Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

c) Die Zylinderschale

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

schiebungs- und Spannungszustand an den beiden Rändern bestimmt werden müssen. Da jedoch die Wirkung aus den Randstörungen schnell abklingt, genügt bei offenen Kegelschalen mit $5r_1 < r_2$ eine Näherungslösung, bei welcher die Integrationskonstanten C_1, ψ_1 zunächst ebenso wie bei der geschlossenen Kegelschale für $C_2 = 0$, $\psi_2 = 0$ bestimmt werden, um sie bei der Berechnung der Integrationskonstanten C_2, ψ_2 aus der vollständigen Lösung mit den Bedingungen am Rande $y = a$ zu verwenden.

Um die elastischen Eigenschaften der Kegelschale mit denjenigen der Zylinderschale zu vergleichen, können die allgemeinen Differentialgleichungen für die Spannungen und Verschiebungen auf S. 774 nach F. Kann auch dadurch vereinfacht werden, daß die Biegungssteifigkeit der Schale im Breitenschnitt, die Querzusammenziehung des Baustoffs und die Verschiebung v des Breitenschnittes in Richtung der y-Achse vernachlässigt werden ($M_\beta = 0$, $\mu = 0$, $v = 0$). In diesem Falle folgt aus den Gleichgewichtsbedingungen auf S. 774

$$\left.\begin{aligned} &(M_y y)'' = (Q_y y)' = -N_\beta \operatorname{tg}\alpha - p_z y \quad \text{und mit} \quad N_\beta = -D\frac{w}{y}\operatorname{tg}\alpha \\ &B\,(y\,w'')'' + w\frac{D\operatorname{tg}^2\alpha}{y} - p_z y = 0\,. \end{aligned}\right\} \quad (1227)$$

Diese Differentialgleichung der Biegelinie des Meridians zerfällt nach H. Reißner in zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die mit Zylinderfunktionen integriert werden können.

Um die mathematischen Schwierigkeiten bei der Integration der Differentialgleichungen (1207) und (1209) zu umgehen, können die Ableitungen der Funktionen ϑ, Q_y, $y^2 Q_y''$ in den Differentialgleichungen (1213) und in den Differentialbeziehungen (1221) der Schnittkräfte nach S. 130 durch Differenzenquotienten ersetzt werden, so daß fünfgliedrige Differenzengleichungen entstehen. Diese werden für die Intervallgrenzen einer Aufteilung des Integrationsbereichs $l - a$ in Strecken Δy angeschrieben und bilden zusammen mit den Randbedingungen in den Breitenschnitten $y = a$ und $y = l$ einen vollständigen Ansatz zur eindeutigen Berechnung der Unbekannten. Die Rechenvorschrift dient auf S. 789 zur Untersuchung des Spannungszustandes einer Zylinderschale mit veränderlicher Wanddicke.

Dubois, F.: Über die Festigkeit der Kegelschale. Diss. Zürich 1917. — Honegger, E.: Festigkeitsberechnung von Kegelschalen mit linear veränderlicher Wandstärke. Luzern 1919. — Kann, F.: Kegelförmige Behälterböden, Dächer und Silotrichter. Forscherarb. Eisenbeton Heft 29. Berlin 1921.

c) Die Zylinderschale. Grundlagen der Lösung. Die allgemeinen Beziehungen (1177) zwischen Verzerrung und Verschiebung der Mittelfläche werden durch die geometrischen Eigenschaften der Zylinderschale $R_\beta = \infty$, $R_\beta d\alpha = dy$, $\alpha = 90^0$, $\operatorname{ctg}\alpha = 0$, $R_\alpha = a = \text{const}$ vereinfacht. Mit der Abkürzung $(\ )'$ für $d(\ )/dy$ ist nach (1177)

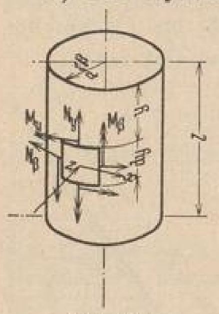

Abb. 816.

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_\alpha = \varepsilon_y = v', \quad \varepsilon_\beta = -\frac{w}{a}, \quad \varkappa_\alpha = \varkappa_y = \vartheta', \quad \varkappa_\beta = 0, \\ &\vartheta = w' = -a\left(\frac{N_\beta - \mu N_y}{E h}\right)', \end{aligned}\right\} \quad (1228)$$

so daß die Schnittkräfte nach dem Hookeschen Gesetz (1176) folgendermaßen angeschrieben werden können:

$$\left.\begin{aligned} &N_y = D\left(v' - \mu\frac{w}{a}\right), \quad N_\beta = D\left(-\frac{w}{a} + \mu v'\right), \quad M_y = -B\vartheta', \quad M_\beta = -\mu B\vartheta', \\ &D = \frac{E h}{1 - \mu^2}, \quad B = \frac{E h^3}{12(1 - \mu^2)}\,. \end{aligned}\right\} \quad (1229)$$

Sie unterliegen den Gleichgewichtsbedingungen (1178)

$$N_y' + p_y = 0\,, \qquad Q_y' + \frac{N_\beta}{a} + p_z = 0\,, \qquad M_y' - Q_y = 0\,. \tag{1230}$$

Lösung für unveränderliche Wandstärke h. Die Steifigkeit D der Schale gegen Dehnung und ihre Steifigkeit B gegen Biegung sind konstant. In diesem Falle liefert die dritte Gleichgewichtsbedingung (1230) und die Zusammenfassung der ersten beiden Gleichgewichtsbedingungen in Verbindung mit (1228) und (1229) zwei simultane totale Differentialgleichungen.

$$\vartheta'' = -\frac{Q_y}{B}\,, \qquad Q_y'' = \frac{D(1-\mu^2)}{a^2}\,\vartheta - p_z' + \frac{\mu}{a}\,p_y\,. \tag{1231}$$

Durch die Elimination der einen Unbekannten entsteht die Differentialgleichung für die andere.

$$\left.\begin{aligned} &\vartheta^{IV} + \frac{4}{L^4}\,\vartheta = \frac{1}{B}\left(p_z' - \frac{\mu}{a}\,p_y\right), \qquad Q_y^{IV} + \frac{4}{L^4}\,Q_y = -\left(p_z' - \frac{\mu}{a}\,p_y\right)'',\\ &\qquad\qquad \frac{1}{L^4} = \frac{3\,(1-\mu^2)}{h^2\cdot a^2}\,. \end{aligned}\right\} \tag{1232}$$

Die Verknüpfung von $M_y'' = Q_y'$ mit den übrigen Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen liefert die Differentialgleichung der Biegelinie des Meridians

$$w^{IV} + \frac{4}{L^4}\,w = \frac{1}{B}\left(p_z + \mu\,\frac{N_y}{a}\right), \qquad N_y = -\int p_y\,dy + C\,. \tag{1233}$$

Die vollständige Lösung der Differentialgleichungen für Q_y oder w besteht aus einem von der Belastung p_y, p_z abhängigen partikulären Integral Q_{y0}, w_0 der inhomogenen Gleichung und aus der allgemeinen Lösung $\overline{Q}_y$, $\overline{w}$ der homogenen Gleichung mit vier Integrationskonstanten.

$$Q_y = Q_{y0} + \overline{Q}_y \qquad w = w_0 + \overline{w}\,. \tag{1234}$$

Flüssigkeitsfüllung:

$$p_y = 0\,,\quad N_y = 0\,,\quad p_z = -\gamma y\,,\quad Q_{y0} = 0\,,\quad w_0 = -\frac{L^4}{4B}\,\gamma y = -\frac{a^2}{Eh}\,\gamma y\,. \tag{1235}$$

Füllgut im Sinne von S. 14:

$$\left.\begin{aligned} &p_y = 0\,,\quad N_y = 0\,,\quad p_z = -p_{s,\max}\,(1 - e^{-y/y_0})\,,\quad Q_{y0} = \frac{p_{s,\max}\,y_0}{1 + 4\left(\frac{y_0}{L}\right)^4}\,e^{-y/y_0}\,,\\ &\qquad w_0 = -p_{s,\max}\left[\frac{a^2}{Eh} - \frac{1}{B}\,\frac{y_0^4}{1 + 4\left(\frac{y_0}{L}\right)^4}\,e^{-y/y_0}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{1236}$$

Die homogenen Differentialgleichungen

$$\frac{d^4\overline{Q}_y}{d\,(y/L)^4} + 4\,\overline{Q}_y = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d^4\overline{w}}{d\,(y/L)^4} + 4\,\overline{w} = 0 \tag{1237}$$

sind auf S. 769 gelöst worden. Das Ergebnis $\overline{Q}_y$, $\overline{w}$ unterscheidet sich allein durch die Bedeutung der Integrationskonstanten. Sind diese aus den Randbedingungen bestimmt worden, so lassen sich alle Komponenten des Spannungs- und Verschiebungszustandes anschreiben. Aus $Q_y(y)$ wird

$$\left.\begin{aligned} N_y &= -\int p_y\,dy + C\,, \qquad & E\,h\,w &= a^2\,(Q_y' + p_z) + \mu\,a\,N_y\,,\\ N_\beta &= -a\,(Q_y' + p_z)\,, \qquad & E\,h\,\vartheta &= a^2\,(Q_y'' + p_z') - \mu\,a\,p_y\,. \end{aligned}\right\} \tag{1238}$$

