Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Zahlenbeispiel

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

Die Integrationskonstanten C_1, C_2 sind unabhängig von x, aber Funktionen von α, und daher nur durch Randbedingungen für $x = \text{const}$ bestimmt. Bei freier Auflagerung der Schale auf zwei Querstützen sind die Längskräfte N_x an den freien Rändern in $x = \pm l$ Null; bei freier Auskragung der Schale sind Längskraft N_x und Schubkraft $N_{\alpha x}$ am freien Rand Null. Randstörungen des Membranzustandes sind dabei aber nur dann ausgeschlossen, wenn die Dehnung von Schalenrand und Querstütze stetig ineinander übergehen. In allen anderen Fällen entstehen ebenso wie bei der Verbindung von Rotationsschale und Ringträger Biegungsspannungen, die sich allerdings ebenso wie dort nur auf eine schmale Randzone beschränken und daher keine große Bedeutung besitzen.

Der Verschiebungszustand der Mittelfläche (u, v, w) läßt sich mit den als bekannt anzusehenden Schnittkräften aus den folgenden Beziehungen berechnen:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E h}(N_x - \mu N_\alpha), \qquad \varepsilon_\alpha = \frac{\partial v}{r \partial \alpha} - \frac{w}{r} = \frac{1}{E h}(N_\alpha - \mu N_x), \\ \gamma_{x\alpha} &= \frac{\partial u}{r \partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2(1+\mu)}{E h} N_{\alpha x}. \end{aligned}\right\} \quad (1264)$$

Spannungszustand einer freitragenden Druckrohrleitung.

1. Lösung für Eigengewicht $p_x = 0$, $p_y = g \sin\alpha$, $p_z = g \cos\alpha$.
Nach (1263) ist

$$N_\alpha = -a g \cos\alpha,$$

$$N_{\alpha x} = -\frac{1}{a}\int a g \sin\alpha \, dx - g \int \sin\alpha \, dx + C_1 = -2 g x \sin\alpha + C_1.$$

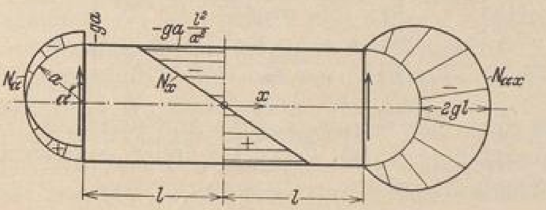

Abb. 835. Schnittkräfte infolge Eigengewicht.

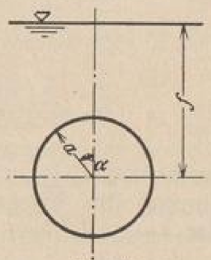

Abb. 836.

Aus Symmetriegründen ist $N_{\alpha x} = 0$ für $x = 0$, also $C_1 = 0$.

$$N_x = +\frac{1}{a}\int 2 g x \cos\alpha \, dx + C_2 = \frac{g}{a}\cos\alpha\,(x^2 + C_2).$$

Für $x = l$ ist $N_x = 0$, also $C_2 = -l^2$. Die Schnittkräfte lauten nunmehr

$$N_\alpha = -g a \cos\alpha, \qquad N_{\alpha x} = -2 g x \sin\alpha, \qquad N_x = -g a \frac{l^2}{a^2}\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)\cos\alpha.$$

Sie sind in Abb. 835 dargestellt.

Abb. 837. Schnittkräfte und Spannungstrajektorien in einem Rohrabschnitt.

2. Lösung für Wasserüberdruck $p_x = 0$, $p_y = 0$, $p_z = -\gamma(f - a\cos\alpha)$ (Abb. 836). Die Integration nach (1263) liefert

$$N_\alpha = a^2\gamma\left(\frac{f}{a} - \cos\alpha\right), \qquad N_{\alpha x} = -\gamma\, a\, x\sin\alpha\,, \qquad N_x = -\gamma\frac{l^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)\cos\alpha\,.$$

Die Schnittkräfte und Spannungstrajektorien sind bei Wasserfüllung ohne Überdruck, also für $f = a = 1{,}10$ m auf der linken Seite, bei Wasserfüllung mit $f = 40{,}0$ m auf der rechten Seite der Abb. 837 eingetragen. Die Hauptspannungen werden also bei wachsendem Überdruck immer mehr zu Ringspannungen. Dabei wird die Durchbiegung des Rohres kleiner.

