha\,.
\end{aligned}\right\} \tag{1198}$$

2. Belastungszustand $X_2 = 1$ (Abb. 810).
Randbedingungen:

$$M_{\alpha 2,2} = -1\,, \qquad Q_{\alpha 2,2} = 0; \qquad \psi = \frac{\pi}{2}\,, \qquad C = \frac{a\,h\,E}{2\,k^3 B}\,.$$

$$\delta_{22,1} = \frac{a}{k\,B}\,, \qquad \delta_{12,1} = -\frac{a^2}{2\,k^2\,B}\sin\alpha_2 = -\frac{2\,k^2}{E\,h}\sin\alpha_2\,. \tag{1199}$$

Schnittkräfte nach (1192).

$$\left.\begin{aligned}
N_{\alpha,2} &= \frac{a\,h\,E}{2\,k^3\,B}\,e^{-k\omega}\sin(k\,\omega)\operatorname{ctg}\alpha\,,\\
N_{\beta,2} &= -\frac{a\,h\,E}{\sqrt{2}\,k^2\,B}\,e^{-k\omega}\cos\left(k\,\omega+\frac{\pi}{4}\right),\\
\vartheta_{\alpha,2} &= \frac{a}{k\,B}\,e^{-k\omega}\cos(k\,\omega)\,,\\
M_{\alpha,2} &= -\sqrt{2}\,e^{-k\omega}\sin\left(k\,\omega+\frac{\pi}{4}\right),\\
Q_{\alpha,2} &= -\frac{a\,h\,E}{2\,k^3\,B}\,e^{-k\omega}\sin(k\,\omega)\,,\\
\Delta r_{\alpha,2} &= -\frac{a^2}{\sqrt{2}\,k^2\,B}\,e^{-k\omega}\sin\alpha\cos\left(k\,\omega+\frac{\pi}{4}\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (1200)$$

Die Belastungszahlen $\delta_{10,1}$, $\delta_{20,1}$ gelten für die nach Abb. 810b abgestützte Kugelschale. Ihr Spannungszustand ist statisch unbestimmt, da die Stützkräfte nicht tangential zur Mittelfläche eingetragen werden. Hierzu ist noch eine Schubkraft $H=-N_\alpha\cos\alpha$ notwendig (vgl. S. 752). Die Belastungszahlen werden daher in die Anteile $\bar\delta_{10,1}$, $\bar\delta_{20,1}$ für die statisch bestimmt gestützte Kugelschale und die Anteile $\delta'_{10,1}$, $\delta'_{20,1}$ für die Kugelschale mit den Randkräften $X_1=H$, $X_2=0$ zerlegt. Die Anteile $\bar\delta_{10,1}$, $\bar\delta_{20,1}$ sind nahezu die gleichen wie beim Membranzustand und daher nach S. 751ff. bekannt. Die Anteile $\delta'_{10,1}$, $\delta'_{20,1}$ sind mit (1197)

$$\delta'_{10,1} = H\,\delta_{11,1}\,, \qquad \delta'_{20,1} = H\,\delta_{21,1}\,. \qquad (1201)$$

Damit lauten die vollständigen Belastungszahlen

$$\delta_{10,1} = \bar\delta_{10,1} + \delta'_{10,1}\,, \qquad \delta_{20,1} = \bar\delta_{20,1} + \delta'_{20,1}\,.$$

Bolle, E.: Festigkeitsberechnung von Kugelschalen. Zürich 1916. — Lichtenstern, E.: Die biegungsfeste Kugelschale mit linear veränderlicher Wandstärke. Z. angew. Math. Mech. 1932 S. 347.

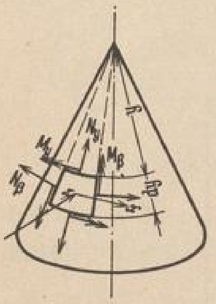

Abb. 811.

b) Die biegungssteife Kegelschale mit gleichbleibender Wandstärke. Der Krümmungshalbmesser R_β ist unendlich, der Winkel α konstant und daher nicht mehr als ortsbestimmende Koordinate geeignet. Er wird durch den Abschnitt y der Mantellinie ersetzt, so daß $ds = R_\beta d\alpha = dy$, $R_\alpha = y\operatorname{ctg}\alpha$. Damit lassen sich die allgemeinen Beziehungen (1176), (1177) zwischen den Komponenten des Spannungs- und Verschiebungszustandes mit $(\ )'$ für $d(\ )/dy$ folgendermaßen anschreiben:

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_\alpha = \varepsilon_y = v'\,, \quad \varepsilon_\beta = \frac{v - w\operatorname{tg}\alpha}{y}\,, \quad \varkappa_\alpha = \varkappa_y = \vartheta'\,,\\
&\varkappa_\beta = \frac{\vartheta}{y}\,, \quad \vartheta = w'\,,
\end{aligned}\right\} \qquad (1202)$$

$$\left.\begin{aligned}
&N_y = D\left(v' + \mu\,\frac{v - w\operatorname{tg}\alpha}{y}\right), \quad N_\beta = D\left(\frac{v - w\operatorname{tg}\alpha}{y} + \mu\,v'\right), \quad D = \frac{h\,E}{1-\mu^2}\,,\\
&M_y = -B\left(\vartheta' + \mu\,\frac{\vartheta}{y}\right), \quad M_\beta = -B\left(\mu\,\vartheta' + \frac{\vartheta}{y}\right), \quad B = \frac{E\,h^3}{12\,(1-\mu^2)}\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (1203)$$

Belastung und Schnittkräfte eines differentialen Schalenabschnitts unterliegen den Gleichgewichtsbedingungen (1178). Sie lauten für die Längskräfte

$$(N_y\,y)' - N_\beta + p_y\,y = 0 \quad \text{und} \quad (Q_y\,y)' + N_\beta\operatorname{tg}\alpha + p_z\,y = 0 \qquad (1204)$$

oder in einer Gleichung zusammengefaßt und integriert

$$(N_y\operatorname{tg}\alpha + Q_y)\,y + \int (p_y\operatorname{tg}\alpha + p_z)\,y\,dy + c = 0\,. \qquad (1205)$$

Dazu tritt

$$(M_y y)' - M_\beta - Q_y y = 0 \quad \text{oder} \quad y M_y' + M_y - M_\beta - Q_y y = 0. \tag{1206}$$

Aus dieser wird mit (1203)

$$y \vartheta'' + \vartheta' - \frac{\vartheta}{y} = -\frac{Q_y y}{B}. \tag{1207}$$

Durch die Verknüpfung der Beziehungen (1202) entsteht

$$(y \varepsilon_\beta)' = \varepsilon_y - \vartheta \operatorname{tg} \alpha. \tag{1208}$$

Die Dehnungen ε_β und ε_y werden aus (1104) berechnet. Hierin ist nach (1204)

$$N_\beta = -(Q_y y)' \operatorname{ctg} \alpha - p_z y \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$N_y = -Q_y \operatorname{ctg} \alpha - \frac{F}{y} \operatorname{ctg} \alpha \quad \text{mit} \quad F(y) = \int (p_y \operatorname{tg} \alpha + p_z) y \, dy + c.$$

Damit N_y für $y = 0$ endlich bleibt, ist die Integrationskonstante c für die geschlossene Kegelschale Null. Auf diese Weise kann aus (1208) die folgende zu (1207) simultane Differentialgleichung entwickelt werden:

$$\left.\begin{aligned} & y (Q_y y)'' + (Q_y y)' - \frac{(Q_y y)}{y} = h E \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \vartheta + \Phi(y) \\ \text{mit} \quad & \Phi(y) = \frac{F(y)}{y} + \mu y p_y \operatorname{tg} \alpha - (p_z y^2)'. \end{aligned}\right\} \tag{1209}$$

Die Lösung ϑ, Q_y besteht aus dem allgemeinen Integral der beiden homogenen Gleichungen (1207) und (1209) und aus einem partikulären Integral der inhomogenen Gleichungen, das sich für Eigengewicht $p_y = g \sin \alpha$, $p_z = g \cos \alpha$ folgendermaßen entwickeln läßt:

$$F(y) = \frac{g y^2}{2 \cos \alpha}, \qquad \Phi(y) = (1 + 2\mu \sin^2 \alpha - 4 \cos^2 \alpha) \frac{g y}{2 \cos \alpha} = g_1 y. \tag{1210}$$

Wird $Q_{y0} = 0$ und $\vartheta_0 = A_1 y$ angenommen, so ergeben

$$A_1 = -\frac{g_1 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{h E}, \qquad \vartheta_0 = -\frac{g_1 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{h E} y \tag{1211}$$

eine partikuläre Lösung von (1207), (1209). Aus dieser folgt mit (1203)

$$Q_{y0} = 0, \qquad M_{y0} = M_{\beta 0} = \frac{g_1 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 - \mu} \cdot \frac{h^2}{12} = \text{const.} \tag{1212}$$

Die Biegungsspannungen einer statisch bestimmt gestützten Kegelschale (Abb. 786) sind also im Vergleich zu dem Anteil aus den Randstörungen nach S. 776 klein von höherer Ordnung. Der Spannungs- und Verschiebungszustand kann daher durch die Angaben auf S. 756ff. für den Längsspannungszustand beschrieben werden. Das gleiche gilt von allen rotationssymmetrischen Belastungsfällen.

Die Integration der homogenen simultanen Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} & y \bar{\vartheta}'' + \bar{\vartheta}' - \frac{\bar{\vartheta}}{y} = -\frac{\bar{Q}_y y}{B}, \qquad y (\bar{Q}_y y)'' + (\bar{Q}_y y)' - \frac{(\bar{Q}_y y)}{y} = h E \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \bar{\vartheta} \\ \text{oder} \quad & \qquad y^2 \bar{Q}_y'' + 3 y \bar{Q}_y' = h E \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \bar{\vartheta} \end{aligned}\right\} \tag{1213}$$

kann nach den Bemerkungen auf S. 769 vereinfacht werden, da die Funktionen $\bar{\vartheta}$, $\bar{\vartheta}'$ und $\bar{Q}_y$, $\bar{Q}_y'$ im Vergleich zu den Ableitungen $\bar{\vartheta}''$ $\bar{Q}_y''$ klein von zweiter Ordnung sind. Der elastische Zusammenhang läßt sich daher mit großer Genauigkeit durch die Gleichungen

$$\bar{\vartheta}'' = -\bar{Q}_y / B, \qquad y^2 \bar{Q}_y'' = h E \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \bar{\vartheta} \tag{1214}$$

beschreiben, so daß entweder $\bar{\vartheta}$ oder $\bar{Q}_y$ eliminiert und aus einer der folgenden Gleichungen berechnet werden kann:

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\vartheta}^{IV} + \frac{h\,E\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}{B\,y^2}\,\bar{\vartheta} = 0\,, \qquad (y^2\bar{Q}_y'')'' + \frac{h\,E\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}{B}\,\bar{Q}_y = 0 \\ \text{oder} \qquad &(y\,\bar{V}'')'' + \frac{h\,E\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}{B\,y}\,\bar{V} = 0 \quad \text{mit} \quad y\,\bar{Q}_y = \bar{V}\,. \end{aligned}\right\} \tag{1215}$$

Die erste Gleichung stimmt bis auf den Beiwert $hE\,\mathrm{tg}^2\,\alpha/B\,y^2 = 4\,k^4 = 4/L^4$ mit (1186) überein. Dieser ist im Vergleich zu (1185) nicht mehr konstant, sondern eine mit y veränderliche, vorgeschriebene Funktion. Da die Integration aus diesem Grunde in der Regel Schwierigkeiten bereitet, zerlegt man den Bereich $l - a$ nach J. W. Geckeler durch Breitenschnitte in Zonen mit annähernd konstantem L und begnügt sich mit dieser Näherungslösung. Dabei kann die Vorzahl $4/L^4$ in den beiden Randzonen mit $y = a$ oder $y = l$ gebildet werden. Die ortsbestimmende Koordinate des Winkels ϑ wird auf den oberen Rand ($s_1 = y - a$, $ds_1 = dy$) oder auf den unteren Rand ($s_2 = l - y$, $ds_2 = -dy$) bezogen, je nachdem die Untersuchung den Spannungen am oberen oder unteren Rande gilt (Abb. 812). Die Gleichungen (1215) lauten also