Aus $w(y)$ folgt

$$\left.\begin{aligned} &N_y = -\int p_y\,dy + C\,, \quad N_\beta = -E\,h\,\frac{w}{a} + \mu\,N_y\,, \quad \vartheta = w'\,,\\ &M_y = -B\,w''\,, \quad M_\beta = -\mu\,B\,w''\,, \quad Q_y = -B\,w'''\,. \end{aligned}\right\} \tag{1239}$$

Die Untersuchung wird daher auf die Ableitung des Spannungszustandes aus den Verschiebungen w beschränkt. Nach Abb. 816 ist mit (1237)

$$\frac{L^4}{l^4}\,\frac{d^4\overline{w}}{d(y/l)^4}+4\,\overline{w}=0 \quad \text{oder} \quad \frac{d^4\overline{w}}{d(\lambda\,\eta)^4}+4\,\overline{w}=0\,, \qquad \lambda=\frac{l}{L}\,, \qquad \eta=\frac{y}{l}\,. \tag{1240}$$

Der Buchstabe L bezeichnet eine für jede Zylinderschale charakteristische Länge, welche von den Abmessungen des Breitenschnittes und von den elastischen Eigenschaften des Baustoffs abhängt. Sie beträgt bei Verwendung von Eisenbeton mit $\mu=1/6$

$$L=a:\sqrt{\frac{a}{h}\sqrt{3\,(1-\mu^2)}}=a:1{,}31\sqrt{\frac{a}{h}}\,. \tag{1241}$$

$l/L=\lambda$ ist eine Schalenkonstante, $y/l=\eta$ die unbenannte, ortsbestimmende Koordinate. Nach S. 769 ist

$$\overline{w}=C_1\,e^{-\lambda\eta}\cos\lambda\,\eta+C_2\,e^{-\lambda\eta}\sin\lambda\,\eta+C_3\,e^{\lambda\eta}\cos\lambda\,\eta+C_4\,e^{\lambda\eta}\sin\lambda\,\eta \tag{1242}$$

und mit $\qquad C_1=A_1\cos\gamma_1\,, \qquad C_2=-A_1\sin\gamma_1$ usw.

auch $\qquad \overline{w}=A_1\,e^{-\lambda\eta}\cos(\lambda\eta+\gamma_1)+A_2\,e^{+\lambda\eta}\cos(\lambda\eta+\gamma_2)\,.$

Der abklingende Anteil der Funktion allein ist eine periodisch gedämpfte Schwingung. Die halbe Wellenlänge ist $l_0=\pi l/\lambda=\pi L$, das logarithmische Dekrement π, so daß die Amplituden der Funktion $\overline{w}$ und aller ihrer Ableitungen mit jeder halben Welle auf 1/23,14 des vorhergehenden Ausschlags zurückgehen. Sie klingen also um so schneller ab, je größer λ oder je kleiner L ist. Aus diesem Grunde gelten Schalen mit $l>7L$ als unendlich lang nach einer Richtung. Bei diesen sind die Integrationskonstanten C_3, C_4 oder A_2, γ_2 Null, damit die Wirkung der Randkräfte in $\eta=0$ für $\eta=\infty$ verschwindet.

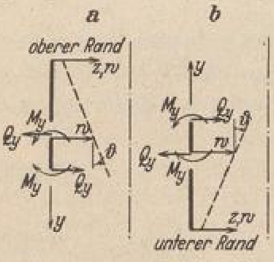

Abb. 817.

Die allgemeine Rechenvorschrift zerfällt daher bei hohen Zylinderschalen mit $l>7L$ in zwei Teillösungen für den unendlich langen Zylinder, bei welchen η sowohl für w_0 wie für $\overline{w}$ entweder vom oberen oder unteren Rande gerechnet wird (Abb. 817). In beiden Fällen ist nach (1242)

$$\left.\begin{aligned}
\overline{w}\;\; &= \;\; e^{-\lambda\eta}\,(C_1\cos\lambda\eta+C_2\sin\lambda\eta)\ \text{und mit}\ dw/d(\lambda\eta)=\overline{w}^{\cdot}\ \text{usw.}\\
\overline{w}^{\cdot} &= -e^{-\lambda\eta}\,[C_1\,(\sin\lambda\eta+\cos\lambda\eta)+C_2\,(\sin\lambda\eta-\cos\lambda\eta)]\,,\\
\overline{w}^{\cdot\cdot} &= \;\;2\,e^{-\lambda\eta}\,(C_1\sin\lambda\eta-C_2\cos\lambda\eta)\,,\\
\overline{w}^{\cdot\cdot\cdot} &= -2\,e^{-\lambda\eta}\,[C_1\,(\sin\lambda\eta-\cos\lambda\eta)-C_2\,(\sin\lambda\eta+\cos\lambda\eta)]\,,
\end{aligned}\right\} \tag{1243}$$

$$\left.\begin{aligned}
N_\beta &= -\frac{E\,h}{a}\,(w_0+\overline{w})+\mu\,N_y\,, & w' &= w_0'+\frac{\overline{w}^{\cdot}}{L}\,,\\
M_y &= -B\,w''=-B\left(w_0''+\frac{\overline{w}^{\cdot\cdot}}{L^2}\right), & Q_y &= -B\,w'''=-B\left(w_0'''+\frac{\overline{w}^{\cdot\cdot\cdot}}{L^3}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{1244}$$

Das Ergebnis (1244) gilt selbstverständlich auch für die vollständige Lösung $\overline{w}$ (1242) der homogenen Differentialgleichung. Es bedeutet mechanisch die Überlagerung der Verschiebungen w_0 und der Schnittkräfte N_{y0}, $N_{\beta 0}$ der statisch bestimmt gestützten Schale aus der vorgeschriebenen Belastung p_y, p_z mit den Anteilen $\overline{w}$, $\overline{M}_y$, $\overline{M}_\beta$ aus den Biegungsmomenten und Querkräften (X_1 bis X_4), welche durch Randstörungen, also durch statisch unbestimmten Anschluß der Schale, unverschiebliche Lagerung und Einspannung des Schalenrandes hervorgerufen werden. Sind die Randkräfte bekannt, so läßt sich der Verschiebungs- und Spannungszustand der Schale nach der folgenden Rechenvorschrift anschreiben:

$$w = w_0 + \sum X_i w_i , \qquad N_\beta = N_{\beta 0} + \sum X_i N_{\beta i}, \qquad (i = 1, \ldots, 4). \tag{1245}$$

Die Komponenten w_0, $N_{\beta 0}$ aus der Belastung der statisch bestimmt gestützten biegungssteifen Schale stimmen ebenso wie bei der Kugel- und Kegelschale nahezu mit den Schnittkräften und Verschiebungen des Längsspannungszustandes überein und sind in einzelnen Belastungsfällen mit diesen identisch. Daher können die Komponenten w_0, $N_{\beta 0}$ nach den Angaben in Abschn. 80 eingesetzt werden. Die Schnittkräfte $N_{\beta i}$, $M_{y i}$ und die Verschiebungen w_i der biegungssteifen Schale werden für $X_i = 1$ aus den homogenen Gleichungen (1237) berechnet. Dabei sind die übrigen Randkräfte Null. Die Integrationskonstanten werden dabei allerdings in der Regel für die Randbedingungen eines nach einer Richtung unendlich langen Zylinders angegeben, zumal diese Lösung bereits aus Abschn. 22 bekannt ist.

Lösung für $X_1 = 1$ (Abb. 818a):

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= \frac{2a^2}{LEh} e^{-\lambda\eta} \cos\lambda\eta , & \vartheta_1 &= -\frac{2a^2}{L^2 E h} e^{-\lambda\eta} (\sin\lambda\eta + \cos\lambda\eta), \\ N_{\beta 1} &= -\frac{2a}{L} e^{-\lambda\eta} \cos\lambda\eta , & M_{y1} &= -L\, e^{-\lambda\eta} \sin\lambda\eta , \\ & & Q_{y1} &= e^{-\lambda\eta} (\sin\lambda\eta - \cos\lambda\eta) . \end{aligned}\right\} \tag{1246}$$

Lösung für $X_2 = 1$ (Abb. 818b):

$$\left.\begin{aligned} w_2 &= -\frac{2a^2}{L^2 E h} e^{-\lambda\eta} (\cos\lambda\eta - \sin\lambda\eta) , & \vartheta_2 &= \frac{4a^2}{L^3 E h} e^{-\lambda\eta} \cos\lambda\eta , \\ N_{\beta 2} &= \frac{2a}{L^2} e^{-\lambda\eta} (\cos\lambda\eta - \sin\lambda\eta) , & M_{y2} &= e^{-\lambda\eta} (\sin\lambda\eta + \cos\lambda\eta) , \\ Q_{y2} &= -\frac{2}{L} e^{-\lambda\eta} \sin\lambda\eta . \end{aligned}\right\} \tag{1247}$$

