



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Die Statik im Stahlbetonbau**

**Beyer, Kurt**

**Berlin [u.a.], 1956**

a) Die Kugelschale mit gleichbleibender Wandstärke

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

Um diese 12 linearen Gleichungen in mathematischer Beziehung übersichtlich zu lösen, wird die Querkraft  $Q_\alpha$  bei der Untersuchung von Schalen mit konstanter Wanddicke  $h$  und veränderlichem Halbmesser  $R_\alpha(\alpha)$  durch die Unbekannte  $V_\alpha = R_\alpha Q_\alpha$  und bei Schalen mit stetig veränderlicher Wanddicke  $h(\alpha)$  durch die Unbekannte  $U_\alpha = Q_\alpha R_\alpha / h^2$  ersetzt. Die Wurzeln des Ansatzes lassen sich dann durch geeignete Verknüpfung der Gleichungen allmählich ausschließen, so daß zwei simultane Differentialgleichungen zwischen den Unbekannten  $V$  oder  $U$  und der Verdrehung  $\vartheta$  der Meridiantangente entstehen, die sich durch gleichartigen Aufbau auszeichnen. Sie lauten in Symbolen

$$\mathfrak{L}(\vartheta) + \vartheta \cdot F_1(\alpha) = -\lambda_1 U, \quad \mathfrak{L}(U) + U \cdot F_2(\alpha) = \lambda_2 \vartheta + \Phi(\alpha), \quad (1179)$$

Die Buchstaben  $\mathfrak{L}(\ )$  bezeichnen Differentialoperationen, die Buchstaben  $F_1(\alpha)$ ,  $F_2(\alpha)$  bekannte, mit der Schalenform vorgeschriebene Funktionen. Die Buchstaben  $\lambda_1, \lambda_2$  sind konstante Größen, die von den elastischen Eigenschaften des Baustoffs abhängen, während die Funktion  $\Phi(\alpha)$  mit der Belastung  $p_y, p_z$  der Oberfläche verschwindet.

Die vollständige Lösung  $J$  enthält neben der allgemeinen Lösung  $\bar{J}$  der homogenen Gleichungen (1179) mit  $\Phi(\alpha) = 0$  ein partikuläres Integral  $J_0$  des inhomogenen Ansatzes ( $\Phi(\alpha) \neq 0$ ). Dieses stimmt mit großer Genauigkeit mit der Lösung für den Längsspannungszustand der statisch bestimmt abgestützten Schale (Abschn. 80) überein. Daher wird die vollständige Lösung für die biegungssteife Schale durch die Überlagerung der Schnittkräfte  $N_{\alpha,0}, N_{\beta,0}, M_{\alpha,0} = M_{\beta,0} = Q_{\alpha,0} = 0$  aus dem Längsspannungszustand mit den Schnittkräften  $\bar{N}_\alpha, \bar{N}_\beta, \bar{M}_\alpha, \bar{M}_\beta, \bar{Q}_\alpha$  aus der Randstörung erhalten.

Die allgemeine Lösung des homogenen Ansatzes enthält vier Integrationskonstanten, so daß neben den statischen oder geometrischen Bedingungen des Längsspannungszustandes noch zwei Bedingungen an jedem Schalenrande vorgeschrieben werden können.

- Freier Rand  $U = 0, M_\alpha = 0$ .
- Frei drehbare Lagerung des Schalenrandes  $\Delta r_\alpha = 0, M_\alpha = 0$ .
- Eingespannter Schalenrand  $\Delta r_\alpha = 0, \vartheta = 0$ .
- Bei einer Verbindung des Schalenrandes mit anderen Bauteilen sind die gegenseitige Verschiebung  $\delta_1$  und die gegenseitige Verdrehung  $\delta_2$  der Anschlußflächen Null.

Geckeler, J. W.: Über die Festigkeit achsensymmetrischer Schalen. Forsch.-Arb. Ing.-Wes. Heft 276. Berlin 1926.

**a) Die Kugelschale mit gleichbleibender Wandstärke.** Die Krümmung der Mittelfläche ist konstant ( $R_\alpha = R_\beta = a$ ). Dasselbe gilt von der Schalendicke  $h$  und daher auch von der Dehnungssteifigkeit  $D$  und der Biegungssteifigkeit  $B$  ( $h = \text{const}, D = \text{const}, B = \text{const}$ ). Unter diesen Umständen lassen sich durch Verknüpfung von (1177) die allgemeinen Beziehungen zwischen den Komponenten des Verschiebungszustandes der Mittelfläche und der Verzerrung des Schalendifferentials folgendermaßen ergänzen:

$$\vartheta = (\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta) \operatorname{ctg} \alpha - \varepsilon'_\beta, \quad d(\ )/d\alpha = ( \ )'. \quad (1180)$$

Die Schnittkräfte unterliegen den Gleichgewichtsbedingungen (1178). Sie lauten für  $R_\alpha = R_\beta = a$

$$\left. \begin{aligned} (N_\alpha \sin \alpha)' - N_\beta \cos \alpha - Q_\alpha \sin \alpha + p_y a \sin \alpha &= 0, \\ (Q_\alpha \sin \alpha)' + N_\alpha \sin \alpha + N_\beta \sin \alpha + p_z a \sin \alpha &= 0, \\ M'_\alpha - (M_\beta - M_\alpha) \operatorname{ctg} \alpha - Q_\alpha a &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1181)$$