Die Tonnenschale mit Querstützung. Die Mittelfläche der Tonnenschale ist ein zum Meridianschnitt $\alpha = 0$ symmetrischer Abschnitt einer Zylinderfläche mit parallelen Rändern $\alpha = \alpha^* = \text{const}$. Die Krümmung des Breitenschnittes $1/r$ ist eine Funktion von α, die Wanddicke h in der Regel konstant. Das Flächentragwerk ruht entweder auf allen vier Rändern oder trägt sich zwischen den Querwänden frei. Daneben sind auch noch andere Stützungsmöglichkeiten vorhanden.

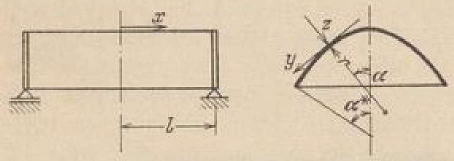

Abb. 838.

Die Belastung p wirkt stetig, wird aber im Hinblick auf die Anwendung im Bauwesen derart angenommen, daß $p_x = 0$ und p_y, p_z allein stetige Funktionen von α, also unabhängig von x sind. Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen (1263) lauten dann folgendermaßen:

$$\left.\begin{aligned} N_\alpha &= -p_z r\,, \qquad N_{x\alpha} = -\left(p_y + \frac{1}{r}\frac{\partial N_\alpha}{\partial\alpha}\right)x + C_1(\alpha)\,,\\ N_x &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(p_y + \frac{1}{r}\frac{\partial N_\alpha}{\partial\alpha}\right)\frac{x^2}{2} - \frac{x}{r}\frac{\partial C_1(\alpha)}{\partial\alpha} + C_2(\alpha). \end{aligned}\right\} \tag{1265}$$

Tragwerk und Belastung sind zum Querschnitt $x = 0$ symmetrisch, so daß zur Berechnung der Integrationskonstanten $C_1(\alpha)$, $C_2(\alpha)$ bei freier Auflagerung der Ränder $x = \pm l$ folgende Bedingungen gelten:

$$\left.\begin{aligned} x &= 0: \qquad N_{\alpha x} = 0 \quad \text{also} \quad C_1(\alpha) = 0\,,\\ x &= \pm l: \qquad N_x = 0 \quad \text{also} \quad C_2(\alpha) = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(p_y + \frac{1}{r}\frac{\partial N_\alpha}{\partial\alpha}\right)\frac{l^2}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{1266}$$

Die Schnittkräfte sind daher

$$N_\alpha = -p_z r,\; N_{\alpha x} = -\left(p_y + \frac{1}{r}\frac{\partial N_\alpha}{\partial\alpha}\right)x,\; N_x = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(p_y + \frac{1}{r}\frac{\partial N_\alpha}{\partial\alpha}\right)\left(\frac{l^2 - x^2}{2}\right). \tag{1267}$$

Ist $x = 0$ der freie Rand einer einseitig eingespannten Tonne mit $N_x = 0$, $N_{\alpha x} = 0$, so ist $C_1(\alpha) = 0$ und $C_2(\alpha) = 0$.

An den Längsrändern $\alpha^* = \text{const}$ werden in der Regel Längskräfte N_α^* und Schubkräfte $N_{\alpha x}^*$ an Randglieder abgegeben. Der Längsspannungszustand der Schale bleibt dabei aber nur erhalten, wenn Dehnung und Spannung in der Grenzschicht zwischen den benachbarten Bauteilen stetig ineinander übergehen, ohne daß Biegungsspannungen entstehen.

Sind die Endtangenten des Breitenschnittes senkrecht ($\alpha^* = 90^0$), so sind bei lotrechter Belastung die Längskräfte N_α^* Null und daher am Rande nur noch Schubkräfte $N_{\alpha x}^*$ vorhanden, die einem Randglied zugeführt werden müssen. Sie sind nach (1267) zum Breitenschnitt $x = 0$ symmetrisch und erzeugen im Querschnitt x des Randgliedes eine Längskraft

$$S = -\left(p_y + \frac{1}{r}\frac{\partial N_\alpha}{\partial\alpha}\right)\int\limits_l^x x\,dx = \left(p_y + \frac{1}{r}\frac{\partial N_\alpha}{\partial\alpha}\right)\left(\frac{l^2 - x^2}{2}\right). \tag{1268}$$