Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Grundlagen der Lösung

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

schiebungs- und Spannungszustand an den beiden Rändern bestimmt werden müssen. Da jedoch die Wirkung aus den Randstörungen schnell abklingt, genügt bei offenen Kegelschalen mit $5r_1 < r_2$ eine Näherungslösung, bei welcher die Integrationskonstanten C_1, ψ_1 zunächst ebenso wie bei der geschlossenen Kegelschale für $C_2 = 0$, $\psi_2 = 0$ bestimmt werden, um sie bei der Berechnung der Integrationskonstanten C_2, ψ_2 aus der vollständigen Lösung mit den Bedingungen am Rande $y = a$ zu verwenden.

Um die elastischen Eigenschaften der Kegelschale mit denjenigen der Zylinderschale zu vergleichen, können die allgemeinen Differentialgleichungen für die Spannungen und Verschiebungen auf S. 774 nach F. Kann auch dadurch vereinfacht werden, daß die Biegungssteifigkeit der Schale im Breitenschnitt, die Querzusammenziehung des Baustoffs und die Verschiebung v des Breitenschnittes in Richtung der y-Achse vernachlässigt werden ($M_\beta = 0$, $\mu = 0$, $v = 0$). In diesem Falle folgt aus den Gleichgewichtsbedingungen auf S. 774

$$\left.\begin{aligned} (M_y y)'' = (Q_y y)' = -N_\beta \operatorname{tg}\alpha - p_z y \quad \text{und mit} \quad N_\beta = -D\frac{w}{y}\operatorname{tg}\alpha \\ B\,(y\,w'')'' + w\,\frac{D\operatorname{tg}^2\alpha}{y} - p_z y = 0\,. \end{aligned}\right\} \quad (1227)$$

Diese Differentialgleichung der Biegelinie des Meridians zerfällt nach H. Reißner in zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die mit Zylinderfunktionen integriert werden können.

Um die mathematischen Schwierigkeiten bei der Integration der Differentialgleichungen (1207) und (1209) zu umgehen, können die Ableitungen der Funktionen ϑ, Q_y, $y^2 Q_y''$ in den Differentialgleichungen (1213) und in den Differentialbeziehungen (1221) der Schnittkräfte nach S. 130 durch Differenzenquotienten ersetzt werden, so daß fünfgliedrige Differenzengleichungen entstehen. Diese werden für die Intervallgrenzen einer Aufteilung des Integrationsbereichs $l - a$ in Strecken Δy angeschrieben und bilden zusammen mit den Randbedingungen in den Breitenschnitten $y = a$ und $y = l$ einen vollständigen Ansatz zur eindeutigen Berechnung der Unbekannten. Die Rechenvorschrift dient auf S. 789 zur Untersuchung des Spannungszustandes einer Zylinderschale mit veränderlicher Wanddicke.

Dubois, F.: Über die Festigkeit der Kegelschale. Diss. Zürich 1917. — Honegger, E.: Festigkeitsberechnung von Kegelschalen mit linear veränderlicher Wandstärke. Luzern 1919. — Kann, F.: Kegelförmige Behälterböden, Dächer und Silotrichter. Forscherarb. Eisenbeton Heft 29. Berlin 1921.

c) Die Zylinderschale. Grundlagen der Lösung. Die allgemeinen Beziehungen (1177) zwischen Verzerrung und Verschiebung der Mittelfläche werden durch die geometrischen Eigenschaften der Zylinderschale $R_\beta = \infty$, $R_\beta d\alpha = dy$, $\alpha = 90^0$, $\operatorname{ctg}\alpha = 0$, $R_\alpha = a = \text{const}$ vereinfacht. Mit der Abkürzung $(\;)'$ für $d(\;)/dy$ ist nach (1177)

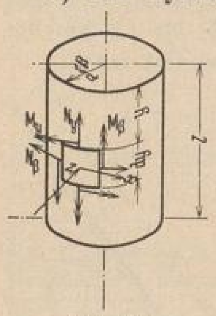

Abb. 816.

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_\alpha = \varepsilon_y = v', \quad \varepsilon_\beta = -\frac{w}{a}, \quad \varkappa_\alpha = \varkappa_y = \vartheta', \quad \varkappa_\beta = 0, \\ \vartheta = w' = -a\left(\frac{N_\beta - \mu N_y}{E h}\right)', \end{aligned}\right\} \quad (1228)$$

so daß die Schnittkräfte nach dem Hookeschen Gesetz (1176) folgendermaßen angeschrieben werden können:

$$\left.\begin{aligned} N_y = D\left(v' - \mu\frac{w}{a}\right), \quad N_\beta = D\left(-\frac{w}{a} + \mu v'\right), \quad M_y = -B\vartheta', \quad M_\beta = -\mu B\vartheta', \\ D = \frac{E h}{1-\mu^2}, \quad B = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)}\,. \end{aligned}\right\} \quad (1229)$$