Die letzte Bedingung liefert mit (1176), also mit

$$M_\alpha = -\frac{B}{a}(\vartheta' + \mu \vartheta \operatorname{ctg} \alpha), \quad M_\beta = -\frac{B}{a}(\vartheta \operatorname{ctg} \alpha + \mu \vartheta'),$$

$$L(\vartheta) - \mu \vartheta = \vartheta'' + \vartheta' \operatorname{ctg} \alpha - \vartheta \operatorname{ctg}^2 \alpha - \mu \vartheta = -\frac{a^2}{B} Q_\alpha. \quad (1182)$$

Aus den anderen beiden Gleichgewichtsbedingungen folgt

$$N_\alpha = -Q_\alpha \operatorname{ctg} \alpha - \frac{aF}{\sin^2 \alpha}, \quad N_\beta = \frac{aF}{\sin^2 \alpha} - Q_\alpha - p_z a$$

mit

$$dF/d\alpha = p_z \sin \alpha \cos \alpha + p_y \sin^2 \alpha$$

und daher in Verbindung mit (1176) und (1180)

$$L(Q_\alpha) + \mu Q_\alpha = Q_\alpha'' + Q_\alpha' \operatorname{ctg} \alpha - Q_\alpha \operatorname{ctg}^2 \alpha + \mu Q_\alpha = Eh\vartheta - a[p_z' - (1 + \mu)p_y]. \quad (1183)$$

Auf diese Weise ist ein System von zwei simultanen Differentialgleichungen zweiter Ordnung entstanden, aus dem jede der beiden Unbekannten durch Wiederholung der Differentialoperation  $L(\quad)$  mit einer Differentialgleichung vierter Ordnung berechnet werden kann. Die Partikularlösung  $\vartheta_0, Q_{\alpha 0}$  der vollständigen Gleichung läßt sich nach E. Meißner für die wesentlichen Belastungsfälle angeben. Z. B. wird bei Eigengewicht mit  $p_y = g \sin \alpha, p_z = g \cos \alpha$  in (1183)

$$-a[p_z' - (1 + \mu)p_y] = ag(2 + \mu) \sin \alpha.$$

Die simultanen Differentialgleichungen (1182) und (1183) für  $\vartheta_0, Q_{\alpha 0}$  werden durch den Ansatz  $\vartheta_0 = A_1 \sin \alpha, Q_{\alpha 0} = A_2 \sin \alpha$  erfüllt, wenn

$$A_1 = -\frac{(2 + \mu)a^3 g}{(1 - \mu^2)[1 + 12(a/h)^2]B} = \frac{a^2 A_2}{(1 + \mu)B}.$$

Damit sind  $\vartheta_0, Q_{\alpha 0}$  und in Verbindung mit (1176) auch  $M_{\alpha 0}, M_{\beta 0}$  bestimmt.

$$M_{\alpha 0} = M_{\beta 0} = -\frac{B}{a} A_1 (1 + \mu) \cos \alpha.$$

Diese Schnittkräfte sind im Vergleich zu dem Anteil aus den Randstörungen nach S. 770 klein von höherer Ordnung und werden daher vernachlässigt. Mit

$$Q_{\alpha 0} = 0, \quad M_{\alpha 0} = 0, \quad M_{\beta 0} = 0$$

stimmt der Spannungszustand der biegesteifen Schale bei statisch bestimmter Stützung mit dem Längsspannungszustand auf S. 751 überein. Dasselbe gilt damit auch für den Verschiebungszustand. Das Ergebnis wiederholt sich bei den Partikularlösungen für die anderen rotationssymmetrischen Belastungsfälle.

Die Schnittkräfte und Verschiebungen der biegesteifen Kugelschale lassen sich daher, wie bereits auf S. 767 bemerkt, mit großer Genauigkeit aus zwei voneinander unabhängigen Anteilen zusammensetzen. Der eine besteht aus den Schnittkräften und Verschiebungen des Längsspannungszustandes durch die vorgeschriebene stetige Belastung, der andere aus den Schnittkräften und Verschiebungen der biegesteifen Schale infolge der Randkräfte  $M_{\alpha 2}, Q_{\alpha 2}$  usw., die zur Befriedigung der vorgeschriebenen Stützung notwendig sind.

Die Schnittkräfte und Verschiebungen des Längsspannungszustandes sind für die regelmäßigen Belastungsfälle auf S. 751 ff. angeschrieben. Die Schnittkräfte und Verschiebungen der biegesteifen Kugelschale aus vorgeschriebenen Randkräften werden aus den homogenen Differentialgleichungen (1182), (1183) für  $\bar{\vartheta}$  und  $\bar{Q}_\alpha$  berechnet.

