



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Die Statik im Stahlbetonbau**

**Beyer, Kurt**

**Berlin [u.a.], 1956**

Lösung für unveränderliche Wandstärke h

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

Sie unterliegen den Gleichgewichtsbedingungen (1178)

$$N'_y + p_y = 0, \quad Q'_y + \frac{N_\beta}{a} + p_z = 0, \quad M'_y - Q_y = 0. \quad (1230)$$

Lösung für unveränderliche Wandstärke  $h$ . Die Steifigkeit  $D$  der Schale gegen Dehnung und ihre Steifigkeit  $B$  gegen Biegung sind konstant. In diesem Falle liefert die dritte Gleichgewichtsbedingung (1230) und die Zusammenfassung der ersten beiden Gleichgewichtsbedingungen in Verbindung mit (1228) und (1229) zwei simultane totale Differentialgleichungen.

$$\vartheta'' = -\frac{Q_y}{B}, \quad Q''_y = \frac{D(1-\mu^2)}{a^2} \vartheta - p'_z + \frac{\mu}{a} p_y. \quad (1231)$$

Durch die Elimination der einen Unbekannten entsteht die Differentialgleichung für die andere.

$$\left. \begin{aligned} \vartheta^{IV} + \frac{4}{L^4} \vartheta &= \frac{1}{B} \left( p'_z - \frac{\mu}{a} p_y \right), & Q^{IV}_y + \frac{4}{L^4} Q_y &= - \left( p'_z - \frac{\mu}{a} p_y \right)'' \\ \frac{1}{L^4} &= \frac{3(1-\mu^2)}{h^2 \cdot a^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1232)$$

Die Verknüpfung von  $M'_y = Q'_y$  mit den übrigen Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen liefert die Differentialgleichung der Biegelinie des Meridians

$$w^{IV} + \frac{4}{L^4} w = \frac{1}{B} \left( p_z + \mu \frac{N_y}{a} \right), \quad N_y = - \int p_y dy + C. \quad (1233)$$

Die vollständige Lösung der Differentialgleichungen für  $Q_y$  oder  $w$  besteht aus einem von der Belastung  $p_y, p_z$  abhängigen partikulären Integral  $Q_{y0}, w_0$  der inhomogenen Gleichung und aus der allgemeinen Lösung  $\bar{Q}_y, \bar{w}$  der homogenen Gleichung mit vier Integrationskonstanten.

$$Q_y = Q_{y0} + \bar{Q}_y \quad w = w_0 + \bar{w}. \quad (1234)$$

Flüssigkeitsfüllung:

$$p_y = 0, \quad N_y = 0, \quad p_z = -\gamma y, \quad Q_{y0} = 0, \quad w_0 = -\frac{L^4}{4B} \gamma y = -\frac{a^2}{Eh} \gamma y. \quad (1235)$$

Füllgut im Sinne von S. 14:

$$\left. \begin{aligned} p_y = 0, \quad N_y = 0, \quad p_z &= -p_{s, \max} (1 - e^{-y/y_0}), & Q_{y0} &= \frac{p_{s, \max} y_0}{1 + 4 \left( \frac{y_0}{L} \right)^4} e^{-y/y_0}, \\ w_0 &= -p_{s, \max} \left[ \frac{a^2}{Eh} - \frac{1}{B} \frac{y_0^4}{1 + 4 \left( \frac{y_0}{L} \right)^4} e^{-y/y_0} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (1236)$$

Die homogenen Differentialgleichungen

$$\frac{d^4 \bar{Q}_y}{d(y/L)^4} + 4 \bar{Q}_y = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d^4 \bar{w}}{d(y/L)^4} + 4 \bar{w} = 0 \quad (1237)$$

sind auf S. 769 gelöst worden. Das Ergebnis  $\bar{Q}_y, \bar{w}$  unterscheidet sich allein durch die Bedeutung der Integrationskonstanten. Sind diese aus den Randbedingungen bestimmt worden, so lassen sich alle Komponenten des Spannungs- und Verschiebungszustandes ansprechen. Aus  $Q_y(y)$  wird

$$\left. \begin{aligned} N_y &= - \int p_y dy + C, & E h w &= a^2 (Q'_y + p_z) + \mu a N_y, \\ N_\beta &= -a (Q'_y + p_z), & E h \vartheta &= a^2 (Q''_y + p'_z) - \mu a p_y. \end{aligned} \right\} \quad (1238)$$