Sie unterliegen den Gleichgewichtsbedingungen (1178)

$$N'_y + p_y = 0\,, \qquad Q'_y + \frac{N_\beta}{a} + p_z = 0\,, \qquad M'_y - Q_y = 0\,. \tag{1230}$$

Lösung für unveränderliche Wandstärke h. Die Steifigkeit D der Schale gegen Dehnung und ihre Steifigkeit B gegen Biegung sind konstant. In diesem Falle liefert die dritte Gleichgewichtsbedingung (1230) und die Zusammenfassung der ersten beiden Gleichgewichtsbedingungen in Verbindung mit (1228) und (1229) zwei simultane totale Differentialgleichungen.

$$\vartheta'' = -\frac{Q_y}{B}\,, \qquad Q''_y = \frac{D(1-\mu^2)}{a^2}\,\vartheta - p'_z + \frac{\mu}{a}\,p_y\,. \tag{1231}$$

Durch die Elimination der einen Unbekannten entsteht die Differentialgleichung für die andere.

$$\left.\begin{aligned} &\vartheta^{IV} + \frac{4}{L^4}\,\vartheta = \frac{1}{B}\left(p'_z - \frac{\mu}{a}\,p_y\right), \qquad Q_y^{IV} + \frac{4}{L^4}\,Q_y = -\left(p'_z - \frac{\mu}{a}\,p_y\right)'', \\ &\qquad\qquad \frac{1}{L^4} = \frac{3\,(1-\mu^2)}{h^2\cdot a^2}\,. \end{aligned}\right\} \tag{1232}$$

Die Verknüpfung von $M''_y = Q'_y$ mit den übrigen Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen liefert die Differentialgleichung der Biegelinie des Meridians

$$w^{IV} + \frac{4}{L^4}\,w = \frac{1}{B}\left(p_z + \mu\,\frac{N_y}{a}\right), \qquad N_y = -\int p_y\,dy + C\,. \tag{1233}$$

Die vollständige Lösung der Differentialgleichungen für Q_y oder w besteht aus einem von der Belastung p_y, p_z abhängigen partikulären Integral Q_{y0}, w_0 der inhomogenen Gleichung und aus der allgemeinen Lösung $\overline{Q}_y$, $\overline{w}$ der homogenen Gleichung mit vier Integrationskonstanten.

$$Q_y = Q_{y0} + \overline{Q}_y \qquad w = w_0 + \overline{w}\,. \tag{1234}$$

Flüssigkeitsfüllung:

$$p_y = 0\,, \quad N_y = 0\,, \quad p_z = -\gamma y\,, \quad Q_{y0} = 0\,, \quad w_0 = -\frac{L^4}{4B}\,\gamma y = -\frac{a^2}{Eh}\,\gamma y\,. \tag{1235}$$

Füllgut im Sinne von S. 14:

$$\left.\begin{aligned} &p_y = 0\,, \quad N_y = 0\,, \quad p_z = -p_{s,\max}(1 - e^{-y/y_0})\,, \quad Q_{y0} = \frac{p_{s,\max}\,y_0}{1 + 4\left(\frac{y_0}{L}\right)^4}\,e^{-y/y_0}\,, \\ &\qquad w_0 = -p_{s,\max}\left[\frac{a^2}{Eh} - \frac{1}{B}\,\frac{y_0^4}{1 + 4\left(\frac{y_0}{L}\right)^4}\,e^{-y/y_0}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{1236}$$

Die homogenen Differentialgleichungen

$$\frac{d^4\overline{Q}_y}{d\,(y/L)^4} + 4\,\overline{Q}_y = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d^4\overline{w}}{d\,(y/L)^4} + 4\,\overline{w} = 0 \tag{1237}$$

sind auf S. 769 gelöst worden. Das Ergebnis $\overline{Q}_y$, $\overline{w}$ unterscheidet sich allein durch die Bedeutung der Integrationskonstanten. Sind diese aus den Randbedingungen bestimmt worden, so lassen sich alle Komponenten des Spannungs- und Verschiebungszustandes anschreiben. Aus $Q_y(y)$ wird

$$\left.\begin{aligned} N_y &= -\int p_y\,dy + C\,, \qquad & E\,h\,w &= a^2\,(Q'_y + p_z) + \mu\,a\,N_y\,, \\ N_\beta &= -a\,(Q'_y + p_z)\,, & E\,h\,\vartheta &= a^2\,(Q''_y + p'_z) - \mu\,a\,p_y\,. \end{aligned}\right\} \tag{1238}$$

Aus $w(y)$ folgt

$$\left.\begin{aligned} &N_y = -\int p_y\,dy + C\,, \quad N_\beta = -E\,h\,\frac{w}{a} + \mu\,N_y\,, \quad \vartheta = w'\,, \\ &M_y = -B\,w''\,, \quad M_\beta = -\mu\,B\,w''\,, \quad Q_y = -B\,w'''\,. \end{aligned}\right\} \tag{1239}$$