Das Integral der homogenen Gl. (1182), (1183) kann als Reihenentwicklung angeschrieben werden. Die Lösungen für  $\bar{\vartheta}, \bar{Q}_\alpha$  und für alle daraus abgeleiteten Schnittkräfte und Verschiebungen klingen vom Rande aus schnell ab. Da jede Ableitung im



Vergleich zu der nächst höheren Ableitung dann klein von zweiter Ordnung ist, können nach einem Vorschlage von J. W. Geckeler die Funktionen  $\bar{\vartheta}$  und  $\bar{\vartheta}'$  gegenüber  $\bar{\vartheta}''$  in (1182) und die Funktionen  $\bar{Q}_\alpha$  und  $\bar{Q}_\alpha'$  gegenüber  $\bar{Q}_\alpha''$  in (1183) vernachlässigt werden, um schnell zu einer übersichtlichen, für technische Aufgaben brauchbaren Näherungslösung zu kommen.

Die Näherungslösung für  $\bar{\vartheta}(\alpha)$  und  $\bar{Q}(\alpha)$  entsteht also aus den Gleichungen

$$\bar{\vartheta}'' = -\frac{a^2}{B} \bar{Q}_\alpha, \quad \bar{Q}_\alpha'' = E h \bar{\vartheta}. \quad (1184)$$

Die Elimination von  $\bar{Q}_\alpha$  liefert mit

$$4 k^4 = \frac{a^2}{B} E h = \frac{12(1-\mu^2)a^2}{h^2}, \quad k = \sqrt{\frac{a}{h} \sqrt{3(1-\mu^2)}}, \quad (1185)$$

$$\bar{\vartheta}_\alpha^{IV} + 4 k^4 \bar{\vartheta} = 0. \quad (1186)$$

Durch Elimination von  $\bar{\vartheta}$  entsteht

$$\bar{Q}_\alpha^{IV} + 4 k^4 \bar{Q}_\alpha = 0. \quad (1187)$$

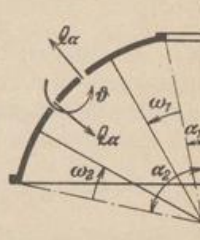


Abb. 806.

Die Gleichungen werden mit dem aus Abschn. 22 bekannten Exponentialansatz gelöst. Da hiernach beide Funktionen  $\bar{\vartheta}$ ,  $\bar{Q}_\alpha$  ebenso wie alle daraus abgeleiteten Schnittkräfte und Verschiebungen schnell vom Rande aus abklingen, werden sie je nach der Betrachtung der oberen oder unteren Randzone auf den Winkel  $\omega_1 = (\alpha - \alpha_1)$ ,  $d\omega_1 = d\alpha$  oder  $\omega_2 = (\alpha_2 - \alpha)$ ,  $d\omega_2 = -d\alpha$  als unabhängiger Veränderlicher bezogen (Abb. 806). Daher ist in beiden Fällen

$$\left. \begin{aligned} \bar{\vartheta} &= e^{-k\omega} (\bar{A}_1 \cos k\omega + \bar{A}_2 \sin k\omega) + e^{k\omega} (\bar{A}_3 \cos k\omega + \bar{A}_4 \sin k\omega), \\ \bar{Q}_\alpha &= e^{-k\omega} (A_1 \cos k\omega + A_2 \sin k\omega) + e^{k\omega} (A_3 \cos k\omega + A_4 \sin k\omega), \end{aligned} \right\} (1188a)$$

oder nach S. 141 auch

$$\bar{Q}_\alpha = C_1 e^{-k\omega} \cos(k\omega + \psi_1) + C_2 e^{k\omega} \cos(k\omega + \psi_2). \quad (1188b)$$

Die Integrationskonstanten  $\bar{A}_3, \bar{A}_4$  und  $A_3, A_4$  oder  $C_2, \psi_2$  einer Lösung für die geschlossene Kugelschale mit  $\omega_2 = \alpha_2 - \alpha$  als unabhängiger Veränderlicher sind Null, da die Bedingungen  $\vartheta = 0, Q_\alpha = 0$  im Scheitel nur auf diese Weise erfüllt werden können. Die Funktion  $\vartheta(\omega)$  und  $Q_\alpha(\omega)$  verlaufen daher ebenso wie alle abgeleiteten Funktionen der übrigen Schnittkräfte und Verschiebungen nach gedämpften Schwingungen mit dem Winkel  $2\pi/k$  als Schwingungslänge und  $\pi$  als logarithmischem Dekrement. Sie klingen mit wachsendem  $\omega$  um so schneller ab, je größer  $k$  ist. Der Einfluß der von den Randstörungen des Längsspannungszustandes herrührenden Randkräfte  $M_{\alpha_2}, Q_{\alpha_2}$  ist daher auf eine schmale Randzone beschränkt. Das Ergebnis läßt sich auch leicht auf Grund des St. Venantschen Prinzips einsehen, da die Randkräfte im Gleichgewicht stehen. Es bestätigt die Richtigkeit der Annahmen für die Näherungslösung, da die zweiten Ableitungen  $\bar{\vartheta}'', \bar{Q}_\alpha''$  den Betrag  $k^2$  als Faktor enthalten, und daher als Glieder des linearen Ansatzes (1182) oder (1183) wesentlich größere Bedeutung besitzen als  $\bar{\vartheta}', \bar{\vartheta}$  oder  $\bar{Q}_\alpha', \bar{Q}_\alpha$ .

