



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Die Statik im Stahlbetonbau**

**Beyer, Kurt**

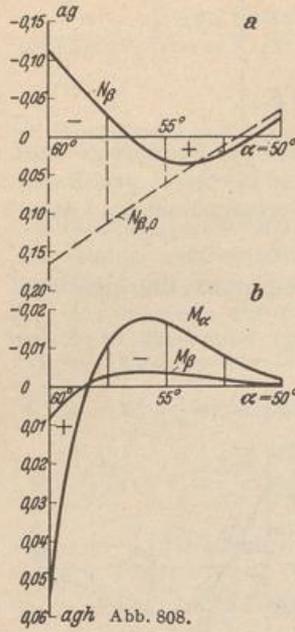
**Berlin [u.a.], 1956**

Verbindung einer Kugelschale mit verwandten Tragwerken

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

Die Schnittkräfte nach (1192) infolge der Randstörung werden nun



$$\bar{N}_\alpha = -0,0127 a g e^{-k\omega} \cos(k\omega + \psi) \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\bar{N}_\beta = -0,332 a g e^{-k\omega} \sin\left(k\omega + \psi + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\bar{M}_\alpha = 0,0973 a g h e^{-k\omega} \cos\left(k\omega + \psi + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\frac{B \operatorname{ctg} \alpha}{a} \bar{\vartheta} = 0,00372 a g h \operatorname{ctg} \alpha e^{-k\omega} \sin(k\omega + \psi),$$

$$\bar{M}_\beta = \mu \bar{M}_\alpha - \frac{B \operatorname{ctg} \alpha}{a} \bar{\vartheta}.$$

Die Schnittkräfte sind für die Randzone  $50^\circ < \alpha < 60^\circ$  in Abb. 808 dargestellt.

**Schnittkräfte in einem Stützboden bei Wasserauflast  $f = 2a$ .**  
(Vgl. Abb. 781,  $\alpha_2 = 40^\circ$ .)

Der Rand der Schale ist starr eingespannt.

Nach (1132) ist mit  $f = 2a$ ,  $\mu = 1/6$ ,  $\alpha_2 = 40^\circ$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\beta 2,0} &= -\frac{1}{Eh} \frac{\gamma a^2}{6} \left[ 3 \frac{f}{a} (1 - \mu) - 6 \cos \alpha_2 + 2(1 + \mu) \frac{1 - \cos^3 \alpha_2}{\sin^2 \alpha_2} \right] \\ &= -0,585 \frac{\gamma a^2}{Eh}, \end{aligned}$$

$$\vartheta_{2,0} = \frac{\gamma a^2}{Eh} \sin \alpha_2 = 0,643 \frac{\gamma a^2}{Eh}$$

Aus (1185) folgt mit  $a/h = 25$

$$k = \sqrt{25 \sqrt{3} \cdot 0,9722} = 6,53.$$

Die Randbedingungen (1195) lauten nunmehr mit  $C = C_1 \gamma a^2$

$$0,643 + C_1 85,3 \sin \psi = 0,$$

$$-0,585 - C_1 9,22 \sin\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) = 0;$$

oder

$$-5,93 \sin\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) + 49,9 \sin \psi = 0,$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{5,93}{49,9 \sqrt{2} - 5,93} = 0,0917,$$

$$\psi = 5^\circ 14' \equiv 0,0915,$$

$$C_1 = -0,0826, \quad C = -0,0826 \gamma a^2.$$

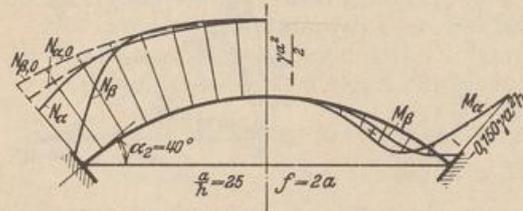


Abb. 809. Schnittkräfte im eingespannten Stützboden.

(Für  $\vartheta_{2,0} \approx 0$  ist  $\psi = 0$ ,  $C \approx -0,0896 \gamma a^2$ .)

Die Schnittkräfte infolge der Randstörung sind nach (1192)

$$\bar{N}_\alpha = 0,0826 \gamma a^2 e^{-k\omega} \cos(k\omega + \psi) \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\bar{N}_\beta = 0,762 \gamma a^2 e^{-k\omega} \sin\left(k\omega + \psi + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\bar{M}_\alpha = -0,223 \gamma a^2 h e^{-k\omega} \cos\left(k\omega + \psi + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\frac{B \operatorname{ctg} \alpha}{a} \bar{\vartheta} = -0,0242 \gamma a^2 h \operatorname{ctg} \alpha e^{-k\omega} \sin(k\omega + \psi),$$

$$\bar{M}_\beta = \mu \bar{M}_\alpha - \frac{B \operatorname{ctg} \alpha}{a} \bar{\vartheta}.$$

Die Schnittkräfte sind in Abb. 809 dargestellt.