Die Anschlußkräfte $X_i (i = 1 \ldots 4)$ sind durch die geometrischen oder statischen Bedingungen aus der vorgeschriebenen Abstützung $\delta_i (i = 1 \ldots 4)$ der beiden Schalenränder a, b oder durch ihre Verbindung mit benachbarten Bauteilen (Platte, Kegelschale, Kugelschale) bestimmt. Die Buchstaben δ_i bedeuten dann die gegenseitige Verschiebung der Ränder oder die gegenseitige Verdrehung der Endtangenten der benachbarten rotationssymmetrischen Flächen ($\delta_i = \delta_{i,1} + \delta_{i,2}$, vgl. S. 773). Auch hierbei wird in der Regel mit dem einseitig unendlich langen Zylinder gerechnet, um die Aufgabe zu vereinfachen. Nach (1246) und (1247) ist

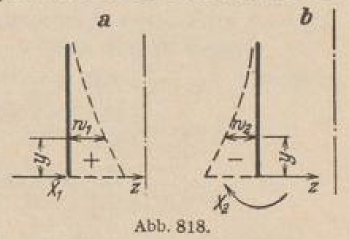

Abb. 818.

$$\delta_{11,2} = \frac{2a^2}{LEh}, \qquad \delta_{12,2} = \delta_{21,2} = -\frac{2a^2}{L^2 E h}, \qquad \delta_{22,2} = \frac{4a^2}{L^3 E h}. \tag{1248}$$

1. Starre Einspannung des Randes $a (\eta = 0)$ eines unendlich langen Zylinders.

$$\delta_1 = X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \delta_{10} = 0 ,$$
$$\delta_2 = X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + \delta_{20} = 0 .$$

Mit (1248) und $\delta_{10} = w_{a0}$, $\delta_{20} = w'_{a0}$ wird

$$\left.\begin{aligned} X_2 = M_a &= -\frac{L^2 E h}{2a^2} (w_{a0} + L w'_{a0}) , \\ X_1 = -Q_a &= -\frac{LEh}{2a^2} (2 w_{a0} + L w'_{a0}) . \end{aligned}\right\} \tag{1249}$$

2. Gelenkige Lagerung des Randes $a\,(\eta = 0)$ eines unendlich langen Zylinders.

$$M_a = X_2 = 0$$

und
$$\delta_1 = X_1\,\delta_{11} + \delta_{10} = 0\,,$$

also mit (1248)
$$X_1 = -Q_a = -\frac{L\,E\,h}{2\,a^2}\,w_{a\,0}. \tag{1250}$$

Damit sind nach (1244) auch die Formänderungen und Schnittkräfte bekannt.

Zylinderschale mit $h = \text{const}$ als Behälter (Abb. 819). Der untere Rand des Mantels ist im Behälterboden starr eingespannt, der obere Rand kann frei, gelenkig gelagert oder ebenfalls eingespannt sein. Um die strenge Lösung der Aufgabe zu begründen, sollen die Abmessungen des Behälters eine relativ große charakteristische Länge L bestimmen und daher die Integrationskonstanten der Lösung (1242) von den Bedingungen an beiden Rändern abhängen. Nach S. 760 ist

$$p_z = -\gamma\,y = -\gamma\,L\,\lambda\,\eta\,, \qquad w_0 = -\gamma\,\frac{L\,a^2}{E\,h}\,\lambda\,\eta. \tag{1251}$$

Die vollständige Lösung $w = w_0 + \overline{w}$ der inhomogenen Differentialgleichung lautet daher nach (260) transformiert

$$\begin{aligned} w = -\gamma\,\frac{L\,a^2}{E\,h}\,\lambda\,\eta + U_1 \cos\lambda\,\eta\,\mathfrak{Cof}\,\lambda\,\eta + U_2\cos\lambda\,\eta\,\mathfrak{Sin}\,\lambda\,\eta + U_3 \sin\lambda\,\eta\,\mathfrak{Cof}\,\lambda\,\eta \\ + U_4 \sin\lambda\,\eta\,\mathfrak{Sin}\,\lambda\,\eta. \end{aligned} \tag{1252}$$

Werden die Ableitungen der Funktion w nach der Veränderlichen $(\lambda\eta)$ mit $w^{\cdot}$, $w^{\cdot\cdot}$ usw. bezeichnet, so sind nach (1244)

$$\vartheta = \frac{1}{L}\,w^{\cdot}\,, \qquad M_y = -\frac{B}{L^2}\,w^{\cdot\cdot}\,, \qquad M_\beta = -\mu\,\frac{B}{L^2}\,w^{\cdot\cdot}\,, \qquad Q_y = -\frac{B}{L^3}\,w^{\cdot\cdot\cdot}. \tag{1253}$$

Die Funktionen $w^{\cdot}$ usw. sind auf S. 141 angeschrieben. Die Vorzahlen sind

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{a}\sqrt[4]{3\,\frac{a^2}{h^2}\,(1-\mu^2)}\,, \qquad \frac{B}{L^2} = \frac{E\,h^2}{4\,a}\,\frac{1}{\sqrt{3\,(1-\mu^2)}}\,, \tag{1254}$$

so daß die Integrationskonstanten $U_1 \ldots U_4$ leicht aus den Randbedingungen für $\lambda\,\eta = 0$ oder $\lambda\,\eta = \lambda$ berechnet werden können.

1. Oberer Rand frei, $\lambda\,\eta = 0$ mit $w^{\cdot\cdot} = 0$ und $w^{\cdot\cdot\cdot} = 0$, unterer Rand eingespannt $\lambda\eta = \lambda$, mit $w = 0$, $w^{\cdot} = 0$.

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= -\gamma\,\frac{l\,a^2}{E\,h}\,\frac{\cos\lambda\,\mathfrak{Sin}\,\lambda + \sin\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\lambda - 2\,\lambda\cos\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\lambda}{\lambda\,(\cos^2\lambda + \mathfrak{Cof}^2\lambda)}\,, \qquad U_4 = 0\,, \\ U_2 &= -\gamma\,\frac{l\,a^2}{E\,h}\,\frac{\cos\lambda\,\mathfrak{Sin}\,\lambda - \sin\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\lambda - 1/\lambda\cdot\cos\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\lambda}{\cos^2\lambda + \mathfrak{Cof}^2\lambda} = U_3. \end{aligned}\right\} \tag{1255}$$

2. Oberer Rand gelenkig gelagert $\lambda\,\eta = 0$ mit $w = 0$ und $w^{\cdot\cdot} = 0$, unterer Rand eingespannt $\lambda\,\eta = \lambda$ mit $w = 0$, $w^{\cdot} = 0$.

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= 0\,, \qquad U_2 = -\gamma\,\frac{l\,a^2}{E\,h}\,\frac{1/\lambda\cdot\sin\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\lambda - \sin\lambda\,\mathfrak{Sin}\,\lambda - \cos\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\lambda}{\mathfrak{Cof}\,\lambda\,\mathfrak{Sin}\,\lambda - \cos\lambda\sin\lambda}\,, \\ U_4 &= 0\,, \qquad U_3 = +\gamma\,\frac{l\,a^2}{E\,h}\,\frac{1/\lambda\cdot\cos\lambda\,\mathfrak{Sin}\,\lambda + \sin\lambda\,\mathfrak{Sin}\,\lambda - \cos\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\lambda}{\mathfrak{Cof}\,\lambda\,\mathfrak{Sin}\,\lambda - \cos\lambda\sin\lambda}. \end{aligned}\right\} \tag{1256}$$

3. Oberer Rand eingespannt $\lambda\,\eta = 0$ mit $w = 0$ und $w^{\cdot} = 0$, unterer Rand ein gespannt $\lambda\,\eta = \lambda$ mit $w = 0$ und $w^{\cdot} = 0$.

$$\left.\begin{aligned} U_1 = 0\,, \qquad U_2 &= -\gamma\,\frac{l\,a^2}{E\,h}\,\frac{(\mathfrak{Sin}\,\lambda + \sin\lambda)\sin\lambda - \lambda\,(\sin\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\lambda + \cos\lambda\,\mathfrak{Sin}\,\lambda)}{\lambda\,(\mathfrak{Sin}^2\lambda - \sin^2\lambda)}\,, \\ U_3 &= -\gamma\,\frac{l\,a^2}{E\,h}\,\frac{\lambda\,(\sin\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\lambda + \cos\lambda\,\mathfrak{Sin}\,\lambda) - \mathfrak{Sin}\,\lambda\,(\sin\lambda + \mathfrak{Sin}\,\lambda)}{\lambda\,(\mathfrak{Sin}^2\lambda - \sin^2\lambda)}\,, \\ U_4 &= -\gamma\,\frac{l\,a^2}{E\,h}\,\frac{(\mathfrak{Cof}\,\lambda - \cos\lambda)(\mathfrak{Sin}\,\lambda + \sin\lambda) - 2\,\lambda\sin\lambda\,\mathfrak{Sin}\,\lambda}{\lambda\,(\mathfrak{Sin}^2\lambda - \sin^2\lambda)}. \end{aligned}\right\} \tag{1257}$$

Damit sind auch alle Komponenten (1253) des Spannungs- und Verschiebungszustandes bekannt. Ihre Berechnung wird durch die bekannten Tabellen der hyperbolischen Funktionen von K. Hayashi erleichtert. Sind diese nicht zur Hand, so kann in der Regel ($h \ll a$)

$$\mathfrak{Sin}\,\lambda = \mathfrak{Cof}\,\lambda = \frac{1}{2}\,e^{\lambda}$$

gesetzt und e^{λ} als num ln e^{λ} = num λ nach Taschenbüchern bestimmt werden. Das Einspannungsmoment ist dann für $\eta = 1$ und $\mu = 0$ in allen 3 Fällen

$$M_y \approx \gamma \frac{a^2\,h^2}{6\,l}\,\lambda\,(\lambda - 1). \tag{1258}$$

Berechnung eines Wasserbehälters.

a) Vollständige Lösung nach (1252) für starre Einspannung des unteren Schalenrandes.