Aus  $w(y)$  folgt

$$\left. \begin{aligned} N_y &= - \int p_y dy + C, & N_\beta &= -E h \frac{w}{a} + \mu N_y, & \vartheta &= w', \\ M_y &= -B w'', & M_\beta &= -\mu B w'', & Q_y &= -B w'''. \end{aligned} \right\} \quad (1239)$$

Die Untersuchung wird daher auf die Ableitung des Spannungszustandes aus den Verschiebungen  $w$  beschränkt. Nach Abb. 816 ist mit (1237)

$$\frac{L^4}{l^4} \frac{d^4 \bar{w}}{d(y/l)^4} + 4 \bar{w} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d^4 \bar{w}}{d(\lambda \eta)^4} + 4 \bar{w} = 0, \quad \lambda = \frac{l}{L}, \quad \eta = \frac{y}{l}. \quad (1240)$$

Der Buchstabe  $L$  bezeichnet eine für jede Zylinderschale charakteristische Länge, welche von den Abmessungen des Breitenschnittes und von den elastischen Eigenschaften des Baustoffs abhängt. Sie beträgt bei Verwendung von Eisenbeton mit  $\mu = 1/6$

$$L = a : \sqrt{\frac{a}{h} \sqrt{3(1-\mu^2)}} = a : 1,31 \sqrt{\frac{a}{h}}. \quad (1241)$$

$l/L = \lambda$  ist eine Schalenkonstante,  $y/l = \eta$  die unbenannte, ortsbestimmende Koordinate. Nach S. 769 ist

$$\bar{w} = C_1 e^{-\lambda \eta} \cos \lambda \eta + C_2 e^{-\lambda \eta} \sin \lambda \eta + C_3 e^{\lambda \eta} \cos \lambda \eta + C_4 e^{\lambda \eta} \sin \lambda \eta \quad (1242)$$

und mit  $C_1 = A_1 \cos \gamma_1, \quad C_2 = -A_1 \sin \gamma_1$  usw.

auch  $\bar{w} = A_1 e^{-\lambda \eta} \cos(\lambda \eta + \gamma_1) + A_2 e^{+\lambda \eta} \cos(\lambda \eta + \gamma_2).$

Der abklingende Anteil der Funktion allein ist eine periodisch gedämpfte Schwingung. Die halbe Wellenlänge ist  $l_0 = \pi l / \lambda = \pi L$ , das logarithmische Dekrement  $\pi$ , so daß die Amplituden der Funktion  $\bar{w}$  und aller ihrer Ableitungen mit jeder halben Welle auf  $1/23,14$  des vorhergehenden Ausschlags zurückgehen. Sie klingen also um so schneller ab, je größer  $\lambda$  oder je kleiner  $L$  ist. Aus diesem Grunde gelten Schalen mit  $l > 7L$  als unendlich lang nach einer Richtung. Bei diesen sind die Integrationskonstanten  $C_3, C_4$  oder  $A_2, \gamma_2$  Null, damit die Wirkung der Randkräfte in  $\eta = 0$  für  $\eta = \infty$  verschwindet.

Die allgemeine Rechenvorschrift zerfällt daher bei hohen Zylinderschalen mit  $l > 7L$  in zwei Teillösungen für den unendlich langen Zylinder, bei welchen  $\eta$  sowohl

für  $w_0$  wie für  $\bar{w}$  entweder vom oberen oder unteren Rande gerechnet wird (Abb. 817). In beiden Fällen ist nach (1242)

$$\left. \begin{aligned} \bar{w} &= e^{-\lambda \eta} (C_1 \cos \lambda \eta + C_2 \sin \lambda \eta) \quad \text{und mit } d\bar{w}/d(\lambda \eta) = \bar{w}' \text{ usw.} \\ \bar{w}' &= -e^{-\lambda \eta} [C_1 (\sin \lambda \eta + \cos \lambda \eta) + C_2 (\sin \lambda \eta - \cos \lambda \eta)], \\ \bar{w}'' &= 2 e^{-\lambda \eta} (C_1 \sin \lambda \eta - C_2 \cos \lambda \eta), \\ \bar{w}''' &= -2 e^{-\lambda \eta} [C_1 (\sin \lambda \eta - \cos \lambda \eta) - C_2 (\sin \lambda \eta + \cos \lambda \eta)], \end{aligned} \right\} \quad (1243)$$