Die Lösung  $\bar{\vartheta}$  und  $\bar{Q}_\alpha$  offener Schalen nach (1187) enthält streng genommen vier Integrationskonstante, die aus vier Bedingungen für die Verschiebungen oder für die Schnittkräfte an den beiden Schalenrändern berechnet werden können. Ist die Schalenzone  $(\alpha_2 - \alpha_1)$  jedoch breit, so klingen die von jeder Randbelastung herrührenden Komponenten des Spannungs- und Verschiebungszustandes so weit ab, daß je zwei Integrationskonstante  $A_1, A_2$  und  $A_3, A_4$  oder  $C_1, \psi_1$  und  $C_2, \psi_2$  unabhängig voneinander aus

$$\bar{Q}_\alpha = e^{-k\omega} (A_1 \cos k\omega + A_2 \sin k\omega) \quad \text{und} \quad \bar{Q}_\alpha = e^{-k\omega} (A_3 \cos k\omega + A_4 \sin k\omega) \quad (1189)$$



angegeben werden können, je nachdem der Breitenunterschied  $\omega_2 = \alpha_2 - \alpha$  oder  $\omega_1 = \alpha - \alpha_1$  vom unteren oder oberen Rande gerechnet wird.

Rechenvorschrift. Im Bereiche des oberen Randes der offenen Kugelschale ist

$$\bar{Q}_\alpha = C e^{-k\omega_1} \cos(k\omega_1 + \psi) \quad (1190)$$

im Bereiche des unteren Randes

$$\bar{Q}_\alpha = C e^{-k\omega_2} \cos(k\omega_2 + \psi). \quad (1191)$$

Die Gleichungen bilden die Grundlage für die Berechnung aller Komponenten des Spannungs- und Formänderungszustandes aus den Gleichgewichtsbedingungen (1181) und den Verträglichkeitsbedingungen (1177). Das obere Vorzeichen gilt in der oberen, das untere in der unteren Randzone der Schale.

$$\left. \begin{aligned} \bar{N}_\alpha &= -\bar{Q}_\alpha \operatorname{ctg} \alpha = -C e^{-k\omega} \cos(k\omega + \psi) \operatorname{ctg} \alpha, \\ \bar{N}_\beta &= -\bar{Q}_\alpha = \pm C k \sqrt{2} e^{-k\omega} \sin\left(k\omega + \psi + \frac{\pi}{4}\right), \\ \bar{\vartheta} &= \frac{\bar{Q}'_\alpha}{hE} = +C \frac{2k^2}{hE} e^{-k\omega} \sin(k\omega + \psi), \\ \bar{M}_\alpha &= -\frac{B}{a} (\bar{\vartheta}' + \mu \bar{\vartheta} \operatorname{ctg} \alpha) \approx -\frac{B}{a} \bar{\vartheta}' = \mp C \frac{B}{a h E} 2k^3 \sqrt{2} e^{-k\omega} \cos\left(k\omega + \psi + \frac{\pi}{4}\right), \\ \bar{M}_\beta &= \mu \bar{M}_\alpha - \frac{B \operatorname{ctg} \alpha}{a} \bar{\vartheta}, \\ \bar{\Delta r} &= r_\alpha \bar{\varepsilon}_\beta = \frac{r_\alpha}{hE} (\bar{N}_\beta - \mu \bar{N}_\alpha) = -\frac{r_\alpha}{hE} (\bar{Q}'_\alpha - \mu \bar{Q}_\alpha \operatorname{ctg} \alpha) \approx -\frac{r_\alpha \bar{Q}'_\alpha}{hE}. \end{aligned} \right\} (1192)$$

Die Näherungslösungen für  $\bar{M}_\alpha$  und  $\bar{\varepsilon}_\beta$  lassen sich ebenso begründen wie die Vernachlässigung von  $\bar{Q}_\alpha$  neben  $\bar{Q}'_\alpha$  in (1183).

Die Integrationskonstanten  $C, \psi$  sind bei starrem Unterbau durch die Stützung der Schale, am oberen Rande durch vorgeschriebene äußere Kräfte bestimmt.

1. Der untere Rand ist unverschieblich, aber frei drehbar gestützt

$$\left. \begin{aligned} \omega = 0, \alpha = \alpha_2: \quad \varepsilon_{\beta 2,0} + \bar{\varepsilon}_{\beta 2} = \varepsilon_{\beta 2} = 0, \\ M_{\alpha 2,0} + \bar{M}_{\alpha 2} = M_{\alpha 2} = 0 = \bar{M}_{\alpha 2}, \end{aligned} \right\} (1193)$$

wenn die Dehnungen des Längsspannungszustandes wieder mit  $\varepsilon_{\beta,0}$  bezeichnet werden. Die Biegemomente  $M_{\alpha,0}$  sind Null.

$$\left. \begin{aligned} M_{\alpha 2} = C \frac{B}{a h E} 2k^3 \sqrt{2} \cos\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad \text{d. h. } \psi = \frac{\pi}{4}, \\ \varepsilon_{\beta 2} = \varepsilon_{\beta 2,0} - C \frac{k \sqrt{2}}{h E} \sin\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad \text{d. h. } C = \frac{\varepsilon_{\beta 2,0}}{h \sqrt{2}} h E. \end{aligned} \right\} (1194)$$