$a = 9{,}0$ m; $l = 9{,}0$ m; $h = 0{,}30$ m; $a/h = 30$.

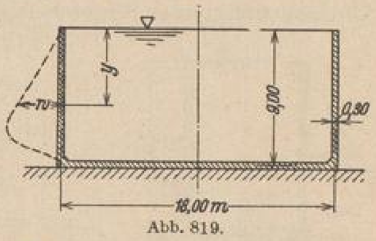

Abb. 819.

Nach (1241) ist $L = \dfrac{9{,}0}{1{,}31\,\sqrt{30}} = 1{,}258$,

$\lambda = 7{,}17$, $\gamma = 1$ t/m³, $E = 2\,100\,000$ t/m²,

$$\gamma \frac{l\,a^2}{E\,h} = 1{,}156 \cdot 10^{-3}.$$

1. Oberer Rand frei. Nach (1255) ist $U_4 = 0$ und

$$U_1 = -1{,}156 \cdot 10^{-3} \frac{409{,}64 + 504{,}60 - 14{,}34 \cdot 409{,}64}{7{,}17 \cdot 423\,275} = 18{,}89 \cdot 10^{-7},$$

$$U_2 = U_3 = -1{,}156 \cdot 10^{-3} \frac{409{,}64 - 504{,}60 - \dfrac{1}{7{,}17} \cdot 409{,}64}{423\,275} = 4{,}15 \cdot 10^{-7},$$

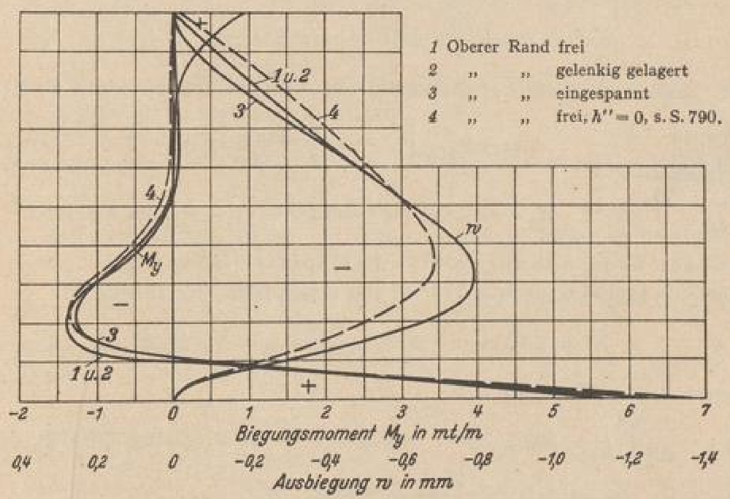

Abb. 820.

damit nach (1252) und (1253) mit (1251)

$$w = -0{,}161 \cdot 10^{-3}\, l\, \eta + 10^{-7}[18{,}89 \cos\lambda\eta\, \mathfrak{Cof}\,\lambda\eta + 4{,}15\,(\cos\lambda\eta\, \mathfrak{Sin}\,\lambda\eta + \sin\lambda\eta\, \mathfrak{Cof}\,\lambda\eta)],$$

$$M_y = 0{,}614 \cdot 10^{-3}[18{,}89 \sin\lambda\eta\, \mathfrak{Sin}\,\lambda\eta + 4{,}15\,(\sin\lambda\eta\, \mathfrak{Cof}\,\lambda\eta - \cos\lambda\eta\, \mathfrak{Sin}\,\lambda\eta)].$$

Am unteren Rand ist $M_a = 6{,}08$ mt/m.

2. Oberer Rand gelenkig gelagert. Nach (1256) ist

$$U_1 = U_4 = 0, \qquad U_2 = 23{,}05 \cdot 10^{-7}, \qquad U_3 = 4{,}15 \cdot 10^{-7}.$$

3. Oberer Rand starr eingespannt. Nach (1257) ist

$$U_1 = 0, \qquad U_2 = 23{,}06 \cdot 10^{-7}, \qquad U_3 = 1{,}598 \cdot 10^{-4}, \qquad U_4 = -1{,}585 \cdot 10^{-4}.$$

Die Ausbiegung w und die Biegungsmomente M_y sind in Abb. 820 dargestellt. Die Ringkraft N_β ist nach (1244) proportional der Ausbiegung w.

b) Näherungsweise ist für alle 3 Randbedingungen nach (1258)

$$M_a \approx 1{,}0 \frac{9{,}0^2 \cdot 0{,}30^2}{6 \cdot 9{,}0} \cdot 7{,}17 \cdot 6{,}17 = 5{,}97 \text{ mt/m}.$$

c) Die Teillösung (1243) für den unendlich langen Zylinder ergibt nach (1249)

$$M_a = \frac{L^3 \gamma}{2} (\lambda - 1) = 6{,}12 \text{ mt/m}.$$

Der Verlauf der Funktionen w und M_y stimmt mit den Kurven *1* und *2* Abb. 820 so gut überein, daß der Unterschied in der Zeichnung nicht hervortritt.

Untersuchung eines Wasserbehälters nach (1234) bei verschiedenen Randbedingungen.

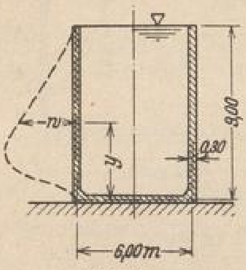

Abb. 821.

a) Starre Einspannung des unteren Schalenrandes.

$$a = 3{,}0 \text{ m}, \qquad l = 9{,}0 \text{ m}, \qquad h = 0{,}3 \text{ m}, \qquad a/h = 10.$$

Nach (1241) ist $L = \dfrac{3{,}0}{1{,}31 \sqrt{10}} = 0{,}723$,

$$\lambda = 12{,}45, \qquad \gamma = 1{,}0 \text{ t/m}^3, \qquad E\,h = 0{,}63 \cdot 10^6.$$

Für den Längsspannungszustand ist nach (1154)

$$w_0 = -\gamma \frac{a^2}{E\,h} (l - y), \qquad w_0' = \gamma \frac{a^2}{E\,h}.$$

Damit wird nach (1249) das Einspannungsmoment

$$M_a = X_2 = -\frac{L^2 E\,h}{2 a^2} \left(-\gamma \frac{a^2 l}{E\,h} + L \gamma \frac{a^2}{E\,h} \right) = \frac{L^3 \gamma}{2} (\lambda - 1) = 2{,}165 \text{ mt/m}$$

und

$$X_1 = \frac{L^2}{2} \gamma (2 \lambda - 1) = 6{,}25 \text{ t/m},$$

so daß nach (1243) und (1244) Formänderung und Schnittkräfte bestimmt sind (Abb. 824a).

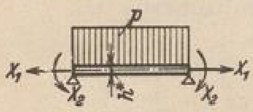

Abb. 822.

$$w = -\gamma \frac{a^2 l}{E\,h} \left[1 - \eta - e^{-\lambda \eta} \left(\cos \lambda \eta + \left(1 - \frac{L}{l} \right) \sin \lambda \eta \right) \right],$$

$$M_y = -L^2 \frac{l \gamma}{2} e^{-\lambda \eta} \left(\sin \lambda \eta - \left(1 - \frac{L}{l} \right) \cos \lambda \eta \right).$$

b) Elastische Einspannung in eine Kreisplatte (Abb. 824b).

1. Formänderungsgrößen nach S. 773 für die Kreisplatte mit Tabelle 63.

$$h^* = 0{,}40 \text{ m}, \qquad N = \frac{E\,h^{*3}}{12(1 - \mu^2)} = 11520 \text{ mt}.$$

$$X_1 = 1{:} \quad \delta_{11,1} = \delta_{21,1} = 0, \qquad w_1^* = 0, \qquad M_{r,1} = 0.$$

$$X_2 = 1{:} \quad \delta_{22,1} = \frac{3{,}0}{N(1+\mu)} = 223{,}2 \cdot 10^{-6}, \quad w_2^* = -\frac{a^2}{2N(1+\mu)} \Phi_1 = -335 \cdot 10^{-6} \cdot \Phi_1; \quad M_{r,2} = -1.$$

$$p = \gamma l{:} \quad \delta_{10,1} = 0, \quad \delta_{20,1} = -\gamma \frac{l a^3}{8 N (1 + \mu)} = -2265 \cdot 10^{-6}.$$

$$w_0^* = \gamma \frac{l a^4}{64 N (1 + \mu)} [2(3 + \mu) \Phi_1 - (1 + \mu) \Phi_0] = 5365 \cdot 10^{-6} (\Phi_1 - 0{,}184 \Phi_0),$$

$$M_{r,0} = \gamma \frac{l a^2}{16} (3 + \mu) \Phi_1 = 16{,}07 \Phi_1.$$

2. Formänderungsgrößen für die Zylinderschale nach (1248)

$$\delta_{11,2} = 39{,}5 \cdot 10^{-6}, \qquad \delta_{12,2} = -54{,}7 \cdot 10^{-6}, \qquad \delta_{22,2} = 151{,}2 \cdot 10^{-6},$$

$$\delta_{10,2} = w_{0a} = -128{,}6 \cdot 10^{-6}, \qquad \delta_{20,2} = w_{0a}' = 14{,}3 \cdot 10^{-6}.$$

3. Berechnung der Anschlußkräfte nach S. 773 mit $\delta_{ik} = \delta_{ik,1} + \delta_{ik,2}$.

X_1	X_2	
39,5	−54,7	128,6
−54,7	374,4	2250,7

$X_1 = 14{,}518$ t/m,

$X_2 = 8{,}133$ mt/m.