$$\left. \begin{aligned} N_\beta &= -\frac{E h}{a} (w_0 + \bar{w}) + \mu N_\nu, & w' &= w'_0 + \frac{\bar{w}'}{L}, \\ M_\nu &= -B w'' = -B \left( w''_0 + \frac{\bar{w}''}{L^2} \right), & Q_\nu &= -B w''' = -B \left( w'''_0 + \frac{\bar{w}'''}{L^3} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1244)$$

Das Ergebnis (1244) gilt selbstverständlich auch für die vollständige Lösung  $\bar{w}$  (1242) der homogenen Differentialgleichung. Es bedeutet mechanisch die Überlagerung der Verschiebungen  $w_0$  und der Schnittkräfte  $N_{\nu 0}, N_{\beta 0}$  der statisch bestimmt gestützten Schale aus der vorgeschriebenen Belastung  $p_\nu, p_z$  mit den Anteilen  $\bar{w}, \bar{M}_\nu, \bar{M}_\beta$  aus den Biegemomenten und Querkräften ( $X_1$  bis  $X_4$ ), welche durch Randstörungen, also durch statisch unbestimmten Anschluß der Schale, unverschiebliche Lagerung und Einspannung des Schalenrandes hervorgerufen werden. Sind die Randkräfte bekannt, so läßt sich der Verschiebungs- und Spannungs-

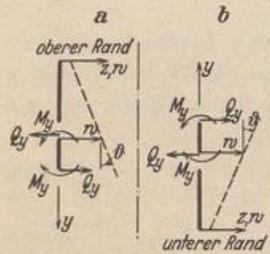


Abb. 817.

zustand der Schale nach der folgenden Rechenvorschrift anschreiben:

$$w = w_0 + \sum X_i w_i, \quad N_\beta = N_{\beta 0} + \sum X_i N_{\beta i}, \quad (i = 1, \dots, 4). \quad (1245)$$

Die Komponenten  $w_0, N_{\beta 0}$  aus der Belastung der statisch bestimmt gestützten biegungssteifen Schale stimmen ebenso wie bei der Kugel- und Kegelschale nahezu mit den Schnittkräften und Verschiebungen des Längsspannungszustandes überein und sind in einzelnen Belastungsfällen mit diesen identisch. Daher können die Komponenten  $w_0, N_{\beta 0}$  nach den Angaben in Abschn. 80 eingesetzt werden. Die Schnittkräfte  $N_{\beta i}, M_{\nu i}$  und die Verschiebungen  $w_i$  der biegungssteifen Schale werden für  $X_i = 1$  aus den homogenen Gleichungen (1237) berechnet. Dabei sind die übrigen Randkräfte Null. Die Integrationskonstanten werden dabei allerdings in der Regel für die Randbedingungen eines nach einer Richtung unendlich langen Zylinders angegeben, zumal diese Lösung bereits aus Abschn. 22 bekannt ist.

Lösung für  $X_1 = 1$  (Abb. 818a):

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= \frac{2a^2}{LEh} e^{-\lambda\eta} \cos \lambda\eta, & \vartheta_1 &= -\frac{2a^2}{L^2Eh} e^{-\lambda\eta} (\sin \lambda\eta + \cos \lambda\eta), \\ N_{\beta 1} &= -\frac{2a}{L} e^{-\lambda\eta} \cos \lambda\eta, & M_{\nu 1} &= -L e^{-\lambda\eta} \sin \lambda\eta, \\ & & Q_{\nu 1} &= e^{-\lambda\eta} (\sin \lambda\eta - \cos \lambda\eta). \end{aligned} \right\} \quad (1246)$$