2. Der untere Rand ist starr eingespannt.  $\omega = 0, \alpha = \alpha_2$ .

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_2 = \vartheta_{2,0} + C \frac{2k^2}{hE} \sin \psi = 0, \\ \varepsilon_{\beta 2} = \varepsilon_{\beta 2,0} - C \frac{k \sqrt{2}}{h E} \sin\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) = 0, \\ \text{für } \vartheta_{2,0} \approx 0 \text{ ist } \psi = 0 \text{ und } C = \frac{\varepsilon_{\beta 2,0}}{h} h E. \end{aligned} \right\} (1195)$$

3. Der obere Rand ist durch einen starren Druckring abgeschlossen.  $\omega = 0, \alpha = \alpha_1$ .



$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\beta 1} &= \varepsilon_{\beta 1,0} + C \frac{k\sqrt{2}}{hE} \sin\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) = 0, \\ \vartheta_1 &= \vartheta_{1,0} + C \frac{2k^2}{hE} \sin\psi = 0, \\ \text{für } \vartheta_{1,0} \approx 0 &\text{ ist } \psi = 0 \text{ und } C = -\frac{\varepsilon_{\beta 1,0}}{k} hE. \end{aligned} \right\} \quad (1196)$$

Damit sind in Verbindung mit (1192) auch alle Komponenten des Spannungs- und Verschiebungszustandes aus einer Randstörung der statisch bestimmt gestützten Schale bekannt (S. 766). Sie werden mit den zugeordneten Komponenten des Längsspannungszustandes überlagert.

**Biegungsspannungen am Rand einer Kugelschale bei Belastung durch Eigengewicht.**  
(Vgl. Abb. 777,  $\alpha_2 = 60^\circ$ .)

1. Der untere Rand ist unverschieblich, aber frei drehbar gestützt. Nach (1123) ist für den Längsspannungszustand

$$\varepsilon_{\beta,0} = \frac{1}{Eh} (N_{\beta,0} - \mu N_{\alpha,0}) = \frac{ag}{Eh} \frac{1 + \mu - \cos\alpha - \cos^2\alpha}{1 + \cos\alpha} \quad \text{und mit } \mu = \frac{1}{6}, \alpha \rightarrow \alpha_2$$

$$\varepsilon_{\beta,0} = \frac{ag}{Eh} \frac{1,1667 - 0,5 - 0,25}{1 + 0,5} = 0,278 \frac{ag}{Eh}.$$

Für  $a/h = 200$  ist nach (1185)

$$k = \sqrt{200 \sqrt{3} \cdot 0,9722} = 18,49,$$

so daß nach (1194)

$$C = ag \frac{0,278}{k\sqrt{2}} = 0,01064 ag, \quad \psi = \frac{\pi}{4}.$$

Die Schnittkräfte nach (1192) infolge der Randstörung werden nun

$$\bar{N}_\alpha = -0,01064 ag e^{-k\omega} \cos\left(k\omega + \frac{\pi}{4}\right) \text{ctg}\alpha,$$

$$\bar{N}_\beta = -0,278 ag e^{-k\omega} \cos(k\omega),$$

$$\bar{M}_\alpha = -0,0815 ag h e^{-k\omega} \sin(k\omega),$$

$$\frac{B \text{ctg}\alpha}{a} \bar{\vartheta} = 0,00311 ag h \text{ctg}\alpha e^{-k\omega} \sin\left(k\omega + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\bar{M}_\beta = \mu \bar{M}_\alpha - \frac{B \text{ctg}\alpha}{a} \bar{\vartheta}.$$

Die Längskräfte  $\bar{N}_\alpha$  sind gegenüber  $N_{\alpha,0}$  aus dem Längsspannungszustand zu vernachlässigen. Die Längskräfte  $N_\beta = N_{\beta,0} + \bar{N}_\beta$  sind in Abb. 807a für die Randzone  $50^\circ < \alpha < 60^\circ$  dargestellt. Abb. 807b zeigt die Biegemomente der Randzone.

2. Der untere Rand ist starr eingespannt.

Für den Längsspannungszustand ist nach (1123) und (1126)

$$\varepsilon_{\beta,0} = 0,278 \frac{ag}{Eh}, \quad \vartheta_{2,0} = -\frac{ag}{Eh} (2 + \mu) \sin\alpha_2 = -1,878 \frac{ag}{Eh}.$$

Die Randbedingungen (1195) lauten dann mit  $C = C_1 ag$

$$-1,878 + C_1 \cdot 683 \sin\psi = 0,$$

$$0,278 - C_1 26,12 \sin\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

oder

$$-49 \sin\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) + 190,1 \sin\psi = 0,$$

$$\text{tg}\psi = \frac{49}{190,1\sqrt{2} - 49} = 0,223, \quad \psi = 12^\circ 30' \equiv 0,2182,$$

$$C_1 = \frac{1,878}{683 \sin\psi} = 0,0127, \quad C = 0,0127 ag.$$

(Für  $\vartheta_{2,0} \approx 0$  ist  $\psi = 0$ ,  $C \approx 0,0151 ag$ .)