4. Formänderung und Schnittkräfte der Schale Abb. 824b. Nach (1243) und (1244) ist

$$w = -\gamma \frac{a^2 l}{E h}(1-\eta) + 14{,}518\, w_1 + 8{,}133\, w_2$$

$$= -128{,}6 \cdot 10^{-6}[(1-\eta) - e^{-\lambda\eta}(\cos\lambda\eta + 3{,}44 \sin\lambda\eta)],$$

$$M_y = \ 14{,}518\, M_1 + 8{,}133\, M_2$$

$$= -2{,}358\, e^{-\lambda\eta}(\sin\lambda\eta - 3{,}44\cos\lambda\eta).$$

5. Formänderung und Schnittkräfte der Platte. Abb. 824b.

$$w^* = 5365 \cdot 10^{-6}(\Phi_1 - 0{,}184\,\Phi_0) - 8{,}133 \cdot 335 \cdot 10^{-6}\,\Phi_1$$

$$= 10^{-6}(2640\,\Phi_1 - 987\,\Phi_0),$$

$$M_r = 16{,}07\,\Phi_1 - 8{,}133.$$

c) Elastische Einspannung in eine Kugelschale. Abb. 824c.

1. Formänderungsgrößen für die Kugelschale nach (1197) und (1199) mit

$$a^* = 4{,}67 \text{ m}, \qquad h^* = 0{,}20 \text{ m}, \qquad a^*/h^* = 23{,}35.$$

Nach (1185) ist

$$k = \sqrt{23{,}35\sqrt{3 \cdot 0{,}9722}} = 6{,}32, \quad \frac{1}{B} = 695 \cdot 10^{-6},$$

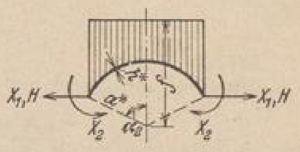

Abb. 823.

und mit $\alpha_2 = 40^0$, $\sin\alpha_2 = 0{,}6428$, $E h^* = 0{,}42 \cdot 10^6$,

$$\delta_{11,1} = 58{,}1 \cdot 10^{-6}, \qquad \delta_{12,1} = -122{,}5 \cdot 10^{-6}, \qquad \delta_{22,1} = 513 \cdot 10^{-6}.$$

Mit $f = 9 + 4{,}67 \cdot \cos\alpha_2 = 12{,}58$ m und $f/a^* = 2{,}69$ wird nach (1132)

$$\bar{\delta}_{10,1} = \Delta r_{\alpha 2} = -136 \cdot 10^{-6} \quad \text{und} \quad \bar{\delta}_{20,1} = \vartheta_{\alpha 2} = 33{,}3 \cdot 10^{-6}.$$

Die Horizontalkraft H beträgt nach S. 752 mit (1132)

$$H = -N_{\alpha 2}\cos\alpha_2 = +\gamma\frac{a^{*2}}{6}\left(3\frac{f}{a^*} - 2\frac{1-\cos^3\alpha_2}{\sin^2\alpha_2}\right)\cos\alpha_2 = +15{,}1 \text{ t/m}$$

und damit nach (1201)

$$\delta'_{10,1} = 15{,}1 \cdot 58{,}1 \cdot 10^{-6} = 878 \cdot 10^{-6}, \qquad \delta'_{20,1} = -15{,}1 \cdot 122{,}5 \cdot 10^{-6} = -1850 \cdot 10^{-6},$$

so daß

$$\delta_{10,1} = (-136 + 878) \cdot 10^{-6} = 742 \cdot 10^{-6}, \qquad \delta_{20,1} = (33{,}3 - 1850)\, 10^{-6} = -1816{,}7 \cdot 10^{-6}$$

2. Formänderungsgrößen der Zylinderschale wie unter b).

3. Berechnung der Anschlußkräfte nach S. 773 mit $\delta_{ik} = \delta_{ik,1} + \delta_{ik,2}$.

X_1	X_2	
97,6	−177,2	−613,4
−177,2	664,2	1802,4

$X_1 = -2{,}634$ t/m,

$X_2 = 2{,}011$ mt/m.

4. Formänderungen und Schnittkräfte der Zylinderschale nach (1243) und (1244)

$$w = -10^{-6} \cdot 128{,}6\,[(1-\eta) + 1{,}67\, e^{-\lambda\eta}(\cos\lambda\eta - 0{,}513\sin\lambda\eta)],$$

$$M_y = 3{,}917\, e^{-\lambda\eta}(\sin\lambda\eta + 0{,}513\cos\lambda\eta).$$

5. Schnittkräfte in der Kugelschale nach (1192)

$$M_\alpha = (X_1 + H)\, M_1 + X_2 M_2 = e^{-k\omega}\left[5{,}94\sin(k\omega) - 2{,}84\sin\left(k\omega + \frac{\pi}{4}\right)\right].$$

d) Berechnung für Temperatur und Schwinden bei eingespanntem unterem Rand.

Die Formänderungsgrößen aus $X_1 = 1$, $X_2 = 1$ werden wie auf S. 784

$$\delta_{11} = 39{,}5 \cdot 10^{-6}, \qquad \delta_{12} = -54{,}7 \cdot 10^{-6}, \qquad \delta_{22} = 151{,}2 \cdot 10^{-6}.$$

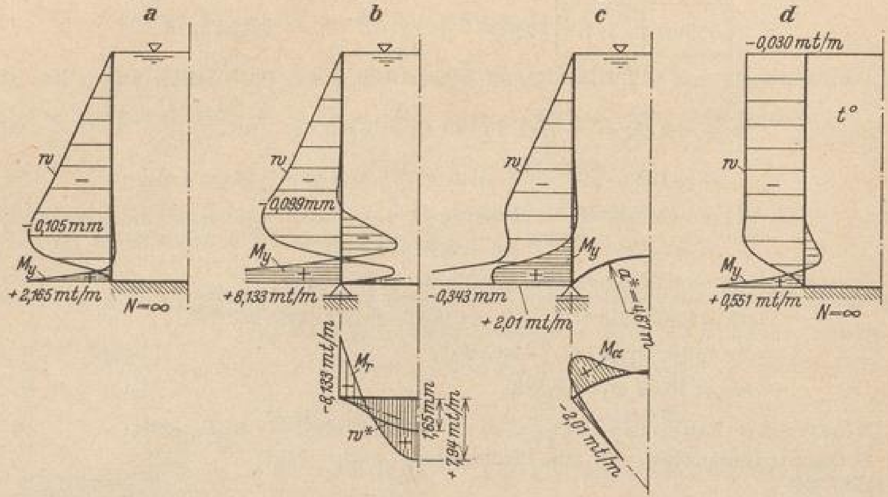

Abb. 824.

Für Temperaturwirkung ist nach (1157) mit $\alpha_t = 10 \cdot 10^{-6}$

$$\delta_{10} = w_{0a} = -\alpha_t \cdot t \cdot a = -30 \cdot t \cdot 10^{-6}, \qquad \delta_{20} = 0.$$

Damit lauten die Gleichungen auf S. 773

X_1	X_2	
39,5	− 54,7	30 · t
− 54,7	151,2	0

$$X_1 = 1{,}522 \cdot t \text{ t/m}, \qquad X_2 = 0{,}551 \cdot t \text{ mt/m}.$$

Formänderung und Schnittkräfte betragen nach (1243), (1244) Abb. 824d

$$w = -30 \cdot t \cdot 10^{-6} [1 - e^{-\lambda\eta} (\cos \lambda\eta + \sin \lambda\eta)],$$
$$M = -0{,}551\, e^{-\lambda\eta} (\sin \lambda\eta - \cos \lambda\eta)\,.\ t = 1.$$

Berechnung eines Silos.

1. Geometrische Grundlagen.

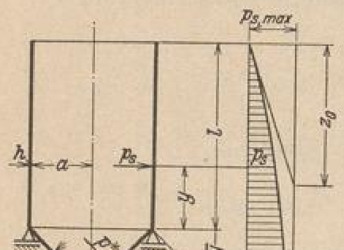

Abb. 825.