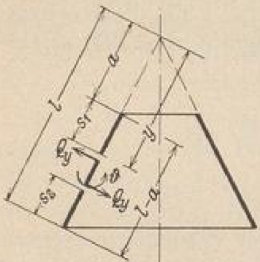
Abb. 812.

$$\frac{d^4\bar{\vartheta}}{d\,s_1^4} + \frac{h\,E\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}{B\,a^2}\,\bar{\vartheta} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d^4\bar{\vartheta}}{d\,s_2^4} + \frac{h\,E\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}{B\,l^2}\,\bar{\vartheta} = 0$$

oder mit

$$\frac{1}{L_1^4} = \frac{3\,(1-\mu^2)}{a^2\,h^2}\,\mathrm{tg}^2\,\alpha \quad \text{und} \quad \frac{1}{L_2^4} = \frac{3\,(1-\mu^2)}{l^2\,h^2}\,\mathrm{tg}^2\,\alpha \tag{1216}$$

allgemein

$$\frac{d^4\bar{\vartheta}}{d\,s^4} + \frac{4}{L^4}\,\bar{\vartheta} = 0 \quad \text{und mit} \quad \frac{s}{L} = \eta \quad \text{auch} \quad \frac{d^4\bar{\vartheta}}{d\,\eta^4} + 4\,\bar{\vartheta} = 0\,. \tag{1217}$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist auf S. 769 erörtert worden. Sie enthält vier Integrationskonstante, von denen bei geschlossener Kegelschale C_2, ψ_2 wiederum Null sind, da die Verdrehung $\bar{\vartheta}$ und die Querkraft $\bar{Q}_y$ aus Symmetriegründen an der Spitze Null sein müssen. Die Lösung der Differentialgleichung lautet dann

$$\bar{\vartheta} = e^{-\eta}(A_1\cos\eta + A_2\sin\eta) \quad \text{oder} \quad \bar{\vartheta} = e^{-\eta}\,C_1\cos(\eta + \psi_1)\,, \quad \eta = s_2/L_2\,. \tag{1218}$$

Die Integrationskonstanten A_1, A_2 oder C_1, ψ_2 sind durch die Randbedingungen bestimmt.

a) Frei drehbare, unverschiebliche Stützung des Randes:

$$\varepsilon_\beta = \varepsilon_{\beta 0} + \bar{\varepsilon}_\beta = 0\,, \quad \vartheta' = \vartheta_0' + \bar{\vartheta}' = 0\,. \tag{1219}$$

b) Starre Einspannung des Randes:

$$\varepsilon_\beta = \varepsilon_{\beta 0} + \bar{\varepsilon}_\beta = 0\,, \quad \vartheta = \vartheta_0 + \bar{\vartheta} = 0\,. \tag{1220}$$

Mit $\bar{\vartheta}$ sind auch die Schnittkräfte aus der statisch unbestimmten Stützung der Kegelschale bekannt (1203).

$$\bar{M}_y = -B\bar{\vartheta}',\ \bar{M}_\beta = -B(\mu\bar{\vartheta}' + \bar{\vartheta}/y),\ \bar{Q}_y = -B\bar{\vartheta}'',\ \bar{N}_y = -\bar{Q}_y\,\mathrm{ctg}\,\alpha,\ \bar{N}_\beta = (\bar{N}_y\,y)'. \tag{1221}$$

Sie klingen um so schneller vom Rande aus ab, je größer η ist, und bilden zusammen mit den Schnittkräften des Längsspannungszustandes aus der Belastung (S. 756 ff.) das endgültige Ergebnis.

$$M_y = \bar{M}_y\,, \quad N_y = N_{y_0} + \bar{N}_y\,, \quad \text{usw.} \tag{1222}$$

Die Gleichung (1218) dient auch zur Berechnung des Spannungs- und Verschiebungszustandes der Kegelschale für eine vorgeschriebene Belastung durch Randkräfte $X_1 = 1$, $X_2 = 1$ (Abb. 813 u. 814). Das Ergebnis wird bei der Berechnung von zusammengesetzten elastischen Tragwerken (Abb. 825 u. 828) verwendet.

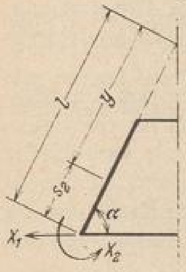

Abb. 813.

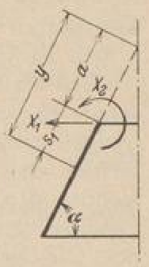

Abb. 814.

a) Unterer Rand (Abb. 813).

Belastung $X_1 = 1$.

$$\left.\begin{aligned} &\delta_{11} = \frac{2\,l^2}{L_2 E h}\cos^2\alpha, \qquad \delta_{21} = -\frac{L_2^2}{2\,B}\sin\alpha, \\ &\bar\vartheta = -\frac{L_2^2}{2\,B}e^{-\eta_2}\sin\alpha(\sin\eta_2 + \cos\eta_2), \\ &\Delta\bar r_z = \frac{2\,y^2\cos^2\alpha}{L_2 E h}e^{-\eta_2}\cos\eta_2, \\ &\bar M_y = L_2 e^{-\eta_2}\sin\alpha\sin\eta_2, \\ &\bar Q_y = e^{-\eta_2}\sin\alpha(\sin\eta_2 - \cos\eta_2). \end{aligned}\right| \qquad (1223)$$

Belastung $X_2 = 1$.

$$\left.\begin{aligned} &\delta_{12} = -\frac{L_2^2}{2\,B}\sin\alpha, \qquad \delta_{22} = \frac{L_2}{B}, \\ &\bar\vartheta = \frac{L_2}{B}e^{-\eta_2}\cos\eta_2, \qquad \Delta\bar r_z = \frac{2\,y^2\cos^2\alpha}{L_2^2 E h\sin\alpha}e^{-\eta_2}(\sin\eta_2 - \cos\eta_2), \\ &\bar M_y = -e^{-\eta_2}(\sin\eta_2 + \cos\eta_2), \qquad \bar Q_y = -\frac{2}{L_2}e^{-\eta_2}\sin\eta_2. \end{aligned}\right\} \qquad (1224)$$

b) Oberer Rand (Abb. 814).

Belastung $X_1 = 1$.

$$\left.\begin{aligned} &\delta_{11} = \frac{2\,a^2}{L_1 E h}\cos^2\alpha, \qquad \delta_{21} = \frac{L_1^2}{2\,B}\sin\alpha, \\ &\bar\vartheta = \frac{L_1^2}{2\,B}e^{-\eta_1}\sin\alpha(\sin\eta_1 + \cos\eta_1), \qquad \Delta\bar r_z = \frac{2\,y^2\cos^2\alpha}{L_1 E h}e^{-\eta_1}\cos\eta_1, \\ &\bar M_y = L_1 e^{-\eta_1}\sin\alpha\sin\eta_1, \qquad \bar Q_y = -e^{-\eta_1}\sin\alpha(\sin\eta_1 - \cos\eta_1). \end{aligned}\right\} \qquad (1225)$$

Belastung $X_2 = 1$.

$$\left.\begin{aligned} &\delta_{12} = \frac{L_1^2}{2\,B}\sin\alpha, \qquad \delta_{22} = \frac{L_1}{B}, \\ &\bar\vartheta = \frac{L_1}{B}e^{-\eta_1}\cos\eta_1, \qquad \Delta\bar r_z = -\frac{2\,y^2\cos^2\alpha}{L_1^2 E h\sin\alpha}e^{-\eta_1}(\sin\eta_1 - \cos\eta_1), \\ &\bar M_y = e^{-\eta_1}(\sin\eta_1 + \cos\eta_1), \qquad \bar Q_y = -\frac{2}{L_1}e^{-\eta_1}\sin\eta_1. \end{aligned}\right\} \qquad (1226)$$

Werden die Randkräfte X_1, X_2, mit einem anderen Richtungssinn als in Abb. 813 und 814 festgelegt, verwendet, so sind die Vorzeichen in (1223) bis (1226) entsprechend abzuändern. Für die Belastungszahlen gelten die Bemerkungen auf S. 774. (Vgl. auch die Beispiele auf S. 786ff.)

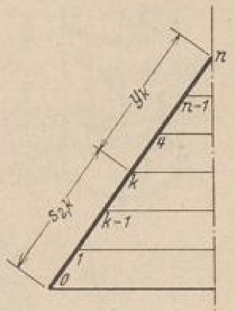

Abb. 815.

Um die Näherungslösung (1218) mit konstantem L nach S. 776 zu verbessern, wird die Gleichung (1217) schrittweise für schmale, etwa 0,5 m breite Zonen $k-1$, k und Mittelwerte $1/L_k$ usw. aus den Abmessungen der Zonen angeschrieben. Zur Berechnung der Integrationskonstanten der Gleichung für die Randzone 1 dienen die Stützenbedingungen. Die Gleichung (1218) liefert die Randbedingungen für die Lösung der zweiten Zone. Die einzelnen Schritte der Rechenvorschrift sind also voneinander unabhängig, so daß keine mathematischen Schwierigkeiten entstehen.

Die allgemeine Lösung (1188b) der Differentialgleichung für die offene Kegelschale mit den Breitenkreisen r_1, r_2 enthält vier Integrationskonstante C_1, ψ_1 und C_2, ψ_2, die aus den vier Bedingungsgleichungen für den Verschiebungs- und Spannungszustand an den beiden Rändern bestimmt werden müssen. Da jedoch die Wirkung aus den Randstörungen schnell abklingt, genügt bei offenen Kegelschalen mit $5r_1 < r_2$ eine Näherungslösung, bei welcher die Integrationskonstanten C_1, ψ_1 zunächst ebenso wie bei der geschlossenen Kegelschale für $C_2 = 0$, $\psi_2 = 0$ bestimmt werden, um sie bei der Berechnung der Integrationskonstanten C_2, ψ_2 aus der vollständigen Lösung mit den Bedingungen am Rande $y = a$ zu verwenden.

Um die elastischen Eigenschaften der Kegelschale mit denjenigen der Zylinderschale zu vergleichen, können die allgemeinen Differentialgleichungen für die Spannungen und Verschiebungen auf S. 774 nach F. Kann auch dadurch vereinfacht werden, daß die Biegungssteifigkeit der Schale im Breitenschnitt, die Querzusammenziehung des Baustoffs und die Verschiebung v des Breitenschnittes in Richtung der y-Achse vernachlässigt werden ($M_\beta = 0$, $\mu = 0$, $v = 0$). In diesem Falle folgt aus den Gleichgewichtsbedingungen auf S. 774

$$\left.\begin{aligned} &(M_y y)'' = (Q_y y)' = -N_\beta \operatorname{tg}\alpha - p_z y \quad \text{und mit} \quad N_\beta = -D\frac{w}{y}\operatorname{tg}\alpha \\ &B\,(y\,w'')'' + w\frac{D\operatorname{tg}^2\alpha}{y} - p_z y = 0\,. \end{aligned}\right\} \quad (1227)$$

Diese Differentialgleichung der Biegelinie des Meridians zerfällt nach H. Reißner in zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die mit Zylinderfunktionen integriert werden können.