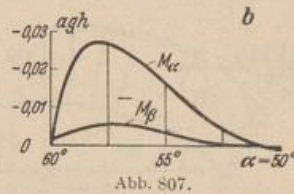
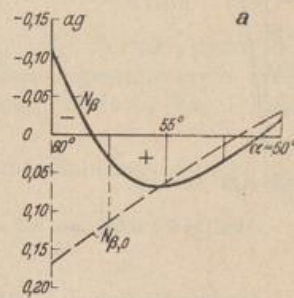
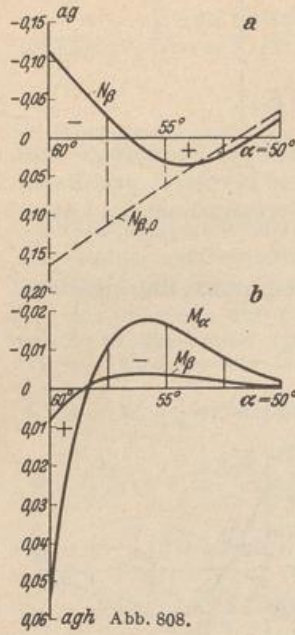


Abb. 807.



Die Schnittkräfte nach (1192) infolge der Randstörung werden nun



$$\bar{N}_\alpha = -0,0127 a g e^{-k\omega} \cos(k\omega + \psi) \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\bar{N}_\beta = -0,332 a g e^{-k\omega} \sin\left(k\omega + \psi + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\bar{M}_\alpha = 0,0973 a g h e^{-k\omega} \cos\left(k\omega + \psi + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\frac{B \operatorname{ctg} \alpha}{a} \bar{\vartheta} = 0,00372 a g h \operatorname{ctg} \alpha e^{-k\omega} \sin(k\omega + \psi),$$

$$\bar{M}_\beta = \mu \bar{M}_\alpha - \frac{B \operatorname{ctg} \alpha}{a} \bar{\vartheta}.$$

Die Schnittkräfte sind für die Randzone  $50^\circ < \alpha < 60^\circ$  in Abb. 808 dargestellt.

**Schnittkräfte in einem Stützboden bei Wasserauflast  $f = 2a$ .**  
(Vgl. Abb. 781,  $\alpha_2 = 40^\circ$ .)

Der Rand der Schale ist starr eingespannt.

Nach (1132) ist mit  $f = 2a$ ,  $\mu = 1/6$ ,  $\alpha_2 = 40^\circ$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\beta 2,0} &= -\frac{1}{Eh} \frac{\gamma a^2}{6} \left[ 3 \frac{f}{a} (1 - \mu) - 6 \cos \alpha_2 + 2(1 + \mu) \frac{1 - \cos^3 \alpha_2}{\sin^2 \alpha_2} \right] \\ &= -0,585 \frac{\gamma a^2}{Eh}, \end{aligned}$$

$$\vartheta_{2,0} = \frac{\gamma a^2}{Eh} \sin \alpha_2 = 0,643 \frac{\gamma a^2}{Eh}$$

Aus (1185) folgt mit  $a/h = 25$

$$k = \sqrt{25 \sqrt{3} \cdot 0,9722} = 6,53.$$

Die Randbedingungen (1195) lauten nunmehr mit  $C = C_1 \gamma a^2$

$$0,643 + C_1 85,3 \sin \psi = 0,$$

$$-0,585 - C_1 9,22 \sin\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) = 0;$$

oder

$$-5,93 \sin\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) + 49,9 \sin \psi = 0,$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{5,93}{49,9 \sqrt{2} - 5,93} = 0,0917,$$

$$\psi = 5^\circ 14' \equiv 0,0915,$$

$$C_1 = -0,0826, \quad C = -0,0826 \gamma a^2.$$

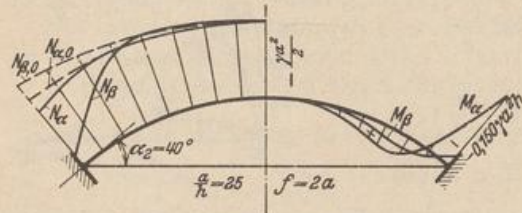


Abb. 809. Schnittkräfte im eingespannten Stützboden.

(Für  $\vartheta_{2,0} \approx 0$  ist  $\psi = 0$ ,  $C \approx -0,0896 \gamma a^2$ .)

Die Schnittkräfte infolge der Randstörung sind nach (1192)

$$\bar{N}_\alpha = 0,0826 \gamma a^2 e^{-k\omega} \cos(k\omega + \psi) \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\bar{N}_\beta = 0,762 \gamma a^2 e^{-k\omega} \sin\left(k\omega + \psi + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\bar{M}_\alpha = -0,223 \gamma a^2 h e^{-k\omega} \cos\left(k\omega + \psi + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\frac{B \operatorname{ctg} \alpha}{a} \bar{\vartheta} = -0,0242 \gamma a^2 h \operatorname{ctg} \alpha e^{-k\omega} \sin(k\omega + \psi),$$

$$\bar{M}_\beta = \mu \bar{M}_\alpha - \frac{B \operatorname{ctg} \alpha}{a} \bar{\vartheta}.$$

Die Schnittkräfte sind in Abb. 809 dargestellt.