Verbindung einer Kugelschale mit verwandten Tragwerken. Der Spannungszustand eines elastischen Gebildes aus einer Kugelschale mit verwandten Tragwerken erfährt keine Änderung, wenn die Verbindung am Anschluß der Kugel-

schale durch einen Breitenschnitt gelöst wird und die inneren Kräfte an beiden Ufern als äußere Kräfte zur Belastung hinzutreten. Diese sind rotationssymmetrisch, die Längskraft  $N_\alpha$  nach S. 745 aus den Gleichgewichtsbedingungen bekannt, die Querkraft  $Q_\alpha$  oder ihre waagerechte Komponente  $H = X_1$  und das Anschlußmoment  $M_\alpha = X_2$  statisch unbestimmt. Sie lassen sich aus der Bedingung berechnen, daß die gegenseitige Verschiebung  $\delta_1$  (positiv im Sinne von  $X_1$ ) und die gegenseitige Verdrehung  $\delta_2$  (positiv im Sinne von  $X_2$ ) der beiden Ufer des Breitenschnittes Null sein müssen, wenn die Formänderung des vorgegebenen Flächentragwerks mit der Formänderung des Hauptsystems durch die Belastung und die überzähligen Schnittkräfte  $X_1, X_2$  übereinstimmt. Diese wird ebenso wie in Abschn. 24 als virtuelle Arbeit berechnet. Nach Abb. 810 ist

$$I_1 \delta_1 = I_1 (\delta_{10} + X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12}) = 0,$$

$$I_2 \delta_2 = I_2 (\delta_{20} + X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22}) = 0.$$

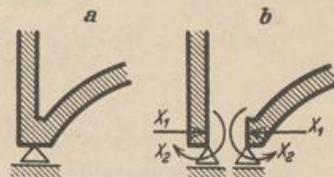


Abb. 810.

Jede Komponente  $\delta_{10}, \delta_{11}$  usw. des Verschiebungszustandes besteht aus zwei Teilen ( $\delta_{10} = \delta_{10,1} + \delta_{10,2}$ ,  $\delta_{11} = \delta_{11,1} + \delta_{11,2}$  usw.), von denen  $\delta_{10,1}, \delta_{11,1}$  usw. durch die Formänderung der Kugelschale,  $\delta_{10,2}, \delta_{11,2}$  usw. durch die Formänderung des angeschlossenen Tragwerks, also durch die Formänderung torsionssteifer Ringe, Platten, Kegel- oder Zylinderschalen hervorgerufen werden.

Die Vorzahlen  $\delta_{11,1}, \delta_{12,1}$  werden aus (1192) für die Randbedingungen der Abb. 810 berechnet.

1. Belastungszustand  $X_1 = 1$  (Abb. 810).

Randbedingungen:

$$M_{\alpha 2,1} = 0, \quad Q_{\alpha 2,1} = -\sin \alpha_2; \quad \psi = \frac{\pi}{4}, \quad C = -\sqrt{2} \sin \alpha_2.$$

$$\delta_{11,1} = \frac{2ka}{Eh} \sin^2 \alpha_2, \quad \delta_{21,1} = -\frac{2k^2}{Eh} \sin \alpha_2. \quad (1197)$$

Schnittkräfte nach (1192).

$$\left. \begin{aligned} N_{\alpha,1} &= \sqrt{2} \sin \alpha_2 e^{-k\omega} \cos \left( k\omega + \frac{\pi}{4} \right) \operatorname{ctg} \alpha, \\ N_{\beta,1} &= 2k \sin \alpha_2 e^{-k\omega} \cos(k\omega), \\ \vartheta_{\alpha,1} &= -\frac{2\sqrt{2}k^2}{hE} e^{-k\omega} \sin \alpha_2 \sin \left( k\omega + \frac{\pi}{4} \right), \\ M_{\alpha,1} &= \frac{kh}{\sqrt{3}(1-\mu^2)} e^{-k\omega} \sin \alpha_2 \sin(k\omega), \\ Q_{\alpha,1} &= -\sqrt{2} e^{-k\omega} \sin \alpha_2 \cos \left( k\omega + \frac{\pi}{4} \right), \\ \Delta r_{\alpha,1} &= \frac{2ka}{Eh} \sin \alpha_2 e^{-k\omega} \cos(k\omega) \sin \alpha. \end{aligned} \right\} (1198)$$

2. Belastungszustand  $X_2 = 1$  (Abb. 810).

Randbedingungen:

$$M_{\alpha 2,2} = -1, \quad Q_{\alpha 2,2} = 0; \quad \psi = \frac{\pi}{2}, \quad C = \frac{ahE}{2k^3B}.$$

$$\delta_{22,1} = \frac{a}{kB}, \quad \delta_{12,1} = -\frac{a^2}{2k^2B} \sin \alpha_2 = -\frac{2k^2}{Eh} \sin \alpha_2. \quad (1199)$$

Schnittkräfte nach (1192).