Um die mathematischen Schwierigkeiten bei der Integration der Differentialgleichungen (1207) und (1209) zu umgehen, können die Ableitungen der Funktionen ϑ, Q_y, $y^2 Q_y''$ in den Differentialgleichungen (1213) und in den Differentialbeziehungen (1221) der Schnittkräfte nach S. 130 durch Differenzenquotienten ersetzt werden, so daß fünfgliedrige Differenzengleichungen entstehen. Diese werden für die Intervallgrenzen einer Aufteilung des Integrationsbereichs $l - a$ in Strecken Δy angeschrieben und bilden zusammen mit den Randbedingungen in den Breitenschnitten $y = a$ und $y = l$ einen vollständigen Ansatz zur eindeutigen Berechnung der Unbekannten. Die Rechenvorschrift dient auf S. 789 zur Untersuchung des Spannungszustandes einer Zylinderschale mit veränderlicher Wanddicke.

Dubois, F.: Über die Festigkeit der Kegelschale. Diss. Zürich 1917. — Honegger, E.: Festigkeitsberechnung von Kegelschalen mit linear veränderlicher Wandstärke. Luzern 1919. — Kann, F.: Kegelförmige Behälterböden, Dächer und Silotrichter. Forscherarb. Eisenbeton Heft 29. Berlin 1921.

c) Die Zylinderschale. Grundlagen der Lösung. Die allgemeinen Beziehungen (1177) zwischen Verzerrung und Verschiebung der Mittelfläche werden durch die geometrischen Eigenschaften der Zylinderschale $R_\beta = \infty$, $R_\beta d\alpha = dy$, $\alpha = 90^0$, $\operatorname{ctg}\alpha = 0$, $R_\alpha = a = \text{const}$ vereinfacht. Mit der Abkürzung $(\ )'$ für $d(\ )/dy$ ist nach (1177)

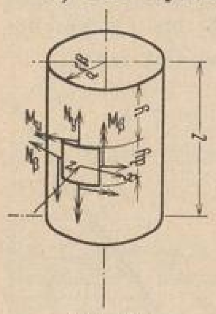

Abb. 816.

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_\alpha = \varepsilon_y = v', \quad \varepsilon_\beta = -\frac{w}{a}, \quad \varkappa_\alpha = \varkappa_y = \vartheta', \quad \varkappa_\beta = 0, \\ &\vartheta = w' = -a\left(\frac{N_\beta - \mu N_y}{E h}\right)', \end{aligned}\right\} \quad (1228)$$

so daß die Schnittkräfte nach dem Hookeschen Gesetz (1176) folgendermaßen angeschrieben werden können:

$$\left.\begin{aligned} &N_y = D\left(v' - \mu\frac{w}{a}\right), \ N_\beta = D\left(-\frac{w}{a} + \mu v'\right), M_y = -B\vartheta', M_\beta = -\mu B\vartheta', \\ &D = \frac{E h}{1 - \mu^2}, \quad B = \frac{E h^3}{12(1 - \mu^2)}\,. \end{aligned}\right\} \quad (1229)$$

Sie unterliegen den Gleichgewichtsbedingungen (1178)

$$N_y' + p_y = 0\,, \qquad Q_y' + \frac{N_\beta}{a} + p_z = 0\,, \qquad M_y' - Q_y = 0\,. \tag{1230}$$

Lösung für unveränderliche Wandstärke h. Die Steifigkeit D der Schale gegen Dehnung und ihre Steifigkeit B gegen Biegung sind konstant. In diesem Falle liefert die dritte Gleichgewichtsbedingung (1230) und die Zusammenfassung der ersten beiden Gleichgewichtsbedingungen in Verbindung mit (1228) und (1229) zwei simultane totale Differentialgleichungen.

$$\vartheta'' = -\frac{Q_y}{B}\,, \qquad Q_y'' = \frac{D(1-\mu^2)}{a^2}\,\vartheta - p_z' + \frac{\mu}{a}\,p_y\,. \tag{1231}$$

Durch die Elimination der einen Unbekannten entsteht die Differentialgleichung für die andere.

$$\left.\begin{aligned} &\vartheta^{IV} + \frac{4}{L^4}\,\vartheta = \frac{1}{B}\left(p_z' - \frac{\mu}{a}\,p_y\right), \qquad Q_y^{IV} + \frac{4}{L^4}\,Q_y = -\left(p_z' - \frac{\mu}{a}\,p_y\right)'', \\ &\qquad\qquad \frac{1}{L^4} = \frac{3\,(1-\mu^2)}{h^2\cdot a^2}\,. \end{aligned}\right\} \tag{1232}$$

Die Verknüpfung von $M_y'' = Q_y'$ mit den übrigen Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen liefert die Differentialgleichung der Biegelinie des Meridians

$$w^{IV} + \frac{4}{L^4}\,w = \frac{1}{B}\left(p_z + \mu\,\frac{N_y}{a}\right), \qquad N_y = -\int p_y\,dy + C\,. \tag{1233}$$

Die vollständige Lösung der Differentialgleichungen für Q_y oder w besteht aus einem von der Belastung p_y, p_z abhängigen partikulären Integral Q_{y0}, w_0 der inhomogenen Gleichung und aus der allgemeinen Lösung $\overline{Q}_y$, $\overline{w}$ der homogenen Gleichung mit vier Integrationskonstanten.

$$Q_y = Q_{y0} + \overline{Q}_y \qquad w = w_0 + \overline{w}\,. \tag{1234}$$

Flüssigkeitsfüllung:

$$p_y = 0\,, \quad N_y = 0\,, \quad p_z = -\gamma y\,, \quad Q_{y0} = 0\,, \quad w_0 = -\frac{L^4}{4B}\,\gamma y = -\frac{a^2}{Eh}\,\gamma y\,. \tag{1235}$$

Füllgut im Sinne von S. 14:

$$\left.\begin{aligned} &p_y = 0\,, \quad N_y = 0\,, \quad p_z = -p_{s,\max}(1 - e^{-y/y_0})\,, \quad Q_{y0} = \frac{p_{s,\max}\,y_0}{1 + 4\left(\frac{y_0}{L}\right)^4}\,e^{-y/y_0}\,, \\ &\qquad w_0 = -p_{s,\max}\left[\frac{a^2}{Eh} - \frac{1}{B}\,\frac{y_0^4}{1 + 4\left(\frac{y_0}{L}\right)^4}\,e^{-y/y_0}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{1236}$$

Die homogenen Differentialgleichungen

$$\frac{d^4\overline{Q}_y}{d\,(y/L)^4} + 4\,\overline{Q}_y = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d^4\overline{w}}{d\,(y/L)^4} + 4\,\overline{w} = 0 \tag{1237}$$

sind auf S. 769 gelöst worden. Das Ergebnis $\overline{Q}_y$, $\overline{w}$ unterscheidet sich allein durch die Bedeutung der Integrationskonstanten. Sind diese aus den Randbedingungen bestimmt worden, so lassen sich alle Komponenten des Spannungs- und Verschiebungszustandes anschreiben. Aus $Q_y(y)$ wird

$$\left.\begin{aligned} N_y &= -\int p_y\,dy + C\,, & E\,h\,w &= a^2\,(Q_y' + p_z) + \mu\,a\,N_y\,, \\ N_\beta &= -a\,(Q_y' + p_z)\,, & E\,h\,\vartheta &= a^2\,(Q_y'' + p_z') - \mu\,a\,p_y\,. \end{aligned}\right\} \tag{1238}$$

Aus $w(y)$ folgt

$$\left.\begin{aligned} &N_y = -\int p_y\,dy + C\,, \quad N_\beta = -E\,h\,\frac{w}{a} + \mu\,N_y\,, \quad \vartheta = w'\,, \\ &M_y = -B\,w''\,, \quad M_\beta = -\mu\,B\,w''\,, \quad Q_y = -B\,w'''\,. \end{aligned}\right\} \tag{1239}$$

Die Untersuchung wird daher auf die Ableitung des Spannungszustandes aus den Verschiebungen w beschränkt. Nach Abb. 816 ist mit (1237)

$$\frac{L^4}{l^4}\,\frac{d^4\overline{w}}{d(y/l)^4}+4\,\overline{w}=0 \quad\text{oder}\quad \frac{d^4\overline{w}}{d(\lambda\,\eta)^4}+4\,\overline{w}=0\,,\quad \lambda=\frac{l}{L}\,,\quad \eta=\frac{y}{l}\cdot \tag{1240}$$

Der Buchstabe L bezeichnet eine für jede Zylinderschale charakteristische Länge, welche von den Abmessungen des Breitenschnittes und von den elastischen Eigenschaften des Baustoffs abhängt. Sie beträgt bei Verwendung von Eisenbeton mit $\mu=1/6$

$$L=a:\sqrt{\frac{a}{h}\sqrt{3\,(1-\mu^2)}}=a:1{,}31\sqrt{\frac{a}{h}}\cdot \tag{1241}$$

$l/L=\lambda$ ist eine Schalenkonstante, $y/l=\eta$ die unbenannte, ortsbestimmende Koordinate. Nach S. 769 ist

$$\overline{w}=C_1\,e^{-\lambda\eta}\cos\lambda\,\eta+C_2\,e^{-\lambda\eta}\sin\lambda\,\eta+C_3\,e^{\lambda\eta}\cos\lambda\,\eta+C_4\,e^{\lambda\eta}\sin\lambda\,\eta \tag{1242}$$

und mit $\qquad C_1=A_1\cos\gamma_1\,,\qquad C_2=-A_1\sin\gamma_1\quad$ usw.

auch $\qquad \overline{w}=A_1\,e^{-\lambda\eta}\cos(\lambda\eta+\gamma_1)+A_2\,e^{+\lambda\eta}\cos(\lambda\eta+\gamma_2)\,.$

Der abklingende Anteil der Funktion allein ist eine periodisch gedämpfte Schwingung. Die halbe Wellenlänge ist $l_0=\pi l/\lambda=\pi L$, das logarithmische Dekrement π, so daß die Amplituden der Funktion $\overline{w}$ und aller ihrer Ableitungen mit jeder halben Welle auf 1/23,14 des vorhergehenden Ausschlags zurückgehen. Sie klingen also um so schneller ab, je größer λ oder je kleiner L ist. Aus diesem Grunde gelten Schalen mit $l>7L$ als unendlich lang nach einer Richtung. Bei diesen sind die Integrationskonstanten C_3, C_4 oder A_2, γ_2 Null, damit die Wirkung der Randkräfte in $\eta=0$ für $\eta=\infty$ verschwindet.

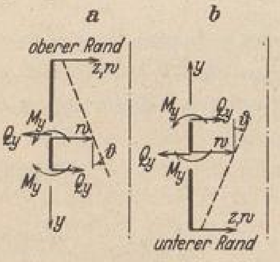

Abb. 817.