Lösung für  $X_2 = 1$  (Abb. 818b):

$$\left. \begin{aligned} w_2 &= -\frac{2a^2}{L^2Eh} e^{-\lambda\eta} (\cos \lambda\eta - \sin \lambda\eta), & \vartheta_2 &= \frac{4a^2}{L^3Eh} e^{-\lambda\eta} \cos \lambda\eta, \\ N_{\beta 2} &= -\frac{2a}{L^2} e^{-\lambda\eta} (\cos \lambda\eta - \sin \lambda\eta), & M_{\nu 2} &= e^{-\lambda\eta} (\sin \lambda\eta + \cos \lambda\eta), \\ Q_{\nu 2} &= -\frac{2}{L} e^{-\lambda\eta} \sin \lambda\eta. \end{aligned} \right\} \quad (1247)$$

Die Anschlußkräfte  $X_i (i = 1 \dots 4)$  sind durch die geometrischen oder statischen Bedingungen aus der vorgeschriebenen Abstützung  $\delta_i (i = 1 \dots 4)$  der beiden Schalenränder  $a, b$  oder durch ihre Verbindung mit benachbarten Bauteilen (Platte, Kegelschale, Kugelschale) bestimmt. Die Buchstaben  $\delta_i$  bedeuten dann die gegenseitige Verschiebung der Ränder oder die gegenseitige Verdrehung der Endtangentialen der benachbarten rotationssymmetrischen Flächen ( $\delta_i = \delta_{i,1} + \delta_{i,2}$ , vgl. S. 773). Auch hierbei wird in der Regel mit dem einseitig unendlich langen Zylinder gerechnet, um die Aufgabe zu vereinfachen. Nach (1246) und (1247) ist

$$\delta_{11,2} = \frac{2a^2}{LEh}, \quad \delta_{12,2} = \delta_{21,2} = -\frac{2a^2}{L^2Eh}, \quad \delta_{22,2} = \frac{4a^2}{L^3Eh}. \quad (1248)$$

1. Starre Einspannung des Randes  $a (\eta = 0)$  eines unendlich langen Zylinders.

$$\delta_1 = X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \delta_{10} = 0,$$

$$\delta_2 = X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + \delta_{20} = 0.$$

Mit (1248) und  $\delta_{10} = w_{a0}, \delta_{20} = w'_{a0}$  wird

$$\left. \begin{aligned} X_2 = M_a &= -\frac{L^2Eh}{2a^2} (w_{a0} + Lw'_{a0}), \\ X_1 = -Q_a &= -\frac{LEh}{2a^2} (2w_{a0} + Lw'_{a0}). \end{aligned} \right\} \quad (1249)$$

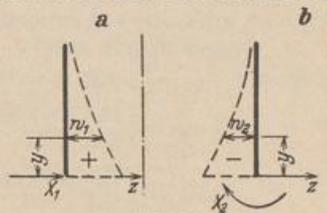


Abb. 818.

2. Gelenkige Lagerung des Randes  $a(\eta = 0)$  eines unendlich langen Zylinders.

$$M_a = X_2 = 0$$

und

$$\delta_1 = X_1 \delta_{11} + \delta_{10} = 0,$$

also mit (1248)

$$X_1 = -Q_a = -\frac{L E h}{2 a^2} w_{a0}. \quad (1250)$$

Damit sind nach (1244) auch die Formänderungen und Schnittkräfte bekannt.

Zylinderschale mit  $h = \text{const}$  als Behälter (Abb. 819). Der untere Rand des Mantels ist im Behälterboden starr eingespannt, der obere Rand kann frei, gelenkig gelagert oder ebenfalls eingespannt sein. Um die strenge Lösung der Aufgabe zu begründen, sollen die Abmessungen des Behälters eine relativ große charakteristische Länge  $L$  bestimmen und daher die Integrationskonstanten der Lösung (1242) von den Bedingungen an beiden Rändern abhängen. Nach S. 760 ist

$$p_z = -\gamma y = -\gamma L \lambda \eta, \quad w_0 = -\gamma \frac{L a^2}{E h} \lambda \eta. \quad (1251)$$

Die vollständige Lösung  $w = w_0 + \bar{w}$  der inhomogenen Differentialgleichung lautet daher nach (260) transformiert

$$w = -\gamma \frac{L a^2}{E h} \lambda \eta + U_1 \cos \lambda \eta \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \lambda \eta + U_2 \cos \lambda \eta \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \lambda \eta + U_3 \sin \lambda \eta \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \lambda \eta + U_4 \sin \lambda \eta \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \lambda \eta. \quad (1252)$$