Verbindung einer Kugelschale mit verwandten Tragwerken. Der Spannungszustand eines elastischen Gebildes aus einer Kugelschale mit verwandten Tragwerken erfährt keine Änderung, wenn die Verbindung am Anschluß der Kugel-



schale durch einen Breitenschnitt gelöst wird und die inneren Kräfte an beiden Ufern als äußere Kräfte zur Belastung hinzutreten. Diese sind rotationssymmetrisch, die Längskraft  $N_\alpha$  nach S. 745 aus den Gleichgewichtsbedingungen bekannt, die Querkraft  $Q_\alpha$  oder ihre waagerechte Komponente  $H = X_1$  und das Anschlußmoment  $M_\alpha = X_2$  statisch unbestimmt. Sie lassen sich aus der Bedingung berechnen, daß die gegenseitige Verschiebung  $\delta_1$  (positiv im Sinne von  $X_1$ ) und die gegenseitige Verdrehung  $\delta_2$  (positiv im Sinne von  $X_2$ ) der beiden Ufer des Breitenschnittes Null sein müssen, wenn die Formänderung des vorgegebenen Flächentragwerks mit der Formänderung des Hauptsystems durch die Belastung und die überzähligen Schnittkräfte  $X_1, X_2$  übereinstimmt. Diese wird ebenso wie in Abschn. 24 als virtuelle Arbeit berechnet. Nach Abb. 810 ist

$$I_1 \delta_1 = I_1 (\delta_{10} + X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12}) = 0,$$

$$I_2 \delta_2 = I_2 (\delta_{20} + X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22}) = 0.$$

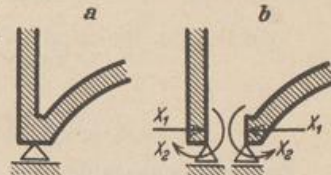


Abb. 810.

Jede Komponente  $\delta_{10}, \delta_{11}$  usw. des Verschiebungszustandes besteht aus zwei Teilen ( $\delta_{10} = \delta_{10,1} + \delta_{10,2}$ ,  $\delta_{11} = \delta_{11,1} + \delta_{11,2}$  usw.), von denen  $\delta_{10,1}, \delta_{11,1}$  usw. durch die Formänderung der Kugelschale,  $\delta_{10,2}, \delta_{11,2}$  usw. durch die Formänderung des angeschlossenen Tragwerks, also durch die Formänderung torsionssteifer Ringe, Platten, Kegel- oder Zylinderschalen hervorgerufen werden.

Die Vorzahlen  $\delta_{11,1}, \delta_{12,1}$  werden aus (1192) für die Randbedingungen der Abb. 810 berechnet.

1. Belastungszustand  $X_1 = 1$  (Abb. 810).

Randbedingungen:

$$M_{\alpha 2,1} = 0, \quad Q_{\alpha 2,1} = -\sin \alpha_2; \quad \psi = \frac{\pi}{4}, \quad C = -\sqrt{2} \sin \alpha_2.$$

$$\delta_{11,1} = \frac{2k a}{E h} \sin^2 \alpha_2, \quad \delta_{21,1} = -\frac{2k^2}{E h} \sin \alpha_2. \quad (1197)$$

Schnittkräfte nach (1192).

$$\left. \begin{aligned} N_{\alpha,1} &= \sqrt{2} \sin \alpha_2 e^{-k\omega} \cos \left( k\omega + \frac{\pi}{4} \right) \operatorname{ctg} \alpha, \\ N_{\beta,1} &= 2k \sin \alpha_2 e^{-k\omega} \cos(k\omega), \\ \vartheta_{\alpha,1} &= -\frac{2\sqrt{2}k^2}{hE} e^{-k\omega} \sin \alpha_2 \sin \left( k\omega + \frac{\pi}{4} \right), \\ M_{\alpha,1} &= \frac{kh}{\sqrt{3}(1-\mu^2)} e^{-k\omega} \sin \alpha_2 \sin(k\omega), \\ Q_{\alpha,1} &= -\sqrt{2} e^{-k\omega} \sin \alpha_2 \cos \left( k\omega + \frac{\pi}{4} \right), \\ \Delta r_{\alpha,1} &= \frac{2ka}{Eh} \sin \alpha_2 e^{-k\omega} \cos(k\omega) \sin \alpha. \end{aligned} \right\} (1198)$$

2. Belastungszustand  $X_2 = 1$  (Abb. 810).

Randbedingungen:

$$M_{\alpha 2,2} = -1, \quad Q_{\alpha 2,2} = 0; \quad \psi = \frac{\pi}{2}, \quad C = \frac{ahE}{2k^3 B}.$$

$$\delta_{22,1} = \frac{a}{kB}, \quad \delta_{12,1} = -\frac{a^2}{2k^2 B} \sin \alpha_2 = -\frac{2k^2}{Eh} \sin \alpha_2. \quad (1199)$$



Schnittkräfte nach (1192).