Die allgemeine Rechenvorschrift zerfällt daher bei hohen Zylinderschalen mit $l>7L$ in zwei Teillösungen für den unendlich langen Zylinder, bei welchen η sowohl für w_0 wie für $\overline{w}$ entweder vom oberen oder unteren Rande gerechnet wird (Abb. 817). In beiden Fällen ist nach (1242)

$$\left.\begin{aligned}
\overline{w} &= e^{-\lambda\eta}\,(C_1\cos\lambda\eta+C_2\sin\lambda\eta)\ \text{und mit}\ dw/d(\lambda\eta)=\overline{w}^{\cdot}\ \text{usw.}\\
\overline{w}^{\cdot} &= -e^{-\lambda\eta}\,[C_1\,(\sin\lambda\eta+\cos\lambda\eta)+C_2\,(\sin\lambda\eta-\cos\lambda\eta)]\,,\\
\overline{w}^{\cdot\cdot} &= 2\,e^{-\lambda\eta}\,(C_1\sin\lambda\eta-C_2\cos\lambda\eta)\,,\\
\overline{w}^{\cdot\cdot\cdot} &= -2\,e^{-\lambda\eta}\,[C_1\,(\sin\lambda\eta-\cos\lambda\eta)-C_2\,(\sin\lambda\eta+\cos\lambda\eta)]\,,
\end{aligned}\right\} \tag{1243}$$

$$\left.\begin{aligned}
N_\beta &= -\frac{E\,h}{a}\,(w_0+\overline{w})+\mu\,N_y\,, && w'=w_0'+\frac{\overline{w}^{\cdot}}{L}\,,\\
M_y &= -B\,w''=-B\left(w_0''+\frac{\overline{w}^{\cdot\cdot}}{L^2}\right), && Q_y=-B\,w'''=-B\left(w_0'''+\frac{\overline{w}^{\cdot\cdot\cdot}}{L^3}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{1244}$$

Das Ergebnis (1244) gilt selbstverständlich auch für die vollständige Lösung $\overline{w}$ (1242) der homogenen Differentialgleichung. Es bedeutet mechanisch die Überlagerung der Verschiebungen w_0 und der Schnittkräfte N_{y0}, $N_{\beta 0}$ der statisch bestimmt gestützten Schale aus der vorgeschriebenen Belastung p_y, p_z mit den Anteilen $\overline{w}$, $\overline{M}_y$, $\overline{M}_\beta$ aus den Biegungsmomenten und Querkräften (X_1 bis X_4), welche durch Randstörungen, also durch statisch unbestimmten Anschluß der Schale, unverschiebliche Lagerung und Einspannung des Schalenrandes hervorgerufen werden. Sind die Randkräfte bekannt, so läßt sich der Verschiebungs- und Spannungszustand der Schale nach der folgenden Rechenvorschrift anschreiben:

$$w = w_0 + \sum X_i w_i, \qquad N_\beta = N_{\beta 0} + \sum X_i N_{\beta i}, \qquad (i = 1, \ldots, 4). \tag{1245}$$

Die Komponenten w_0, $N_{\beta 0}$ aus der Belastung der statisch bestimmt gestützten biegungssteifen Schale stimmen ebenso wie bei der Kugel- und Kegelschale nahezu mit den Schnittkräften und Verschiebungen des Längsspannungszustandes überein und sind in einzelnen Belastungsfällen mit diesen identisch. Daher können die Komponenten w_0, $N_{\beta 0}$ nach den Angaben in Abschn. 80 eingesetzt werden. Die Schnittkräfte $N_{\beta i}$, $M_{y i}$ und die Verschiebungen w_i der biegungssteifen Schale werden für $X_i = 1$ aus den homogenen Gleichungen (1237) berechnet. Dabei sind die übrigen Randkräfte Null. Die Integrationskonstanten werden dabei allerdings in der Regel für die Randbedingungen eines nach einer Richtung unendlich langen Zylinders angegeben, zumal diese Lösung bereits aus Abschn. 22 bekannt ist.

Lösung für $X_1 = 1$ (Abb. 818a):

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= \frac{2a^2}{L E h} e^{-\lambda\eta} \cos\lambda\eta, & \vartheta_1 &= -\frac{2a^2}{L^2 E h} e^{-\lambda\eta} (\sin\lambda\eta + \cos\lambda\eta), \\ N_{\beta 1} &= -\frac{2a}{L} e^{-\lambda\eta} \cos\lambda\eta, & M_{y1} &= -L\, e^{-\lambda\eta} \sin\lambda\eta, \\ & & Q_{y1} &= e^{-\lambda\eta} (\sin\lambda\eta - \cos\lambda\eta). \end{aligned}\right\} \tag{1246}$$

Lösung für $X_2 = 1$ (Abb. 818b):

$$\left.\begin{aligned} w_2 &= -\frac{2a^2}{L^2 E h} e^{-\lambda\eta} (\cos\lambda\eta - \sin\lambda\eta), & \vartheta_2 &= \frac{4a^2}{L^3 E h} e^{-\lambda\eta} \cos\lambda\eta, \\ N_{\beta 2} &= \frac{2a}{L^2} e^{-\lambda\eta} (\cos\lambda\eta - \sin\lambda\eta), & M_{y2} &= e^{-\lambda\eta}(\sin\lambda\eta + \cos\lambda\eta), \\ Q_{y2} &= -\frac{2}{L} e^{-\lambda\eta} \sin\lambda\eta. \end{aligned}\right\} \tag{1247}$$

Die Anschlußkräfte $X_i (i = 1 \ldots 4)$ sind durch die geometrischen oder statischen Bedingungen aus der vorgeschriebenen Abstützung $\delta_i (i = 1 \ldots 4)$ der beiden Schalenränder a, b oder durch ihre Verbindung mit benachbarten Bauteilen (Platte, Kegelschale, Kugelschale) bestimmt. Die Buchstaben δ_i bedeuten dann die gegenseitige Verschiebung der Ränder oder die gegenseitige Verdrehung der Endtangenten der benachbarten rotationssymmetrischen Flächen ($\delta_i = \delta_{i,1} + \delta_{i,2}$, vgl. S. 773). Auch hierbei wird in der Regel mit dem einseitig unendlich langen Zylinder gerechnet, um die Aufgabe zu vereinfachen. Nach (1246) und (1247) ist

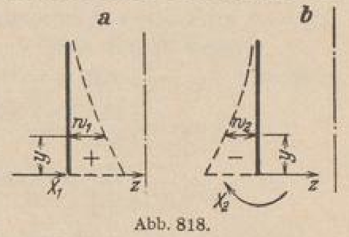

Abb. 818.

$$\delta_{11,2} = \frac{2a^2}{L E h}, \qquad \delta_{12,2} = \delta_{21,2} = -\frac{2a^2}{L^2 E h}, \qquad \delta_{22,2} = \frac{4a^2}{L^3 E h}. \tag{1248}$$

1. Starre Einspannung des Randes $a(\eta = 0)$ eines unendlich langen Zylinders.

$$\delta_1 = X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \delta_{10} = 0,$$
$$\delta_2 = X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + \delta_{20} = 0.$$

Mit (1248) und $\delta_{10} = w_{a0}$, $\delta_{20} = w'_{a0}$ wird

$$\left.\begin{aligned} X_2 &= M_a = -\frac{L^2 E h}{2a^2} (w_{a0} + L w'_{a0}), \\ X_1 &= -Q_a = -\frac{L E h}{2a^2} (2 w_{a0} + L w'_{a0}). \end{aligned}\right\} \tag{1249}$$

2. Gelenkige Lagerung des Randes $a(\eta = 0)$ eines unendlich langen Zylinders.

$$M_a = X_2 = 0$$

und
$$\delta_1 = X_1 \delta_{11} + \delta_{10} = 0,$$

also mit (1248)
$$X_1 = -Q_a = -\frac{L E h}{2 a^2} w_{a0}. \tag{1250}$$

Damit sind nach (1244) auch die Formänderungen und Schnittkräfte bekannt.

Zylinderschale mit $h = \text{const}$ als Behälter (Abb. 819). Der untere Rand des Mantels ist im Behälterboden starr eingespannt, der obere Rand kann frei, gelenkig gelagert oder ebenfalls eingespannt sein. Um die strenge Lösung der Aufgabe zu begründen, sollen die Abmessungen des Behälters eine relativ große charakteristische Länge L bestimmen und daher die Integrationskonstanten der Lösung (1242) von den Bedingungen an beiden Rändern abhängen. Nach S. 760 ist

$$p_z = -\gamma y = -\gamma L \lambda \eta, \qquad w_0 = -\gamma \frac{L a^2}{E h} \lambda \eta. \tag{1251}$$

Die vollständige Lösung $w = w_0 + \overline{w}$ der inhomogenen Differentialgleichung lautet daher nach (260) transformiert

$$\begin{aligned} w = -\gamma \frac{L a^2}{E h} \lambda \eta + U_1 \cos \lambda \eta \, \mathfrak{Cof}\, \lambda \eta + U_2 \cos \lambda \eta \, \mathfrak{Sin}\, \lambda \eta + U_3 \sin \lambda \eta \, \mathfrak{Cof}\, \lambda \eta \\ + U_4 \sin \lambda \eta \, \mathfrak{Sin}\, \lambda \eta. \end{aligned} \tag{1252}$$

Werden die Ableitungen der Funktion w nach der Veränderlichen $(\lambda \eta)$ mit $w^{\cdot}$, $w^{\cdot\cdot}$ usw. bezeichnet, so sind nach (1244)

$$\vartheta = \frac{1}{L} w^{\cdot}, \qquad M_y = -\frac{B}{L^2} w^{\cdot\cdot}, \qquad M_\beta = -\mu \frac{B}{L^2} w^{\cdot\cdot}, \qquad Q_y = -\frac{B}{L^3} w^{\cdot\cdot\cdot}. \tag{1253}$$

Die Funktionen $w^{\cdot}$ usw. sind auf S. 141 angeschrieben. Die Vorzahlen sind

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{a} \sqrt[4]{3 \frac{a^2}{h^2} (1 - \mu^2)}, \qquad \frac{B}{L^2} = \frac{E h^2}{4 a} \frac{1}{\sqrt{3 (1 - \mu^2)}}, \tag{1254}$$

so daß die Integrationskonstanten $U_1 \ldots U_4$ leicht aus den Randbedingungen für $\lambda \eta = 0$ oder $\lambda \eta = \lambda$ berechnet werden können.

1. Oberer Rand frei, $\lambda \eta = 0$ mit $w^{\cdot\cdot} = 0$ und $w^{\cdot\cdot\cdot} = 0$, unterer Rand eingespannt $\lambda \eta = \lambda$, mit $w = 0$, $w^{\cdot} = 0$.

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= -\gamma \frac{l a^2}{E h} \frac{\cos \lambda \, \mathfrak{Sin}\, \lambda + \sin \lambda \, \mathfrak{Cof}\, \lambda - 2 \lambda \cos \lambda \, \mathfrak{Cof}\, \lambda}{\lambda (\cos^2 \lambda + \mathfrak{Cof}^2 \lambda)}, \qquad U_4 = 0, \\ U_2 &= -\gamma \frac{l a^2}{E h} \frac{\cos \lambda \, \mathfrak{Sin}\, \lambda - \sin \lambda \, \mathfrak{Cof}\, \lambda - 1/\lambda \cdot \cos \lambda \, \mathfrak{Cof}\, \lambda}{\cos^2 \lambda + \mathfrak{Cof}^2 \lambda} = U_3. \end{aligned}\right\} \tag{1255}$$

2. Oberer Rand gelenkig gelagert $\lambda \eta = 0$ mit $w = 0$ und $w^{\cdot\cdot} = 0$, unterer Rand eingespannt $\lambda \eta = \lambda$ mit $w = 0$, $w^{\cdot} = 0$.

$$\left.\begin{aligned} U_1 = 0, \qquad U_2 &= -\gamma \frac{l a^2}{E h} \frac{1/\lambda \cdot \sin \lambda \, \mathfrak{Cof}\, \lambda - \sin \lambda \, \mathfrak{Sin}\, \lambda - \cos \lambda \, \mathfrak{Cof}\, \lambda}{\mathfrak{Cof}\, \lambda \, \mathfrak{Sin}\, \lambda - \cos \lambda \sin \lambda}, \\ U_4 = 0, \qquad U_3 &= +\gamma \frac{l a^2}{E h} \frac{1/\lambda \cdot \cos \lambda \, \mathfrak{Sin}\, \lambda + \sin \lambda \, \mathfrak{Sin}\, \lambda - \cos \lambda \, \mathfrak{Cof}\, \lambda}{\mathfrak{Cof}\, \lambda \, \mathfrak{Sin}\, \lambda - \cos \lambda \sin \lambda}. \end{aligned}\right\} \tag{1256}$$

3. Oberer Rand eingespannt $\lambda \eta = 0$ mit $w = 0$ und $w^{\cdot} = 0$, unterer Rand ein gespannt $\lambda \eta = \lambda$ mit $w = 0$ und $w^{\cdot} = 0$.