Werden die Ableitungen der Funktion  $w$  nach der Veränderlichen  $(\lambda \eta)$  mit  $w'$ ,  $w''$  usw. bezeichnet, so sind nach (1244)

$$\vartheta = \frac{1}{L} w', \quad M_y = -\frac{B}{L^2} w'', \quad M_\beta = -\mu \frac{B}{L^2} w''', \quad Q_y = -\frac{B}{L^3} w'''. \quad (1253)$$

Die Funktionen  $w'$  usw. sind auf S. 141 angeschrieben. Die Vorzahlen sind

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{a} \sqrt[4]{3 \frac{a^2}{h^2} (1 - \mu^2)}, \quad \frac{B}{L^2} = \frac{E h^2}{4 a} \frac{1}{\sqrt[4]{3 (1 - \mu^2)}}, \quad (1254)$$

so daß die Integrationskonstanten  $U_1 \dots U_4$  leicht aus den Randbedingungen für  $\lambda \eta = 0$  oder  $\lambda \eta = \lambda$  berechnet werden können.

1. Oberer Rand frei,  $\lambda \eta = 0$  mit  $w'' = 0$  und  $w''' = 0$ , unterer Rand eingespannt  $\lambda \eta = \lambda$ , mit  $w = 0$ ,  $w' = 0$ .

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= -\gamma \frac{L a^2}{E h} \frac{\cos \lambda \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \lambda + \sin \lambda \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \lambda - 2 \lambda \cos \lambda \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \lambda}{\lambda (\cos^2 \lambda + \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f}^2 \lambda)}, & U_4 &= 0, \\ U_2 &= -\gamma \frac{L a^2}{E h} \frac{\cos \lambda \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \lambda - \sin \lambda \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \lambda - 1/\lambda \cdot \cos \lambda \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \lambda}{\cos^2 \lambda + \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f}^2 \lambda} = U_3. \end{aligned} \right\} \quad (1255)$$

2. Oberer Rand gelenkig gelagert  $\lambda \eta = 0$  mit  $w = 0$  und  $w'' = 0$ , unterer Rand eingespannt  $\lambda \eta = \lambda$  mit  $w = 0$ ,  $w' = 0$ .

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= 0, & U_2 &= -\gamma \frac{L a^2}{E h} \frac{1/\lambda \cdot \sin \lambda \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \lambda - \sin \lambda \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \lambda - \cos \lambda \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \lambda}{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \lambda \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \lambda - \cos \lambda \sin \lambda}, \\ U_4 &= 0, & U_3 &= +\gamma \frac{L a^2}{E h} \frac{1/\lambda \cdot \cos \lambda \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \lambda + \sin \lambda \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \lambda - \cos \lambda \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \lambda}{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \lambda \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \lambda - \cos \lambda \sin \lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (1256)$$

3. Oberer Rand eingespannt  $\lambda \eta = 0$  mit  $w = 0$  und  $w' = 0$ , unterer Rand eingespannt  $\lambda \eta = \lambda$  mit  $w = 0$  und  $w' = 0$ .

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= 0, & U_2 &= -\gamma \frac{L a^2}{E h} \frac{(\mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \lambda + \sin \lambda) \sin \lambda - \lambda (\sin \lambda \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \lambda + \cos \lambda \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \lambda)}{\lambda (\mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n}^2 \lambda - \sin^2 \lambda)}, \\ U_3 &= -\gamma \frac{L a^2}{E h} \frac{\lambda (\sin \lambda \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \lambda + \cos \lambda \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \lambda) - \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \lambda (\sin \lambda + \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \lambda)}{\lambda (\mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n}^2 \lambda - \sin^2 \lambda)}, \\ U_4 &= -\gamma \frac{L a^2}{E h} \frac{(\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \lambda - \cos \lambda) (\mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \lambda + \sin \lambda) - 2 \lambda \sin \lambda \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \lambda}{\lambda (\mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n}^2 \lambda - \sin^2 \lambda)}. \end{aligned} \right\} \quad (1257)$$