$$\left. \begin{aligned} N_{\alpha,2} &= \frac{a h E}{2 k^3 B} e^{-k\omega} \sin(k\omega) \operatorname{ctg} \alpha, \\ N_{\beta,2} &= -\frac{a h E}{\sqrt{2} k^3 B} e^{-k\omega} \cos\left(k\omega + \frac{\pi}{4}\right), \\ \vartheta_{\alpha,2} &= \frac{a}{k B} e^{-k\omega} \cos(k\omega), \\ M_{\alpha,2} &= -\sqrt{2} e^{-k\omega} \sin\left(k\omega + \frac{\pi}{4}\right), \\ Q_{\alpha,2} &= -\frac{a h E}{2 k^3 B} e^{-k\omega} \sin(k\omega), \\ \Delta r_{\alpha,2} &= -\frac{a^2}{\sqrt{2} k^3 B} e^{-k\omega} \sin \alpha \cos\left(k\omega + \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned} \right\} (1200)$$

Die Belastungszahlen  $\delta_{10,1}$ ,  $\delta_{20,1}$  gelten für die nach Abb. 810 b abgestützte Kugelschale. Ihr Spannungszustand ist statisch unbestimmt, da die Stützkkräfte nicht tangential zur Mittelfläche eingetragen werden. Hierzu ist noch eine Schubkraft  $H = -N_{\alpha} \cos \alpha$  notwendig (vgl. S. 752). Die Belastungszahlen werden daher in die Anteile  $\bar{\delta}_{10,1}$ ,  $\bar{\delta}_{20,1}$  für die statisch bestimmt gestützte Kugelschale und die Anteile  $\delta'_{10,1}$ ,  $\delta'_{20,1}$  für die Kugelschale mit den Randkräften  $X_1 = H$ ,  $X_2 = 0$  zerlegt. Die Anteile  $\bar{\delta}_{10,1}$ ,  $\bar{\delta}_{20,1}$  sind nahezu die gleichen wie beim Membranzustand und daher nach S. 751 ff. bekannt. Die Anteile  $\delta'_{10,1}$ ,  $\delta'_{20,1}$  sind mit (1197)

$$\delta'_{10,1} = H \delta_{11,1}, \quad \delta'_{20,1} = H \delta_{21,1}. \quad (1201)$$

Damit lauten die vollständigen Belastungszahlen

$$\delta_{10,1} = \bar{\delta}_{10,1} + \delta'_{10,1}, \quad \delta_{20,1} = \bar{\delta}_{20,1} + \delta'_{20,1}.$$

Bolle, E.: Festigkeitsberechnung von Kugelschalen. Zürich 1916. — Lichtenstern, E.: Die biegegesteifste Kugelschale mit linear veränderlicher Wandstärke. Z. angew. Math. Mech. 1932 S. 347.



Abb. 811.

**b) Die biegegesteife Kegelschale mit gleichbleibender Wandstärke.** Der Krümmungshalbmesser  $R_{\beta}$  ist unendlich, der Winkel  $\alpha$  konstant und daher nicht mehr als ortsbestimmende Koordinate geeignet. Er wird durch den Abschnitt  $y$  der Mantellinie ersetzt, so daß  $ds = R_{\beta} d\alpha = dy$ ,  $R_{\alpha} = y \operatorname{ctg} \alpha$ . Damit lassen sich die allgemeinen Beziehungen (1176), (1177) zwischen den Komponenten des Spannungs- und Verschiebungszustandes mit ( )' für  $d( )/dy$  folgendermaßen anschreiben:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\alpha} = \varepsilon_{\nu} = v', \quad \varepsilon_{\beta} = \frac{v - w \operatorname{tg} \alpha}{y}, \quad \kappa_{\alpha} = \kappa_{\nu} = \vartheta', \\ \kappa_{\beta} = \frac{\vartheta}{y}, \quad \vartheta = w', \end{aligned} \right\} (1202)$$

$$\left. \begin{aligned} N_{\nu} = D \left( v' + \mu \frac{v - w \operatorname{tg} \alpha}{y} \right), \quad N_{\beta} = D \left( \frac{v - w \operatorname{tg} \alpha}{y} + \mu v' \right), \quad D = \frac{h E}{1 - \mu^2}, \\ M_{\nu} = -B \left( \vartheta' + \mu \frac{\vartheta}{y} \right), \quad M_{\beta} = -B \left( \mu \vartheta' + \frac{\vartheta}{y} \right), \quad B = \frac{E h^3}{12 (1 - \mu^2)}. \end{aligned} \right\} (1203)$$

Belastung und Schnittkräfte eines differentialen Schalenabschnitts unterliegen den Gleichgewichtsbedingungen (1178). Sie lauten für die Längskräfte

$$(N_{\nu} y)' - N_{\beta} + p_{\nu} y = 0 \quad \text{und} \quad (Q_{\nu} y)' + N_{\beta} \operatorname{tg} \alpha + p_z y = 0 \quad (1204)$$

oder in einer Gleichung zusammengefaßt und integriert

$$(N_{\nu} \operatorname{tg} \alpha + Q_{\nu}) y + \int (p_{\nu} \operatorname{tg} \alpha + p_z) y dy + c = 0. \quad (1205)$$