$$\left.\begin{aligned} U_1 = 0, \qquad U_2 &= -\gamma \frac{l a^2}{E h} \frac{(\mathfrak{Sin}\, \lambda + \sin \lambda) \sin \lambda - \lambda (\sin \lambda \, \mathfrak{Cof}\, \lambda + \cos \lambda \, \mathfrak{Sin}\, \lambda)}{\lambda (\mathfrak{Sin}^2 \lambda - \sin^2 \lambda)}, \\ U_3 &= -\gamma \frac{l a^2}{E h} \frac{\lambda (\sin \lambda \, \mathfrak{Cof}\, \lambda + \cos \lambda \, \mathfrak{Sin}\, \lambda) - \mathfrak{Sin}\, \lambda (\sin \lambda + \mathfrak{Sin}\, \lambda)}{\lambda (\mathfrak{Sin}^2 \lambda - \sin^2 \lambda)}, \\ U_4 &= -\gamma \frac{l a^2}{E h} \frac{(\mathfrak{Cof}\, \lambda - \cos \lambda)(\mathfrak{Sin}\, \lambda + \sin \lambda) - 2 \lambda \sin \lambda \, \mathfrak{Sin}\, \lambda}{\lambda (\mathfrak{Sin}^2 \lambda - \sin^2 \lambda)}. \end{aligned}\right\} \tag{1257}$$

Damit sind auch alle Komponenten (1253) des Spannungs- und Verschiebungszustandes bekannt. Ihre Berechnung wird durch die bekannten Tabellen der hyperbolischen Funktionen von K. Hayashi erleichtert. Sind diese nicht zur Hand, so kann in der Regel ($h \ll a$)

$$\mathfrak{Sin}\,\lambda = \mathfrak{Cof}\,\lambda = \frac{1}{2}\,e^{\lambda}$$

gesetzt und e^{λ} als num ln e^{λ} = num λ nach Taschenbüchern bestimmt werden. Das Einspannungsmoment ist dann für $\eta = 1$ und $\mu = 0$ in allen 3 Fällen

$$M_y \approx \gamma \frac{a^2 h^2}{6 l}\,\lambda(\lambda - 1). \tag{1258}$$

Berechnung eines Wasserbehälters.

a) Vollständige Lösung nach (1252) für starre Einspannung des unteren Schalenrandes.

$a = 9{,}0$ m; $l = 9{,}0$ m; $h = 0{,}30$ m; $a/h = 30$.

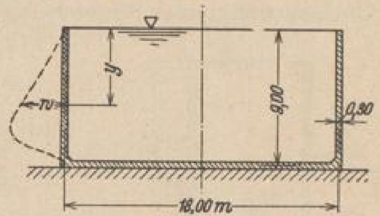

Abb. 819.

Nach (1241) ist $L = \dfrac{9{,}0}{1{,}31\sqrt{30}} = 1{,}258$,

$\lambda = 7{,}17$, $\gamma = 1$ t/m³, $E = 2100000$ t/m²,

$$\gamma \frac{l a^2}{E h} = 1{,}156 \cdot 10^{-3}.$$

1. Oberer Rand frei. Nach (1255) ist $U_4 = 0$ und

$$U_1 = -1{,}156 \cdot 10^{-3}\,\frac{409{,}64 + 504{,}60 - 14{,}34 \cdot 409{,}64}{7{,}17 \cdot 423275} = 18{,}89 \cdot 10^{-7},$$

$$U_2 = U_3 = -1{,}156 \cdot 10^{-3}\,\frac{409{,}64 - 504{,}60 - \dfrac{1}{7{,}17} \cdot 409{,}64}{423275} = 4{,}15 \cdot 10^{-7},$$

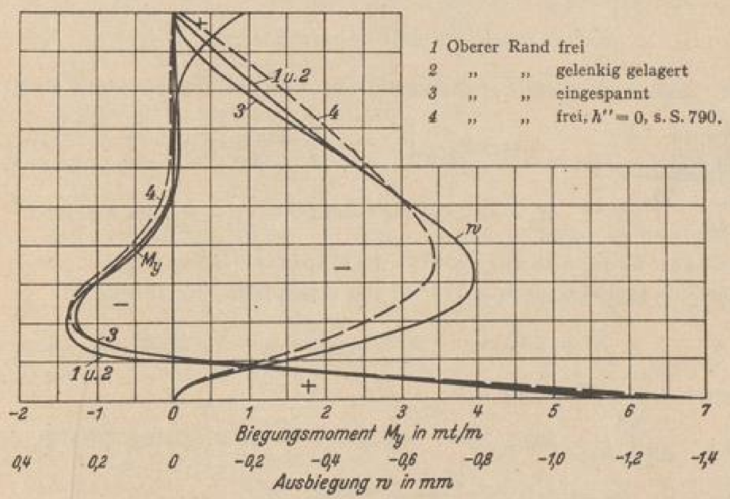

Abb. 820.

damit nach (1252) und (1253) mit (1251)

$$w = -0{,}161 \cdot 10^{-3}\,l\,\eta + 10^{-7}[18{,}89 \cos\lambda\eta\,\mathfrak{Cof}\,\lambda\eta + 4{,}15(\cos\lambda\eta\,\mathfrak{Sin}\,\lambda\eta + \sin\lambda\eta\,\mathfrak{Cof}\,\lambda\eta)],$$

$$M_y = 0{,}614 \cdot 10^{-3}[18{,}89 \sin\lambda\eta\,\mathfrak{Sin}\,\lambda\eta + 4{,}15(\sin\lambda\eta\,\mathfrak{Cof}\,\lambda\eta - \cos\lambda\eta\,\mathfrak{Sin}\,\lambda\eta)].$$

Am unteren Rand is $M_a = 6{,}08$ mt/m.

2. Oberer Rand elenkig gelagert. Nach (1256) ist

$$U_1 = U_4 = 0, \qquad U_2 = 23{,}05 \cdot 10^{-7}, \qquad U_3 = 4{,}15 \cdot 10^{-7}.$$

3. Oberer Rand starr eingespannt. Nach (1257) ist

$$U_1 = 0, \qquad U_2 = 23{,}06 \cdot 10^{-7}, \qquad U_3 = 1{,}598 \cdot 10^{-4}, \qquad U_4 = -1{,}585 \cdot 10^{-4}.$$

Die Ausbiegung w und die Biegungsmomente M_y sind in Abb. 820 dargestellt. Die Ringkraft N_β ist nach (1244) proportional der Ausbiegung w.

b) Näherungsweise ist für alle 3 Randbedingungen nach (1258)

$$M_a \approx 1{,}0 \frac{9{,}0^2 \cdot 0{,}30^2}{6 \cdot 9{,}0} \cdot 7{,}17 \cdot 6{,}17 = 5{,}97 \text{ mt/m}.$$

c) Die Teillösung (1243) für den unendlich langen Zylinder ergibt nach (1249)

$$M_a = \frac{L^3 \gamma}{2} (\lambda - 1) = 6{,}12 \text{ mt/m}.$$

Der Verlauf der Funktionen w und M_y stimmt mit den Kurven *1* und *2* Abb. 820 so gut überein, daß der Unterschied in der Zeichnung nicht hervortritt.

Untersuchung eines Wasserbehälters nach (1234) bei verschiedenen Randbedingungen.

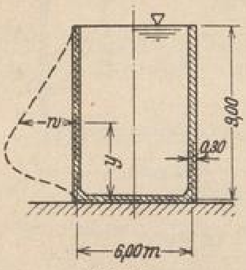

Abb. 821.

a) Starre Einspannung des unteren Schalenrandes.

$$a = 3{,}0 \text{ m}, \qquad l = 9{,}0 \text{ m}, \qquad h = 0{,}3 \text{ m}, \qquad a/h = 10.$$

Nach (1241) ist $L = \dfrac{3{,}0}{1{,}31\sqrt{10}} = 0{,}723$,

$$\lambda = 12{,}45, \qquad \gamma = 1{,}0 \text{ t/m}^3, \qquad E\,h = 0{,}63 \cdot 10^6.$$

Für den Längsspannungszustand ist nach (1154)

$$w_0 = -\gamma \frac{a^2}{E\,h}(l - y), \qquad w_0' = \gamma \frac{a^2}{E\,h}.$$

Damit wird nach (1249) das Einspannungsmoment

$$M_a = X_2 = -\frac{L^2 E\,h}{2\,a^2}\left(-\gamma \frac{a^2\,l}{E\,h} + L\,\gamma \frac{a^2}{E\,h}\right) = \frac{L^3\gamma}{2}(\lambda - 1) = 2{,}165 \text{ mt/m}$$

und

$$X_1 = \frac{L^2}{2}\gamma(2\,\lambda - 1) = 6{,}25 \text{ t/m},$$

so daß nach (1243) und (1244) Formänderung und Schnittkräfte bestimmt sind (Abb. 824a).

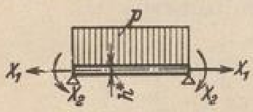

Abb. 822.

$$w = -\gamma \frac{a^2\,l}{E\,h}\left[1 - \eta - e^{-\lambda\eta}\left(\cos\lambda\,\eta + \left(1 - \frac{L}{l}\right)\sin\lambda\,\eta\right)\right],$$

$$M_y = -L^2 \frac{l\,\gamma}{2} e^{-\lambda\eta}\left(\sin\lambda\,\eta - \left(1 - \frac{L}{l}\right)\cos\lambda\,\eta\right).$$

b) Elastische Einspannung in eine Kreisplatte (Abb. 824b).

1. Formänderungsgrößen nach S. 773 für die Kreisplatte mit Tabelle 63.

$$h^* = 0{,}40 \text{ m}, \qquad N = \frac{E\,h^{*3}}{12(1-\mu^2)} = 11520 \text{ mt}.$$

$$X_1 = 1: \quad \delta_{11,1} = \delta_{21,1} = 0, \qquad w_1^* = 0, \qquad M_{r,1} = 0.$$

$$X_2 = 1: \quad \delta_{22,1} = \frac{3{,}0}{N(1+\mu)} = 223{,}2 \cdot 10^{-6}, \quad w_2^* = -\frac{a^2}{2N(1+\mu)}\Phi_1 = -335 \cdot 10^{-6} \cdot \Phi_1; \quad M_{r,2} = -1.$$

$$p = \gamma\,l: \ \delta_{10,1} = 0, \quad \delta_{20,1} = -\gamma \frac{l\,a^3}{8\,N(1+\mu)} = -2265 \cdot 10^{-6}.$$

$$w_0^* = \gamma \frac{l\,a^4}{64\,N(1+\mu)}[2(3+\mu)\,\Phi_1 - (1+\mu)\,\Phi_0] = 5365 \cdot 10^{-6}(\Phi_1 - 0{,}184\,\Phi_0),$$

$$M_{r,0} = \gamma \frac{l\,a^2}{16}(3+\mu)\,\Phi_1 = 16{,}07\,\Phi_1.$$

2. Formänderungsgrößen für die Zylinderschale nach (1248)

$$\delta_{11,2} = 39{,}5 \cdot 10^{-6}, \qquad \delta_{12,2} = -54{,}7 \cdot 10^{-6}, \qquad \delta_{22,2} = 151{,}2 \cdot 10^{-6},$$

$$\delta_{10,2} = w_{0a} = -128{,}6 \cdot 10^{-6}, \qquad \delta_{20,2} = w_{0a}' = 14{,}3 \cdot 10^{-6}.$$

3. Berechnung der Anschlußkräfte nach S. 773 mit $\delta_{ik} = \delta_{ik,1} + \delta_{ik,2}$.

X_1	X_2	
39,5	−54,7	128,6
−54,7	374,4	2250,7

$X_1 = 14{,}518$ t/m,

$X_2 = 8{,}133$ mt/m.