Zylinderschale: $a = 3{,}0$ m, $l = 9{,}0$ m, $h = 0{,}20$ m,

$$E h = 0{,}42 \cdot 10^6, \quad a/h = 15, \quad L = 0{,}591 \text{ m}, \quad \lambda = 15{,}25, \quad \eta = y/l.$$

Kegelschale: $\alpha = 45^0$, $l^* = 4{,}24$ m, $h^* = 0{,}25$ m,

$$E h^* = 0{,}525 \cdot 10^6, \quad L_2^* = 0{,}788 \text{ m}, \quad B^* = 10^6/355, \quad \eta_2 = s_2/L_2^*.$$

2. Belastung. Füllgut: Roggen. Nach S. 14 ist (Abb. 825)

$$\gamma = 0{,}7 \text{ t/m}^3, \quad k_1 = 0{,}248, \quad \mu' = 0{,}44, \quad F/U = 3/2,$$

$$p_{s,\max} = \frac{0{,}7}{0{,}44}\,\frac{3}{2} = 2{,}39, \qquad p_{b,\max} = \frac{2{,}39}{0{,}248} = 9{,}62,$$

$$z_0 = \frac{1{,}5}{0{,}44 \cdot 0{,}248} = 13{,}75,$$

$$p_s = 2{,}39\,(1 - e^{-\varkappa}), \quad p_b = 9{,}62\,(1 - e^{-\varkappa}), \quad \varkappa = \frac{l - y}{z_0} = \frac{9 - y}{13.75}.$$

Zylinderschale: $p_z = -2{,}39\,(1 - e^{-\varkappa})$.

Kegelschale: $$p_z^* = -p_z \sin^2\alpha - p_b \cos^2\alpha = -6{,}01\left(1 - e^{-\frac{l+\bar{y}}{z_0}}\right),$$

$$p_z^* = -6{,}01\,(1 - e^{-\varkappa^*}), \qquad \varkappa^* = \frac{16{,}96 - y^*}{19{,}43}.$$

3. Formänderung der Zylinderschale.

a) Membranzustand. Nach (1155) ist

$$w_0 = -\frac{3{,}0^2}{0{,}42} \cdot 10^{-6} \cdot 2{,}39\,(1 - e^{-\varkappa}) = -51{,}3 \cdot 10^{-6}\,(1 - e^{-\varkappa}),$$

$$\vartheta_0 = \frac{51{,}3 \cdot 10^{-6}}{13{,}75}\,e^{-\varkappa} = 3{,}73 \cdot 10^{-6}\,e^{-\varkappa},$$

so daß mit $y = 0$:

$$\delta_{10,2} = -24{,}6 \cdot 10^{-6}, \qquad \delta_{20,2} = 1{,}94 \cdot 10^{-6}.$$

b) Für die Belastung aus $X_1 = 1$, $X_2 = 1$ (Abb. 826) ist nach (1248)

$$\delta_{11,2} = 72{,}5 \cdot 10^{-6}, \qquad \delta_{12,2} = -122{,}6 \cdot 10^{-6}, \qquad \delta_{22,2} = 415{,}0 \cdot 10^{-6}.$$

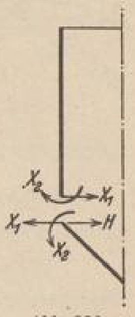

Abb. 826.

4. Formänderung der Kegelschale.

a) Membranzustand. Aus den Gleichgewichtsbedingungen (1138) folgt

$$N_{\beta 0} = -y^* p_z = 6{,}01\,y^*\,(1 - e^{-\varkappa^*})$$

und

$$(N_{y0}\,y^*)' = 6{,}01\,y^*\,(1 - e^{-\varkappa^*}),$$

woraus

$$N_{y0} = 6{,}01\left[\frac{y^*}{2} - 19{,}43\,e^{-\varkappa^*} + \frac{19{,}43^2}{y^*}\left(e^{-\varkappa^*} - e^{-0{,}872}\right)\right].$$

Damit wird nach (1140)

$$\Delta r_{z,0} = 8{,}1 \cdot 10^{-6}\,y^*\left\{y^*\,(1 - e^{-\varkappa^*}) - \mu\left[\frac{y^*}{2} - 19{,}43\,e^{-\varkappa^*}\left(1 - \frac{19{,}43}{y^*}\right) - \frac{19{,}43^2}{y^*}\,e^{-0{,}872}\right]\right\},$$

und nach (1141)

$$\vartheta_0^* = -11{,}46 \cdot 10^{-6}\left[\frac{3}{2}\,y^* - e^{-\varkappa^*}\left(\frac{19{,}43^2}{y^*} - 19{,}43 + 2\,y^* + \frac{y^{*2}}{19{,}43}\right) + \frac{19{,}43^2}{y^*} \cdot e^{-0{,}872}\right].$$

Die Formänderungen am Rande im Sinne der Definition nach Abb. 826 betragen daher

$$\bar{\delta}_{10,1} = (\Delta r_{z,0})_{y^*=l^*} = 63{,}3 \cdot 10^{-6},$$
$$\bar{\delta}_{20,1} = -(\vartheta_0^*)_{y^*=l^*} = 29{,}3 \cdot 10^{-6}.$$

b) Für die Belastung aus $X_1 = 1$, $X_2 = 1$ ist nach (1223) und (1224) unter Beachtung des Wirkungssinnes von X_2 nach Abb. 826

$$\delta_{11,1} = 43{,}4 \cdot 10^{-6}, \qquad \delta_{12,1} = 77{,}9 \cdot 10^{-6}, \qquad \delta_{22,1} = 279{,}5 \cdot 10^{-6}.$$

c) Belastung H. Nach Abb. 767 ist

$$H = -(N_{y0})_{y^*=l^*} \cdot \cos\alpha = -4{,}67\ \mathrm{t}$$

und nach (1201)

$$\delta'_{10,1} = -4{,}67 \cdot 43{,}4 \cdot 10^{-6} = -202{,}5 \cdot 10^{-6},$$
$$\delta'_{20,1} = -4{,}67 \cdot 77{,}9 \cdot 10^{-6} = -363{,}5 \cdot 10^{-6}.$$

5. Berechnung der Überzähligen.

$$\delta_{11} = (72{,}5 + 43{,}4) \cdot 10^{-6} = 115{,}9 \cdot 10^{-6},$$
$$\delta_{12} = (-122{,}6 + 77{,}9) \cdot 10^{-6} = -44{,}7 \cdot 10^{-6},$$
$$\delta_{22} = (415{,}0 + 279{,}5)\,10^{-6} = 694{,}5 \cdot 10^{-6},$$
$$\delta_{10} = (-24{,}6 + 63{,}3 - 202{,}5)\,10^{-6} = -163{,}8 \cdot 10^{-6},$$
$$\delta_{20} = (1{,}94 + 29{,}3 - 363{,}5)\,10^{-6} = -332{,}26 \cdot 10^{-6}.$$

X_1	X_2		
115,9	− 44,7	163,8	$X_1 = 1{,}639$ t/m,
− 44,7	694,5	332,26	$X_2 = 0{,}584$ mt/m.

6. Formänderung und Schnittkräfte der Zylinderschale nach (1243) und (1244)

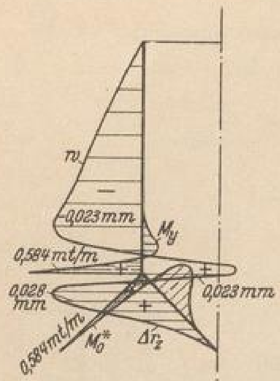

Abb. 827.

$$w = w_0 + 1{,}639\, w_1 + 0{,}584\, w_2$$
$$= -51{,}3 \cdot 10^{-6}\, [(1 - e^{-\varkappa}) - 0{,}923\, e^{-\lambda\eta} (\cos\lambda\eta + 1{,}516 \sin\lambda\eta)]\,.$$
$$M_y = 1{,}639\, M_1 + 0{,}584\, M_2 = 0{,}384\, e^{-\lambda\eta}\, [1{,}516 \cos\lambda\eta - \sin\lambda\eta]\,.$$

7. Formänderung und Schnittkräfte der Kegelschale nach (1202) und (1221)

$$\Delta r_z = \Delta r_{z,0} + (1{,}639 - 4{,}67)\, \Delta r_{z,1} + 0{,}584\, \Delta r_{z,2}$$
$$= \Delta r_{z,0} - 3{,}031\, \Delta r_{z,1} + 0{,}584\, \Delta r_{z,2}\,.$$

$\Delta r_{z,0}$ auf S. 787. Nach (1223) und (1224) ist

$$\Delta r_{z,1} = 2{,}41 \cdot 10^{-6}\, y^{*2} e^{-\eta_2} \cos\eta_2\,,$$
$$\Delta r_{z,2} = 4{,}33 \cdot 10^{-6}\, y^{*2} e^{-\eta_2} (\cos\eta_2 - \sin\eta_2)\,,$$
$$M_y^* = -3{,}031\, M_1 + 0{,}584\, M_2 = 0{,}584 e^{-\eta_2}\, [\cos\eta_2 - 1{,}89 \sin\eta_2]\,.$$

Formänderung und Schnittkräfte sind in Abb. 827 dargestellt.

Berechnung eines Kühlturmes.