$$\left. \begin{aligned} N_{\alpha,2} &= \frac{a h E}{2 k^3 B} e^{-k\omega} \sin(k\omega) \operatorname{ctg} \alpha, \\ N_{\beta,2} &= -\frac{a h E}{\sqrt{2} k^3 B} e^{-k\omega} \cos\left(k\omega + \frac{\pi}{4}\right), \\ \vartheta_{\alpha,2} &= \frac{a}{k B} e^{-k\omega} \cos(k\omega), \\ M_{\alpha,2} &= -\sqrt{2} e^{-k\omega} \sin\left(k\omega + \frac{\pi}{4}\right), \\ Q_{\alpha,2} &= -\frac{a h E}{2 k^3 B} e^{-k\omega} \sin(k\omega), \\ \Delta r_{\alpha,2} &= -\frac{a^2}{\sqrt{2} k^3 B} e^{-k\omega} \sin \alpha \cos\left(k\omega + \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned} \right\} (1200)$$

Die Belastungszahlen  $\delta_{10,1}$ ,  $\delta_{20,1}$  gelten für die nach Abb. 810 b abgestützte Kugelschale. Ihr Spannungszustand ist statisch unbestimmt, da die Stützkkräfte nicht tangential zur Mittelfläche eingetragen werden. Hierzu ist noch eine Schubkraft  $H = -N_{\alpha} \cos \alpha$  notwendig (vgl. S. 752). Die Belastungszahlen werden daher in die Anteile  $\bar{\delta}_{10,1}$ ,  $\bar{\delta}_{20,1}$  für die statisch bestimmt gestützte Kugelschale und die Anteile  $\delta'_{10,1}$ ,  $\delta'_{20,1}$  für die Kugelschale mit den Randkräften  $X_1 = H$ ,  $X_2 = 0$  zerlegt. Die Anteile  $\bar{\delta}_{10,1}$ ,  $\bar{\delta}_{20,1}$  sind nahezu die gleichen wie beim Membranzustand und daher nach S. 751 ff. bekannt. Die Anteile  $\delta'_{10,1}$ ,  $\delta'_{20,1}$  sind mit (1197)

$$\delta'_{10,1} = H \delta_{11,1}, \quad \delta'_{20,1} = H \delta_{21,1}. \quad (1201)$$

Damit lauten die vollständigen Belastungszahlen

$$\delta_{10,1} = \bar{\delta}_{10,1} + \delta'_{10,1}, \quad \delta_{20,1} = \bar{\delta}_{20,1} + \delta'_{20,1}.$$

Bolle, E.: Festigkeitsberechnung von Kugelschalen. Zürich 1916. — Lichtenstern, E.: Die biegegesteifste Kugelschale mit linear veränderlicher Wandstärke. Z. angew. Math. Mech. 1932 S. 347.

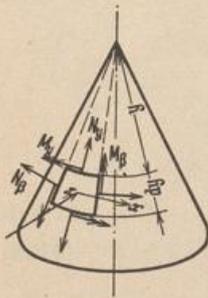


Abb. 811.

**b) Die biegegesteife Kegelschale mit gleichbleibender Wandstärke.** Der Krümmungshalbmesser  $R_{\beta}$  ist unendlich, der Winkel  $\alpha$  konstant und daher nicht mehr als ortsbestimmende Koordinate geeignet. Er wird durch den Abschnitt  $y$  der Mantellinie ersetzt, so daß  $ds = R_{\beta} d\alpha = dy$ ,  $R_{\alpha} = y \operatorname{ctg} \alpha$ . Damit lassen sich die allgemeinen Beziehungen (1176), (1177) zwischen den Komponenten des Spannungs- und Verschiebungszustandes mit ( )' für  $d( )/dy$  folgendermaßen anschreiben:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\alpha} = \varepsilon_{\nu} = v', \quad \varepsilon_{\beta} = \frac{v - w \operatorname{tg} \alpha}{y}, \quad \kappa_{\alpha} = \kappa_{\nu} = \vartheta', \\ \kappa_{\beta} = \frac{\vartheta}{y}, \quad \vartheta = w', \end{aligned} \right\} (1202)$$

$$\left. \begin{aligned} N_{\nu} = D \left( v' + \mu \frac{v - w \operatorname{tg} \alpha}{y} \right), \quad N_{\beta} = D \left( \frac{v - w \operatorname{tg} \alpha}{y} + \mu v' \right), \quad D = \frac{h E}{1 - \mu^2}, \\ M_{\nu} = -B \left( \vartheta' + \mu \frac{\vartheta}{y} \right), \quad M_{\beta} = -B \left( \mu \vartheta' + \frac{\vartheta}{y} \right), \quad B = \frac{E h^3}{12 (1 - \mu^2)}. \end{aligned} \right\} (1203)$$

Belastung und Schnittkräfte eines differentialen Schalenabschnitts unterliegen den Gleichgewichtsbedingungen (1178). Sie lauten für die Längskräfte

$$(N_{\nu} y)' - N_{\beta} + p_{\nu} y = 0 \quad \text{und} \quad (Q_{\nu} y)' + N_{\beta} \operatorname{tg} \alpha + p_z y = 0 \quad (1204)$$

oder in einer Gleichung zusammengefaßt und integriert

$$(N_{\nu} \operatorname{tg} \alpha + Q_{\nu}) y + \int (p_{\nu} \operatorname{tg} \alpha + p_z) y dy + c = 0. \quad (1205)$$