4. Formänderung und Schnittkräfte der Schale Abb. 824b. Nach (1243) und (1244) ist

$$w = -\gamma \frac{a^2 l}{E h}(1-\eta) + 14{,}518\, w_1 + 8{,}133\, w_2$$

$$= -128{,}6 \cdot 10^{-6}\left[(1-\eta) - e^{-\lambda\eta}(\cos\lambda\eta + 3{,}44 \sin\lambda\eta)\right],$$

$$M_y = 14{,}518\, M_1 + 8{,}133\, M_2$$

$$= -2{,}358\, e^{-\lambda\eta}(\sin\lambda\eta - 3{,}44\cos\lambda\eta).$$

5. Formänderung und Schnittkräfte der Platte. Abb. 824b.

$$w^* = 5365 \cdot 10^{-6}(\Phi_1 - 0{,}184\, \Phi_0) - 8{,}133 \cdot 335 \cdot 10^{-6}\, \Phi_1$$

$$= 10^{-6}(2640\, \Phi_1 - 987\, \Phi_0),$$

$$M_r = 16{,}07\, \Phi_1 - 8{,}133.$$

c) Elastische Einspannung in eine Kugelschale. Abb. 824c.

1. Formänderungsgrößen für die Kugelschale nach (1197) und (1199) mit

$$a^* = 4{,}67 \text{ m}, \quad h^* = 0{,}20 \text{ m}, \quad a^*/h^* = 23{,}35.$$

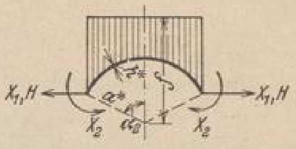

Abb. 823.

Nach (1185) ist

$$k = \sqrt{23{,}35\sqrt{3 \cdot 0{,}9722}} = 6{,}32, \quad \frac{1}{B} = 695 \cdot 10^{-6},$$

und mit $\alpha_2 = 40^0$, $\sin\alpha_2 = 0{,}6428$, $E h^* = 0{,}42 \cdot 10^6$,

$$\delta_{11,1} = 58{,}1 \cdot 10^{-6}, \quad \delta_{12,1} = -122{,}5 \cdot 10^{-6}, \quad \delta_{22,1} = 513 \cdot 10^{-6}.$$

Mit $f = 9 + 4{,}67 \cdot \cos\alpha_2 = 12{,}58$ m und $f/a^* = 2{,}69$ wird nach (1132)

$$\bar\delta_{10,1} = \Delta r_{\alpha 2} = -136 \cdot 10^{-6} \quad \text{und} \quad \bar\delta_{20,1} = \vartheta_{\alpha 2} = 33{,}3 \cdot 10^{-6}.$$

Die Horizontalkraft H beträgt nach S. 752 mit (1132)

$$H = -N_{\alpha 2}\cos\alpha_2 = +\gamma \frac{a^{*2}}{6}\left(3\frac{f}{a^*} - 2\frac{1-\cos^3\alpha_2}{\sin^2\alpha_2}\right)\cos\alpha_2 = +15{,}1 \text{ t/m}$$

und damit nach (1201)

$$\delta'_{10,1} = 15{,}1 \cdot 58{,}1 \cdot 10^{-6} = 878 \cdot 10^{-6}, \qquad \delta'_{20,1} = -15{,}1 \cdot 122{,}5 \cdot 10^{-6} = -1850 \cdot 10^{-6},$$

so daß

$$\delta_{10,1} = (-136 + 878) \cdot 10^{-6} = 742 \cdot 10^{-6}, \qquad \delta_{20,1} = (33{,}3 - 1850)\, 10^{-6} = -1816{,}7 \cdot 10^{-6}$$

2. Formänderungsgrößen der Zylinderschale wie unter b).

3. Berechnung der Anschlußkräfte nach S. 773 mit $\delta_{ik} = \delta_{ik,1} + \delta_{ik,2}$.

X_1	X_2	
97,6	−177,2	−613,4
−177,2	664,2	1802,4

$X_1 = -2{,}634$ t/m,

$X_2 = 2{,}011$ mt/m.

4. Formänderungen und Schnittkräfte der Zylinderschale nach (1243) und (1244)

$$w = -10^{-6} \cdot 128{,}6\left[(1-\eta) + 1{,}67\, e^{-\lambda\eta}(\cos\lambda\eta - 0{,}513\sin\lambda\eta)\right],$$

$$M_y = 3{,}917\, e^{-\lambda\eta}(\sin\lambda\eta + 0{,}513\cos\lambda\eta).$$

5. Schnittkräfte in der Kugelschale nach (1192)

$$M_\alpha = (X_1 + H)\, M_1 + X_2 M_2 = e^{-k\omega}\left[5{,}94\sin(k\omega) - 2{,}84\sin\left(k\omega + \frac{\pi}{4}\right)\right].$$

d) Berechnung für Temperatur und Schwinden bei eingespanntem unterem Rand.

Die Formänderungsgrößen aus $X_1 = 1$, $X_2 = 1$ werden wie auf S. 784

$$\delta_{11} = 39{,}5 \cdot 10^{-6}\,, \qquad \delta_{12} = -54{,}7 \cdot 10^{-6}\,, \qquad \delta_{22} = 151{,}2 \cdot 10^{-6}\,.$$

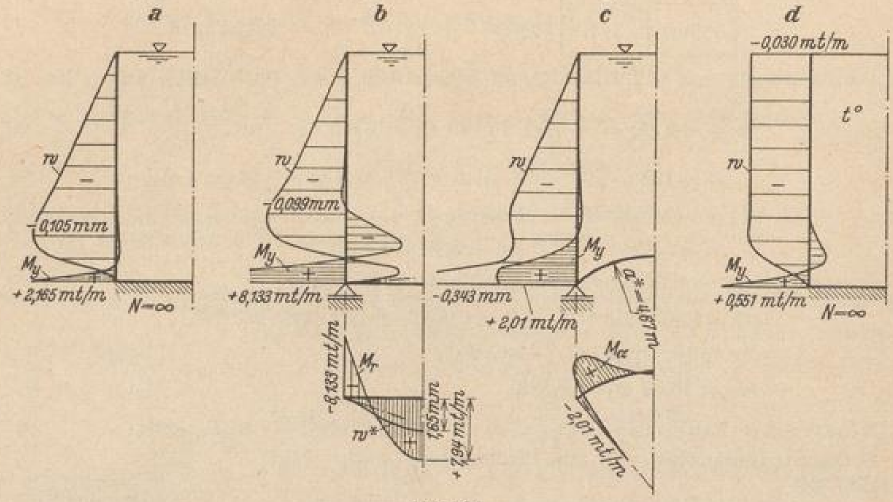

Abb. 824.

Für Temperaturwirkung ist nach (1157) mit $\alpha_t = 10 \cdot 10^{-6}$

$$\delta_{10} = w_{0a} = -\alpha_t \cdot t \cdot a = -30 \cdot t \cdot 10^{-6}\,, \qquad \delta_{20} = 0\,.$$

Damit lauten die Gleichungen auf S. 773

X_1	X_2	
39,5	− 54,7	$30 \cdot t$
− 54,7	151,2	0

$$X_1 = 1{,}522 \cdot t \text{ t/m}\,,$$
$$X_2 = 0{,}551 \cdot t \text{ mt/m}\,.$$

Formänderung und Schnittkräfte betragen nach (1243), (1244) Abb. 824d

$$w = -30 \cdot t \cdot 10^{-6}\,[1 - e^{-\lambda\eta}\,(\cos\lambda\eta + \sin\lambda\eta)]\,,$$
$$M = -0{,}551\, e^{-\lambda\eta}\,(\sin\lambda\eta - \cos\lambda\eta)\,.\ t = 1\,.$$

Berechnung eines Silos.

1. Geometrische Grundlagen.

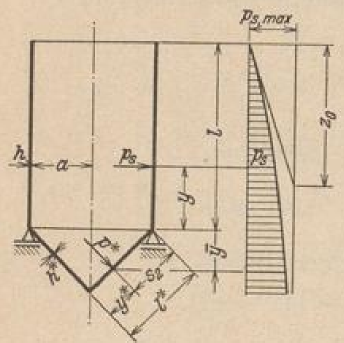

Abb. 825.

Zylinderschale: $a = 3{,}0$ m, $l = 9{,}0$ m, $h = 0{,}20$ m,

$$E\,h = 0{,}42 \cdot 10^6\,, \qquad a/h = 15\,, \qquad L = 0{,}591 \text{ m}\,,$$
$$\lambda = 15{,}25\,, \qquad \eta = y/l\,.$$

Kegelschale: $\alpha = 45^0$, $l^* = 4{,}24$ m, $h^* = 0{,}25$ m,

$$E\,h^* = 0{,}525 \cdot 10^6\,, \qquad L_2^* = 0{,}788 \text{ m}\,, \qquad B^* = 10^6/355\,,$$
$$\eta_2 = s_2/L_2^*\,.$$

2. Belastung. Füllgut: Roggen. Nach S. 14 ist (Abb. 825)

$$\gamma = 0{,}7 \text{ t/m}^3\,, \qquad k_1 = 0{,}248\,, \qquad \mu' = 0{,}44\,, \qquad F/U = 3/2\,,$$

$$p_{s,\max} = \frac{0{,}7}{0{,}44}\,\frac{3}{2} = 2{,}39\,, \qquad p_{b,\max} = \frac{2{,}39}{0{,}248} = 9{,}62\,,$$

$$z_0 = \frac{1{,}5}{0{,}44 \cdot 0{,}248} = 13{,}75\,,$$

$$p_s = 2{,}39\,(1 - e^{-\varkappa})\,, \quad p_b = 9{,}62\,(1 - e^{-\varkappa})\,, \quad \varkappa = \frac{l - y}{z_0} = \frac{9 - y}{13.75}\,.$$

Zylinderschale: $p_z = -2{,}39\,(1 - e^{-\varkappa})$.

Kegelschale: $p_z^* = -p_z \sin^2\alpha - p_b \cos^2\alpha = -6{,}01\left(1 - e^{-\frac{l+\bar{y}}{z_0}}\right)$,

$$p_z^* = -6{,}01\,(1 - e^{-\varkappa^*}), \qquad \varkappa^* = \frac{16{,}96 - y^*}{19{,}43}.$$

3. Formänderung der Zylinderschale.

a) Membranzustand. Nach (1155) ist

$$w_0 = -\frac{3{,}0^2}{0{,}42}\cdot 10^{-6}\cdot 2{,}39\,(1 - e^{-\varkappa}) = -51{,}3\cdot 10^{-6}\,(1 - e^{-\varkappa}),$$

$$\vartheta_0 = \frac{51{,}3\cdot 10^{-6}}{13{,}75}\,e^{-\varkappa} = 3{,}73\cdot 10^{-6}\,e^{-\varkappa},$$

so daß mit $y = 0$:

$$\delta_{10,2} = -24{,}6\cdot 10^{-6}, \qquad \delta_{20,2} = 1{,}94\cdot 10^{-6}.$$

b) Für die Belastung aus $X_1 = 1$, $X_2 = 1$ (Abb. 826) ist nach (1248)

$$\delta_{11,2} = 72{,}5\cdot 10^{-6}, \qquad \delta_{12,2} = -122{,}6\cdot 10^{-6}, \qquad \delta_{22,2} = 415{,}0\cdot 10^{-6}.$$

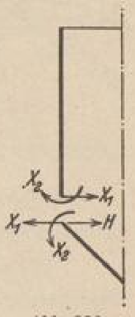

Abb. 826.