1. Geometrische Grundlagen (Abb. 828).

Zylinderschale: $a = 5{,}5$ m, $l = 15{,}0$ m, $h = 0{,}07$ m

$$E h = 0{,}147 \cdot 10^6\,, \qquad a/h = 78{,}6\,, \qquad L = 0{,}474 \text{ m}\,, \qquad \lambda = 31{,}7\,, \qquad \eta = y/l\,.$$

Kegelschale: $\alpha = 65^0$, $l^* = 17{,}0$ m, $a^* = 13{,}0$ m, $h^* = 0{,}10$ m

$$E h^* = 0{,}210 \cdot 10^6\,, \qquad L_1^* = 0{,}596 \text{ m}\,, \qquad B^* = 10^6/5560\,, \qquad \eta_1 = s_1/L_1^*\,.$$

2. Belastung. Eigengewicht.

Zylinderschale $g = 0{,}168$ t/m²; Kegelschale $g^* = 0{,}24$ t/m².

3. Formänderung der Zylinderschale.

a) Membranzustand. Nach (1153) ist

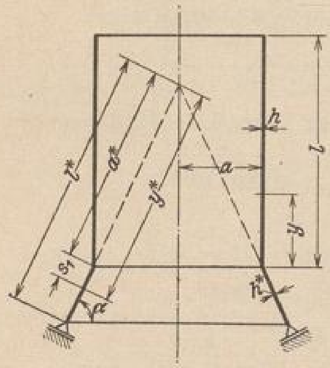

Abb. 828.

$$w_0 = -\frac{\mu}{E h}\, a\, g\, l\, (1 - \eta) = -10^{-6} \cdot 15{,}73\, (1 - \eta)\,,$$
$$\vartheta_0 = 10^{-6} \cdot \frac{15{,}73}{l} = 10^{-6} \cdot 1{,}05\,,$$

so daß mit $\eta = 0$ $\delta_{10,2} = -15{,}73 \cdot 10^{-6}$,

$$\delta_{20,2} = 1{,}05 \cdot 10^{-6}\,.$$

b) Für die Belastung aus $X_1 = 1$, $X_2 = 1$ (Abb. 829) ist nach (1248)

$$\delta_{11,2} = 868 \cdot 10^{-6}\,, \qquad \delta_{12,2} = -1836 \cdot 10^{-6}\,,$$
$$\delta_{22,2} = 7750 \cdot 10^{-6}\,.$$

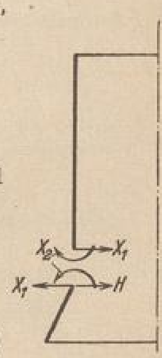

Abb. 829.

4. Formänderung der Kegelschale.

a) Membranzustand. Nach (1142) und (1145) ist mit $z = y^* \sin\alpha$ und

$$G_0 = g \cdot l \cdot 2\, a\, \pi = 87 \text{ t}$$

$$\Delta r_{z,0} = -\frac{g^* y^{*2}}{E h^*} \cos^2\alpha \operatorname{ctg}\alpha \left\{1 - \frac{\mu}{2\cos^2\alpha}\left[1 - \left(\frac{a^*}{y^*}\right)^2\right]\right\} + \frac{\mu\, G_0}{2\pi E h^* \sin\alpha}$$
$$= 10^{-6} \left\{12{,}12 - 0{,}0444\, y^{*2} \left[1{,}145 + \left(\frac{13}{y^*}\right)^2\right]\right\},$$
$$\vartheta_0 = -\frac{g^* y^*}{E h^*} \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha} \left[\frac{1}{2} + \mu - (2 + \mu)\cos^2\alpha - \frac{1}{2}\left(\frac{a^*}{y^*}\right)^2\right] - \frac{G_0}{E h \cdot 2\pi y^* \sin^2\alpha}$$
$$= -10^{-6} \left\{0{,}294\, y^* \left[0{,}56 - \left(\frac{13}{y^*}\right)^2\right] + \frac{80{,}3}{y^*}\right\}.$$

Mit $y^* = a^*$ wird $\quad \bar\delta_{10,1} = -3{,}96 \cdot 10^{-6}\,, \qquad \bar\delta_{20,1} = -4{,}49 \cdot 10^{-6}\,.$

b) Die Belastung $X_1 = 1$, $X_2 = 1$ liefert nach (1225) und (1226)

$$\delta_{11,1} = 482 \cdot 10^{-6}, \qquad \delta_{12,1} = 896 \cdot 10^{-6}, \qquad \delta_{22,1} = 3320 \cdot 10^{-6}.$$

c) Belastung H. Nach (1145) ist

$$-H = \frac{G_0}{2\pi a} \operatorname{ctg} \alpha = +1{,}175 \text{ t/m}$$

und daher nach (1201)

$$\delta'_{10,1} = -1{,}175 \cdot 482 \cdot 10^{-6} = -\ 566 \cdot 10^{-6},$$
$$\delta'_{20,1} = -1{,}175 \cdot 896 \cdot 10^{-6} = -1053 \cdot 10^{-6}.$$

5. Berechnung der Überzähligen. $(\delta_{ik} = \delta_{ik,1} + \delta_{ik,2},\ \delta_{i0} = \bar{\delta}_{i0,1} + \delta'_{i0,1} + \delta_{i0,2})$

X_1	X_2		
1350	−940	581	$X_1 = 0{,}532$ t/m
−940	11070	1056	$X_2 = 0{,}141$ mt/m.

6. Formänderung und Schnittkräfte der Zylinderschale nach (1243) und (1244)

$$w = w_0 + 0{,}532\, w_1 + 0{,}141\, w_2$$
$$= -15{,}73 \cdot 10^{-6} \left[(1-\eta) - 12{,}85\, e^{-\lambda\eta} (\cos\lambda\eta + 1{,}281 \sin\lambda\eta)\right],$$
$$M_y = 0{,}532\, M_1 + 0{,}141\, M_2 = -0{,}110\, e^{-\lambda\eta} (\sin\lambda\eta - 1{,}281 \cos\lambda\eta).$$

7. Formänderung und Schnittkräfte der Kegelschale nach (1202) und (1221)

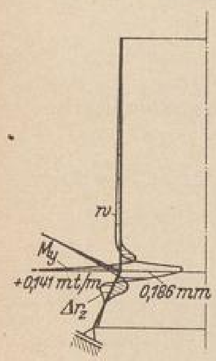

Abb. 830.

$$\Delta r_z = \Delta r_{z,0} + (0{,}532 - 1{,}175)\, \Delta r_{z,1} + 0{,}141\, \Delta r_{z,2}$$
$$= \Delta r_{z,0} - 0{,}643\, \Delta r_{z,1} + 0{,}141\, \Delta r_{z,2}.$$

$\Delta r_{z,0}$ auf S. 788. Nach (1225) und (1226) ist

$$\Delta r_{z,1} = 2{,}855 \cdot 10^{-6}\, y^{*2} e^{-\eta_1} \cos\eta_1,$$
$$\Delta r_{z,2} = -5{,}28 \cdot 10^{-6}\, y^{*2} e^{-\eta_1} (\sin\eta_1 - \cos\eta_1).$$

Formänderung und Schnittkräfte sind in Abb. 830 dargestellt.

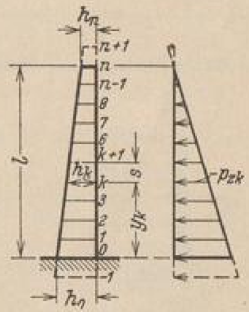

Abb. 831.

Die Zylinderschale mit veränderlicher Wanddicke. Näherungslösungen der allgemeinen Aufgabe entstehen nach S. 778 durch die Unterteilung des Integrationsbereichs l in n gleichgroße Abschnitte $\Delta y = s$ mit der Punktfolge $0, 1 \ldots k \ldots n$ und durch die Umwandlung der Differentialquotienten der Differentialgleichung des Problems in Differenzenquotienten.

Die Differentialgleichung der Biegelinie w des Meridianschnittes mit beliebig veränderlicher Wanddicke h lautet nach (1229) für

$$N_y = 0, \qquad M''_y + \frac{N_\beta}{a} + p_z = 0, \qquad M''_y = -(B w'')'':$$

$$\left(\frac{h^3}{h_0^3} w''\right)'' + 4 w \frac{h}{h_0} \frac{3(1-\mu^2)}{a^2 h_0^2} = 12 \frac{(1-\mu^2)}{E h_0^3} p_z. \tag{1259}$$

Aus dieser werden nach (211) mit $h_k/h_0 = \zeta_k$ die folgenden Differenzengleichungen abgeleitet:

$$\zeta_{k-1}^3 \Delta^2 w_{k-1} - 2 \zeta_k^3 \Delta^2 w_k + \zeta_{k+1}^3 \Delta^2 w_{k+1} + 4 \zeta_k \frac{s^4}{L_0^4} w_k = \frac{12(1-\mu^2) s^4}{E h_0^3} p_{z,k}.$$

Sie lassen sich nach S. 130 umformen

$$\zeta_{k-1}^3 w_{k-2} - 2 w_{k-1} (\zeta_{k-1}^3 + \zeta_k^3) + w_k \left(\zeta_{k-1}^3 + 4\left[\zeta_k^3 + \zeta_k \frac{s^4}{L_0^4}\right] + \zeta_{k+1}^3\right)$$
$$-2 w_{k+1} (\zeta_k^3 + \zeta_{k+1}^3) + \zeta_{k+1}^3 w_{k+2} = \frac{12(1-\mu^2) s^4}{E h_0^3} p_{z,k}, \quad k = 1 \ldots (n-1). \tag{1260}$$

Die Rechenvorschrift besteht neben diesen $(n-1)$ linearen Gleichungen aus vier Randbedingungen für w, w', M oder Q am Rande $y=0$ und $y=l$. Sie enthält ebenso viele Wurzeln $w_k (k=-1 \ldots n+1)$, die daher eindeutig bestimmt sind. Die Randbedingungen sind Vorschriften über den Verschiebungs- oder Spannungszustand. Dieser läßt sich nach (1229) ebenfalls durch Differenzen ausdrücken.

$$\left.\begin{aligned} w_k' &\approx \frac{w_{k+1}-w_{k-1}}{2s}, \quad -N_{\beta k}=\frac{E h_k}{a} w_k, \quad M_{yk}=-\frac{E h_k^3}{12(1-\mu^2)} \frac{(w_{k-1}-2w_k+w_{k+1})}{s^2}, \\ Q_k &= -\frac{E}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{h_{k+1}^3 \Delta^2 w_{k+1}-h_{k-1}^3 \Delta^2 w_{k-1}}{2s^3}\right). \end{aligned}\right\} \tag{1261}$$

Sind keine Randbedingungen vorgeschrieben, sondern nur durch die Verbindung des Breitenschnittes mit anderen elastischen Bauteilen bestimmt, so müssen hier ebenso wie auf S. 781 zunächst die Anschlußkräfte berechnet werden. Die Komponenten δ_{10}, δ_{20} des Verschiebungszustandes ergeben sich in der Regel aus der partikulären Lösung von (1259), die Vorzahlen $\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{22}$ des Ansatzes lassen sich genügend genau aus den Differenzengleichungen eines unendlich langen Zylinders mit vorgeschriebenen Randkräften nach S. 789 für $X_1=Q_y=1$, $\boldsymbol{My}=0$ oder $X_2=\boldsymbol{My}=1$, $Q_y=0$ berechnen. Da die Funktionen $w(y)$ in diesem Falle schnell abklingen, werden die Verschiebungen $w_{k,1}, w_{k,2}$ außerhalb einer geschätzten Randzone Null gesetzt, ohne die Bedingungen am entgegengesetzten Rande zu berücksichtigen.

Berechnung des Wasserbehälters Abb. 819 für linear veränderliche Wandstärke ($h''=0$).

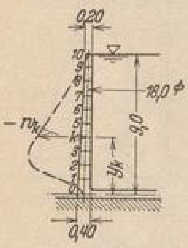

Abb. 832.

1. Geometrische Abmessungen (Abb. 832). $l=9{,}0$ m, $a=9{,}0$ m.

$$h_0=0{,}40 \text{ m}, \qquad h_{10}=0{,}20 \text{ m}, \qquad h_k=\frac{h_0}{c}(c-y_k),$$

$$c=\frac{l\,h_0}{h_0-h_{10}}=18{,}0, \qquad \zeta_k=\frac{h_k}{h_0}=1-\frac{y_k}{18{,}0}.$$

Der Integrationsbereich l wird in 10 gleiche Teile geteilt. $s=0{,}9$ m.

2. Belastung. Wasserdruck, $p_{z,k}=-1{,}0(l-y_k)$.

3. Randbedingungen. Der untere Rand $y=0$ ist starr eingespannt, $w=0$, $w'=0$, also $w_{-1}=w_1$. Der obere Rand ist kräftefrei, $Q_{10}=0$, $M_{y10}=0$, daher mit (1261)

$$w_{11}=2w_{10}-w_9, \qquad w_{12}=\frac{\zeta_9^3}{\zeta_{11}^3}(w_8-2w_9+w_{10})+3w_{10}-2w_9.$$

4. Vorzahlen der Differenzengleichungen (1260)

$$\frac{12(1-\mu^2)s^4}{E h_0^3} p_{z,k}=\frac{s^4}{B_0} p_{z,k}=-\frac{0{,}057}{1000}(9{,}0-y_k). \qquad \frac{s^4}{L_0^4}=0{,}1475.$$

k	y_k	ζ_k	ζ_k^3	$\zeta_k^3+\zeta_{k+1}^3$	$\zeta_k \frac{s^4}{L_0^4}$	[ ] Gl.(1260)	$\zeta_{k-1}^3 + 4[\ ] + \zeta_{k+1}^3$	$9{,}0-y_k$	$10^3 \frac{s^4}{B_0} p_{z,k}$
−1	−0,9	1,05	1,158	2,158	0,1550	1,3130	—	—	
0	0	1	1	1,857	0,1475	1,1475	6,595	9	−0,513
1	0,9	0,95	0,857	1,586	0,1401	0,9971	5,719	8,1	−0,461
2	1,8	0,9	0,729	1,343	0,1328	0,8618	4,921	7,2	−0,411
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

5. Die Bedingungsgleichungen unter Berücksichtigung der Randbedingungen.

w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	$10^3 \frac{s^4}{B_0} p_{z,k}$
6,719	−3,172	0,729								−0,461
−3,172	4,921	−2,686	0,614							−0,411
0,729	−2,686	4,199	−2,252	0,512						−0,359
	0,614	−2,252	3,536	−1,868	0,422					−0,308
		0,512	−1,868	2,988	−1,530	0,343				−0,256
			0,422	−1,530	2,485	−1,236	0,275			−0,205
				0,343	−1,236	2,044	−0,982	0,216		−0,154
					0,275	−0,982	1,661	−0,764	0,166	−0,103
						0,216	−0,764	1,204	−0,332	−0,051
							0,166	−0,332	0,313	0

6. Auflösung. Die Iteration einer Näherungslösung liefert

$k =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$10^3 w_k =$	−0,2396	−0,5144	−0,6616	−0,6777	−0,6131	−0,5146	−0,4047	−0,2860	−0,1547	−0,0124 mm

7. Schnittkräfte nach (1261). Die Ausbiegung w_k und das Biegungsmoment $M_{y\,k}$ sind in Abb. 820 S. 783 durch die Linie *4* dargestellt.

Pöschl, T., u. K. v. Terzaghi: Berechnung von Behältern nach neueren analytischen und graphischen Methoden. Berlin 1913 und 1926. — Meißner, E.: Beanspruchung und Formänderung zylindrischer Gefäße mit linear veränderlicher Wandstärke. Vjschr. Naturforsch. Ges. Zürich 1917 S. 153. — Pasternak, P.: Formeln zur raschen Berechnung der Biegebeanspruchurg in kreisrunden Behältern. Schweiz. Bauztg. Bd. 86 (1925) S. 129. — Derselbe: Vereinfachte Berechnung der Biegebeanspruchung in dünnwandigen kreisrunden Behältern. Verh. 2. Int. Kongr. f. techn. Mechanik. Zürich 1927. — Derselbe: Die praktische Berechnung der Biegebeanspruchung in kreisrunden Behältern mit gewölbten Böden und Decken und linear veränderlichen Wandstärken. Schweiz. Bauztg. Bd. 90 (1927). — Susok, K.: Formeln zur praktischen Berechnung der Biegungsbeanspruchung in kreisrunden Behältern mit linear veränderlichen Wandstärken. Beton u. Eisen 1927 S. 450. — Steuermann, E.: Beitrag zur Berechnung des zylindrischen Behälters mit veränderlicher Wandstärke. Beton u. Eisen 1928 S. 286. — Miesel, K.: Über die Festigkeit von Kreiszylinderschalen mit nichtachsensymmetrischer Belastung. Ing.-Arch. 1930 S. 22. — Flügge, W.: Die Stabilität der Kreiszylinderschale. Ing.-Arch. 1931 S. 463. — Stange, K.: Der Spannungszustand einer Kreisringschale. Ing.-Arch. 1931 S. 47. — Abdank, R.: Berechnung ganz oder teilweise gefüllter, freitragender, dünnwandiger Rohrleitungen mit beliebig geneigter Achse. Bautechn. 1931 S. 419. — v. Sanden, K., u. F. Tölke: Über Stabilitätsprobleme dünner kreiszylindrischer Schalen. Ing.-Arch. 1931 S. 24.

82. Membrantheorie von Rohr und Tonne.

Tonne und Rohr werden bei zahlreichen Anwendungen im Bauwesen längs der Ränder oder längs ausgezeichneter Mantellinien $\alpha = \text{const}$ stetig unterstützt und bei der statischen Untersuchung unendlich lang angenommen (Abb. 833). Eine von x unabhängige Belastung $p = p(\alpha)$ erzeugt dann mit $\mu = 0$ einen ebenen Spannungszustand, dessen Komponenten ebenso wie beim biegungssteifen gekrümmten Stabe berechnet werden (S. 131 und 136). Durch die Abstützung einzelner Querschnitte des Flächentragwerks mit biegungssteifen Rahmen, Bindern oder Querwänden