4. Formänderung der Kegelschale.

a) Membranzustand. Aus den Gleichgewichtsbedingungen (1138) folgt

$$N_{\beta 0} = -y^* p_z = 6{,}01\,y^*(1 - e^{-\varkappa^*})$$

und

$$(N_{y0}\,y^*)' = 6{,}01\,y^*(1 - e^{-\varkappa^*}),$$

woraus

$$N_{y0} = 6{,}01\left[\frac{y^*}{2} - 19{,}43\,e^{-\varkappa^*} + \frac{19{,}43^2}{y^*}\,(e^{-\varkappa^*} - e^{-0{,}872})\right].$$

Damit wird nach (1140)

$$\Delta r_{z,0} = 8{,}1\cdot 10^{-6}\,y^*\left\{y^*(1 - e^{-\varkappa^*}) - \mu\left[\frac{y^*}{2} - 19{,}43\,e^{-\varkappa^*}\left(1 - \frac{19{,}43}{y^*}\right) - \frac{19{,}43^2}{y^*}\,e^{-0{,}872}\right]\right\},$$

und nach (1141)

$$\vartheta_0^* = -11{,}46\cdot 10^{-6}\left[\frac{3}{2}\,y^* - e^{-\varkappa^*}\left(\frac{19{,}43^2}{y^*} - 19{,}43 + 2\,y^* + \frac{y^{*2}}{19{,}43}\right) + \frac{19{,}43^2}{y^*}\cdot e^{-0{,}872}\right].$$

Die Formänderungen am Rande im Sinne der Definition nach Abb. 826 betragen daher

$$\bar{\delta}_{10,1} = (\Delta r_{z,0})_{y^*=l^*} = 63{.}3\cdot 10^{-6},$$
$$\bar{\delta}_{20,1} = -(\vartheta_0^*)_{y^*=l^*} = 29{.}3\cdot 10^{-6}.$$

b) Für die Belastung aus $X_1 = 1$, $X_2 = 1$ ist nach (1223) und (1224) unter Beachtung des Wirkungssinnes von X_2 nach Abb. 826

$$\delta_{11,1} = 43{,}4\cdot 10^{-6}, \qquad \delta_{12,1} = 77{,}9\cdot 10^{-6}, \qquad \delta_{22,1} = 279{,}5\cdot 10^{-6}.$$

c) Belastung H. Nach Abb. 767 ist

$$H = -(N_{y0})_{y^*=l^*}\cdot\cos\alpha = -4{,}67\ \mathrm{t}$$

und nach (1201)

$$\delta'_{10,1} = -4{,}67\cdot 43{,}4\cdot 10^{-6} = -202{,}5\cdot 10^{-6},$$
$$\delta'_{20,1} = -4{,}67\cdot 77{,}9\cdot 10^{-6} = -363{,}5\cdot 10^{-6}.$$

5. Berechnung der Überzähligen.

$$\delta_{11} = (72{,}5 + 43{,}4)\cdot 10^{-6} = 115{,}9\cdot 10^{-6},$$
$$\delta_{12} = (-122{.}6 + 77{,}9)\cdot 10^{-6} = -44{,}7\cdot 10^{-6},$$
$$\delta_{22} = (415{,}0 + 279{,}5)\,10^{-6} = 694{,}5\cdot 10^{-6},$$
$$\delta_{10} = (-24{,}6 + 63{,}3 - 202{,}5)\,10^{-6} = -163{,}8\cdot 10^{-6},$$
$$\delta_{20} = (1{,}94 + 29{,}3 - 363{,}5)\,10^{-6} = -332{,}26\cdot 10^{-6}.$$

X_1	X_2	
115,9	− 44,7	163,8
− 44,7	694,5	332,26

$X_1 = 1{,}639$ t/m,

$X_2 = 0{,}584$ mt/m.

6. Formänderung und Schnittkräfte der Zylinderschale nach (1243) und (1244)

$$w = w_0 + 1{,}639\, w_1 + 0{,}584\, w_2$$
$$= -51{,}3 \cdot 10^{-6}\,[(1 - e^{-\varkappa}) - 0{,}923\, e^{-\lambda\eta}\,(\cos\lambda\eta + 1{,}516 \sin\lambda\eta)]\,.$$
$$M_y = 1{,}639\, M_1 + 0{,}584\, M_2 = 0{,}384\, e^{-\lambda\eta}\,[1{,}516 \cos\lambda\eta - \sin\lambda\eta]\,.$$

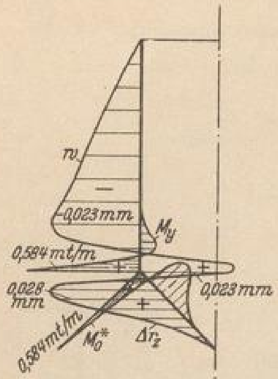

Abb. 827.

7. Formänderung und Schnittkräfte der Kegelschale nach (1202) und (1221)

$$\Delta r_z = \Delta r_{z,0} + (1{,}639 - 4{,}67)\,\Delta r_{z,1} + 0{,}584\,\Delta r_{z,2}$$
$$= \Delta r_{z,0} - 3{,}031\,\Delta r_{z,1} + 0{,}584\,\Delta r_{z,2}\,.$$

$\Delta r_{z,0}$ auf S. 787. Nach (1223) und (1224) ist

$$\Delta r_{z,1} = 2{,}41 \cdot 10^{-6}\, y^{*2}\, e^{-\eta_2} \cos\eta_2\,,$$
$$\Delta r_{z,2} = 4{,}33 \cdot 10^{-6}\, y^{*2}\, e^{-\eta_2}\,(\cos\eta_2 - \sin\eta_2)\,,$$
$$M_y^* = -3{,}031\, M_1 + 0{,}584\, M_2 = 0{,}584 e^{-\eta_2}\,[\cos\eta_2 - 1{,}89 \sin\eta_2]\,.$$

Formänderung und Schnittkräfte sind in Abb. 827 dargestellt.

Berechnung eines Kühlturmes.

1. Geometrische Grundlagen (Abb. 828).

Zylinderschale: $a = 5{,}5$ m, $l = 15{,}0$ m, $h = 0{,}07$ m

$$E\,h = 0{,}147 \cdot 10^6\,, \quad a/h = 78{,}6\,, \quad L = 0{,}474 \text{ m}\,, \quad \lambda = 31{,}7\,, \quad \eta = y/l\,.$$

Kegelschale: $\alpha = 65^0$, $l^* = 17{,}0$ m, $a^* = 13{,}0$ m, $h^* = 0{,}10$ m

$$E\,h^* = 0{,}210 \cdot 10^6\,, \quad L_1^* = 0{,}596 \text{ m}\,, \quad B^* = 10^6/5560\,, \quad \eta_1 = s_1/L_1^*\,.$$

2. Belastung. Eigengewicht.

Zylinderschale $g = 0{,}168$ t/m²; Kegelschale $g^* = 0{,}24$ t/m².

3. Formänderung der Zylinderschale.

a) Membranzustand. Nach (1153) ist

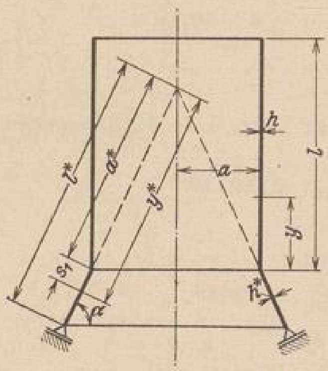

Abb. 828.

$$w_0 = -\frac{\mu}{E\,h}\, a\, g\, l\,(1 - \eta) = -10^{-6} \cdot 15{,}73\,(1 - \eta)\,,$$
$$\vartheta_0 = 10^{-6} \cdot \frac{15{,}73}{l} = 10^{-6} \cdot 1{,}05\,,$$

so daß mit $\eta = 0$ $\delta_{10,2} = -15{,}73 \cdot 10^{-6}$,

$$\delta_{20,2} = 1{,}05 \cdot 10^{-6}\,.$$

b) Für die Belastung aus $X_1 = 1$, $X_2 = 1$ (Abb. 829) ist nach (1248)

$$\delta_{11,2} = 868 \cdot 10^{-6}\,, \quad \delta_{12,2} = -1836 \cdot 10^{-6}\,,$$
$$\delta_{22,2} = 7750 \cdot 10^{-6}\,.$$

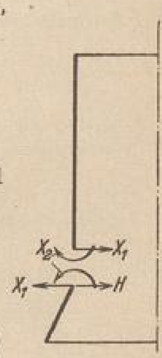

Abb. 829.

4. Formänderung der Kegelschale.

a) Membranzustand. Nach (1142) und (1145) ist mit $z = y^* \sin\alpha$ und

$$G_0 = g \cdot l \cdot 2\,a\,\pi = 87 \text{ t}$$

$$\Delta r_{z,0} = -\frac{g^*\,y^{*2}}{E\,h^*} \cos^2\alpha \operatorname{ctg}\alpha \left\{1 - \frac{\mu}{2\cos^2\alpha}\left[1 - \left(\frac{a^*}{y^*}\right)^2\right]\right\} + \frac{\mu\,G_0}{2\,\pi\,E\,h^* \sin\alpha}$$
$$= 10^{-6}\left\{12{,}12 - 0{,}0444\, y^{*2}\left[1{,}145 + \left(\frac{13}{y^*}\right)^2\right]\right\},$$
$$\vartheta_0 = -\frac{g^*\,y^*}{E\,h^*}\,\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha}\left[\frac{1}{2} + \mu - (2 + \mu)\cos^2\alpha - \frac{1}{2}\left(\frac{a^*}{y^*}\right)^2\right] - \frac{G_0}{E\,h \cdot 2\,\pi\,y^* \sin^2\alpha}$$
$$= -10^{-6}\left\{0{,}294\, y^*\left[0{,}56 - \left(\frac{13}{y^*}\right)^2\right] + \frac{80{,}3}{y^*}\right\}.$$

Mit $y^* = a^*$ wird $\quad \overline{\delta}_{10,1} = -3{,}96 \cdot 10^{-6}\,, \quad \overline{\delta}_{20,1} = -4{,}49 \cdot 10^{-6}\,.$

b) Die Belastung $X_1 = 1$, $X_2 = 1$ liefert nach (1225) und (1226)

$$\delta_{11,1} = 482 \cdot 10^{-6}, \qquad \delta_{12,1} = 896 \cdot 10^{-6}, \qquad \delta_{22,1} = 3320 \cdot 10^{-6}.$$

c) Belastung H. Nach (1145) ist

$$-H = \frac{G_0}{2\pi a} \operatorname{ctg} \alpha = +1{,}175 \text{ t/m}$$

und daher nach (1201)

$$\delta'_{10,1} = -1{,}175 \cdot 482 \cdot 10^{-6} = -\ \ 566 \cdot 10^{-6},$$
$$\delta'_{20,1} = -1{,}175 \cdot 896 \cdot 10^{-6} = -1053 \cdot 10^{-6}.$$

5. Berechnung der Überzähligen. ($\delta_{ik} = \delta_{ik,1} + \delta_{ik,2}$, $\delta_{i0} = \bar{\delta}_{i0,1} + \delta'_{i0,1} + \delta_{i0,2}$)

X_1	X_2		
1350	−940	581	$X_1 = 0{,}532$ t/m
−940	11070	1056	$X_2 = 0{,}141$ mt/m.

6. Formänderung und Schnittkräfte der Zylinderschale nach (1243) und (1244)

$$w = w_0 + 0{,}532\, w_1 + 0{,}141\, w_2$$
$$= -15{,}73 \cdot 10^{-6} \left[(1-\eta) - 12{,}85\, e^{-\lambda\eta} (\cos\lambda\eta + 1{,}281 \sin\lambda\eta)\right],$$
$$M_y = 0{,}532\, M_1 + 0{,}141\, M_2 = -0{,}110\, e^{-\lambda\eta} (\sin\lambda\eta - 1{,}281 \cos\lambda\eta).$$

7. Formänderung und Schnittkräfte der Kegelschale nach (1202) und (1221)

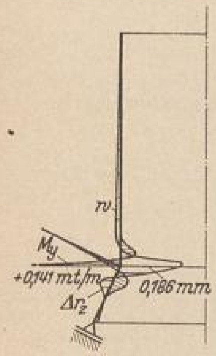

Abb. 830.

$$\Delta r_z = \Delta r_{z,0} + (0{,}532 - 1{,}175)\, \Delta r_{z,1} + 0{,}141\, \Delta r_{z,2}$$
$$= \Delta r_{z,0} - 0{,}643\, \Delta r_{z,1} + 0{,}141\, \Delta r_{z,2}.$$

$\Delta r_{z,0}$ auf S. 788. Nach (1225) und (1226) ist

$$\Delta r_{z,1} = 2{,}855 \cdot 10^{-6}\, y^{*2} e^{-\eta_1} \cos\eta_1,$$
$$\Delta r_{z,2} = -5{,}28 \cdot 10^{-6}\, y^{*2} e^{-\eta_1} (\sin\eta_1 - \cos\eta_1).$$

Formänderung und Schnittkräfte sind in Abb. 830 dargestellt.

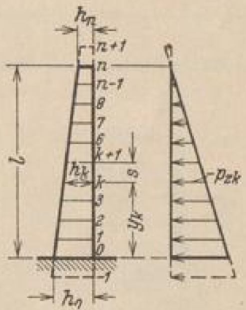

Abb. 831.

Die Zylinderschale mit veränderlicher Wanddicke. Näherungslösungen der allgemeinen Aufgabe entstehen nach S. 778 durch die Unterteilung des Integrationsbereichs l in n gleichgroße Abschnitte $\Delta y = s$ mit der Punktfolge $0, 1 \ldots k \ldots n$ und durch die Umwandlung der Differentialquotienten der Differentialgleichung des Problems in Differenzenquotienten.

Die Differentialgleichung der Biegelinie w des Meridianschnittes mit beliebig veränderlicher Wanddicke h lautet nach (1229) für

$$N_y = 0, \qquad M_y'' + \frac{N_\beta}{a} + p_z = 0, \qquad M_y'' = -(B w'')'':$$

$$\left(\frac{h^3}{h_0^3} w''\right)'' + 4 w \frac{h}{h_0} \frac{3(1-\mu^2)}{a^2 h_0^2} = 12 \frac{(1-\mu^2)}{E h_0^3} p_z. \tag{1259}$$

Aus dieser werden nach (211) mit $h_k/h_0 = \zeta_k$ die folgenden Differenzengleichungen abgeleitet:

$$\zeta_{k-1}^3 \Delta^2 w_{k-1} - 2 \zeta_k^3 \Delta^2 w_k + \zeta_{k+1}^3 \Delta^2 w_{k+1} + 4 \zeta_k \frac{s^4}{L_0^4} w_k = \frac{12(1-\mu^2) s^4}{E h_0^3} p_{z,k}.$$

Sie lassen sich nach S. 130 umformen

$$\zeta_{k-1}^3 w_{k-2} - 2 w_{k-1} (\zeta_{k-1}^3 + \zeta_k^3) + w_k \left(\zeta_{k-1}^3 + 4\left[\zeta_k^3 + \zeta_k \frac{s^4}{L_0^4}\right] + \zeta_{k+1}^3\right)$$
$$- 2 w_{k+1} (\zeta_k^3 + \zeta_{k+1}^3) + \zeta_{k+1}^3 w_{k+2} = \frac{12(1-\mu^2) s^4}{E h_0^3} p_{z,k}, \quad k = 1 \ldots (n-1). \tag{1260}$$

Die Rechenvorschrift besteht neben diesen $(n-1)$ linearen Gleichungen aus vier Randbedingungen für w, w', M oder Q am Rande $y = 0$ und $y = l$. Sie enthält ebenso viele Wurzeln $w_k (k = -1 \ldots n+1)$, die daher eindeutig bestimmt sind. Die Randbedingungen sind Vorschriften über den Verschiebungs- oder Spannungszustand. Dieser läßt sich nach (1229) ebenfalls durch Differenzen ausdrücken.

$$\left.\begin{aligned} w'_k \approx \frac{w_{k+1} - w_{k-1}}{2s}, \quad -N_{\beta k} = \frac{E h_k}{a} w_k, \quad M_{yk} = -\frac{E h_k^3}{12(1-\mu^2)} \frac{(w_{k-1} - 2w_k + w_{k+1})}{s^2}, \\ Q_k = -\frac{E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{h_{k+1}^3 \Delta^2 w_{k+1} - h_{k-1}^3 \Delta^2 w_{k-1}}{2s^3}\right). \end{aligned}\right\} \quad (1261)$$

Sind keine Randbedingungen vorgeschrieben, sondern nur durch die Verbindung des Breitenschnittes mit anderen elastischen Bauteilen bestimmt, so müssen hier ebenso wie auf S. 781 zunächst die Anschlußkräfte berechnet werden. Die Komponenten δ_{10}, δ_{20} des Verschiebungszustandes ergeben sich in der Regel aus der partikulären Lösung von (1259), die Vorzahlen δ_{11}, δ_{12}, δ_{22} des Ansatzes lassen sich genügend genau aus den Differenzengleichungen eines unendlich langen Zylinders mit vorgeschriebenen Randkräften nach S. 789 für $X_1 = Q_y = 1$, $\boldsymbol{My} = 0$ oder $X_2 = \boldsymbol{My} = 1$, $Q_y = 0$ berechnen. Da die Funktionen $w(y)$ in diesem Falle schnell abklingen, werden die Verschiebungen $w_{k,1}$, $w_{k,2}$ außerhalb einer geschätzten Randzone Null gesetzt, ohne die Bedingungen am entgegengesetzten Rande zu berücksichtigen.

Berechnung des Wasserbehälters Abb. 819 für linear veränderliche Wandstärke ($h'' = 0$).

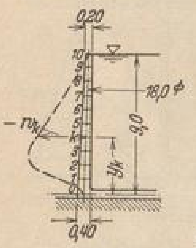

Abb. 832.

1. Geometrische Abmessungen (Abb. 832). $l = 9{,}0$ m, $a = 9{,}0$ m.

$$h_0 = 0{,}40 \text{ m}, \qquad h_{10} = 0{,}20 \text{ m}, \qquad h_k = \frac{h_0}{c}(c - y_k),$$

$$c = \frac{l\, h_0}{h_0 - h_{10}} = 18{,}0, \qquad \zeta_k = \frac{h_k}{h_0} = 1 - \frac{y_k}{18{,}0}.$$

Der Integrationsbereich l wird in 10 gleiche Teile geteilt. $s = 0{,}9$ m.

2. Belastung. Wasserdruck, $p_{z,k} = -1{,}0\,(l - y_k)$.

3. Randbedingungen. Der untere Rand $y = 0$ ist starr eingespannt, $w = 0$, $w' = 0$, also $w_{-1} = w_1$. Der obere Rand ist kräftefrei, $Q_{10} = 0$, $M_{y10} = 0$, daher mit (1261)

$$w_{11} = 2w_{10} - w_9, \qquad w_{12} = \frac{\zeta_9^3}{\zeta_{11}^3}(w_8 - 2w_9 + w_{10}) + 3w_{10} - 2w_9.$$

4. Vorzahlen der Differenzengleichungen (1260)

$$\frac{12(1-\mu^2)s^4}{E h_0^3} p_{z,k} = \frac{s^4}{B_0} p_{z,k} = -\frac{0{,}057}{1000}(9{,}0 - y_k). \qquad \frac{s^4}{L_0^4} = 0{,}1475.$$

k	y_k	ζ_k	ζ_k^3	$\zeta_k^3 + \zeta_{k+1}^3$	$\zeta_k \frac{s^4}{L_0^4}$	[ ] Gl.(1260)	$\zeta_{k-1}^3 + 4[\ ] + \zeta_{k+1}^3$	$9{,}0 - y_k$	$10^3 \frac{s^4}{B_0} p_{z,k}$
−1	−0,9	1,05	1,158	2,158	0,1550	1,3130	—	—	
0	0	1	1	1,857	0,1475	1,1475	6,595	9	−0,513
1	0,9	0,95	0,857	1,586	0,1401	0,9971	5,719	8,1	−0,461
2	1,8	0,9	0,729	1,343	0,1328	0,8618	4,921	7,2	−0,411
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

5. Die Bedingungsgleichungen unter Berücksichtigung der Randbedingungen.

w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	$10^3 \frac{s^4}{B_0} p_{z,k}$
6,719	−3,172	0,729								−0,461
−3,172	4,921	−2,686	0,614							−0,411
0,729	−2,686	4,199	−2,252	0,512						−0,359
	0,614	−2,252	3,536	−1,868	0,422					−0,308
		0,512	−1,868	2,988	−1,530	0,343				−0,256
			0,422	−1,530	2,485	−1,236	0,275			−0,205
				0,343	−1,236	2,044	−0,982	0,216		−0,154
					0,275	−0,982	1,661	−0,764	0,166	−0,103
						0,216	−0,764	1,204	−0,332	−0,051
							0,166	−0,332	0,313	0

6. Auflösung. Die Iteration einer Näherungslösung liefert

$k =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$10^3 w_k =$	−0,2396	−0,5144	−0,6616	−0,6777	−0,6131	−0,5146	−0,4047	−0,2860	−0,1547	−0,0124 mm

7. Schnittkräfte nach (1261). Die Ausbiegung w_k und das Biegungsmoment M_{yk} sind in Abb. 820 S. 783 durch die Linie 4 dargestellt.

Pöschl, T., u. K. v. Terzaghi: Berechnung von Behältern nach neueren analytischen und graphischen Methoden. Berlin 1913 und 1926. — Meißner, E.: Beanspruchung und Formänderung zylindrischer Gefäße mit linear veränderlicher Wandstärke. Vjschr. Naturforsch. Ges. Zürich 1917 S. 153. — Pasternak, P.: Formeln zur raschen Berechnung der Biegebeanspruchung in kreisrunden Behältern. Schweiz. Bauztg. Bd. 86 (1925) S. 129. — Derselbe: Vereinfachte Berechnung der Biegebeanspruchung in dünnwandigen kreisrunden Behältern. Verh. 2. Int. Kongr. f. techn. Mechanik. Zürich 1927. — Derselbe: Die praktische Berechnung der Biegebeanspruchung in kreisrunden Behältern mit gewölbten Böden und Decken und linear veränderlichen Wandstärken. Schweiz. Bauztg. Bd. 90 (1927). — Susok, K.: Formeln zur praktischen Berechnung der Biegungsbeanspruchung in kreisrunden Behältern mit linear veränderlichen Wandstärken. Beton u. Eisen 1927 S. 450. — Steuermann, E.: Beitrag zur Berechnung des zylindrischen Behälters mit veränderlicher Wandstärke. Beton u. Eisen 1928 S. 286. — Miesel, K.: Über die Festigkeit von Kreiszylinderschalen mit nichtachsensymmetrischer Belastung. Ing.-Arch. 1930 S. 22. — Flügge, W.: Die Stabilität der Kreiszylinderschale. Ing.-Arch. 1931 S. 463. — Stange, K.: Der Spannungszustand einer Kreisringschale. Ing.-Arch. 1931 S. 47. — Abdank, R.: Berechnung ganz oder teilweise gefüllter, freitragender, dünnwandiger Rohrleitungen mit beliebig geneigter Achse. Bautechn. 1931 S. 419. — v. Sanden, K., u. F. Tölke: Über Stabilitätsprobleme dünner kreiszylindrischer Schalen. Ing.-Arch. 1931 S. 24.

82. Membrantheorie von Rohr und Tonne.

Tonne und Rohr werden bei zahlreichen Anwendungen im Bauwesen längs der Ränder oder längs ausgezeichneter Mantellinien $\alpha = \text{const}$ stetig unterstützt und bei der statischen Untersuchung unendlich lang angenommen (Abb. 833). Eine von x unabhängige Belastung $p = p(\alpha)$ erzeugt dann mit $\mu = 0$ einen ebenen Spannungszustand, dessen Komponenten ebenso wie beim biegungssteifen gekrümmten Stabe berechnet werden (S. 131 und 136). Durch die Abstützung einzelner Querschnitte des Flächentragwerks mit biegungssteifen Rahmen, Bindern oder Querwänden