Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Die Tonnenschalen mit Querstützung

2. Lösung für Wasserüberdruck $p_x = 0$, $p_y = 0$, $p_z = -\gamma(f - a\cos\alpha)$ (Abb. 836). Die Integration nach (1263) liefert

$$N_\alpha = a^2\gamma\left(\frac{f}{a} - \cos\alpha\right), \qquad N_{\alpha x} = -\gamma\, a\, x \sin\alpha\,, \qquad N_x = -\gamma\frac{l^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)\cos\alpha\,.$$

Die Schnittkräfte und Spannungstrajektorien sind bei Wasserfüllung ohne Überdruck, also für $f = a = 1{,}10$ m auf der linken Seite, bei Wasserfüllung mit $f = 40{,}0$ m auf der rechten Seite der Abb. 837 eingetragen. Die Hauptspannungen werden also bei wachsendem Überdruck immer mehr zu Ringspannungen. Dabei wird die Durchbiegung des Rohres kleiner.

Die Tonnenschale mit Querstützung. Die Mittelfläche der Tonnenschale ist ein zum Meridianschnitt $\alpha = 0$ symmetrischer Abschnitt einer Zylinderfläche mit parallelen Rändern $\alpha = \alpha^* = \text{const}$. Die Krümmung des Breitenschnittes $1/r$ ist eine Funktion von α, die Wanddicke h in der Regel konstant. Das Flächentragwerk ruht entweder auf allen vier Rändern oder trägt sich zwischen den Querwänden frei. Daneben sind auch noch andere Stützungsmöglichkeiten vorhanden.

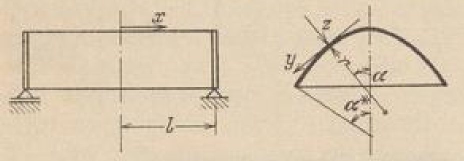

Abb. 838.

Die Belastung p wirkt stetig, wird aber im Hinblick auf die Anwendung im Bauwesen derart angenommen, daß $p_x = 0$ und p_y, p_z allein stetige Funktionen von α, also unabhängig von x sind. Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen (1263) lauten dann folgendermaßen:

$$\left.\begin{aligned} N_\alpha &= -p_z r\,, \qquad N_{x\alpha} = -\left(p_y + \frac{1}{r}\frac{\partial N_\alpha}{\partial\alpha}\right)x + C_1(\alpha)\,,\\ N_x &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(p_y + \frac{1}{r}\frac{\partial N_\alpha}{\partial\alpha}\right)\frac{x^2}{2} - \frac{x}{r}\frac{\partial C_1(\alpha)}{\partial\alpha} + C_2(\alpha)\,. \end{aligned}\right\} \tag{1265}$$

Tragwerk und Belastung sind zum Querschnitt $x = 0$ symmetrisch, so daß zur Berechnung der Integrationskonstanten $C_1(\alpha)$, $C_2(\alpha)$ bei freier Auflagerung der Ränder $x = \pm l$ folgende Bedingungen gelten:

$$\left.\begin{aligned} x &= 0: & N_{\alpha x} &= 0 \quad \text{also} \quad C_1(\alpha) = 0\,,\\ x &= \pm l: & N_x &= 0 \quad \text{also} \quad C_2(\alpha) = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(p_y + \frac{1}{r}\frac{\partial N_\alpha}{\partial\alpha}\right)\frac{l^2}{2}\,. \end{aligned}\right\} \tag{1266}$$

Die Schnittkräfte sind daher

$$N_\alpha = -p_z r\,,\ N_{\alpha x} = -\left(p_y + \frac{1}{r}\frac{\partial N_\alpha}{\partial\alpha}\right)x\,,\ N_x = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(p_y + \frac{1}{r}\frac{\partial N_\alpha}{\partial\alpha}\right)\left(\frac{l^2 - x^2}{2}\right). \tag{1267}$$

Ist $x = 0$ der freie Rand einer einseitig eingespannten Tonne mit $N_x = 0$, $N_{\alpha x} = 0$, so ist $C_1(\alpha) = 0$ und $C_2(\alpha) = 0$.

An den Längsrändern $\alpha^* = \text{const}$ werden in der Regel Längskräfte N_α^* und Schubkräfte $N_{\alpha x}^*$ an Randglieder abgegeben. Der Längsspannungszustand der Schale bleibt dabei aber nur erhalten, wenn Dehnung und Spannung in der Grenzschicht zwischen den benachbarten Bauteilen stetig ineinander übergehen, ohne daß Biegungsspannungen entstehen.

Sind die Endtangenten des Breitenschnittes senkrecht ($\alpha^* = 90^0$), so sind bei lotrechter Belastung die Längskräfte N_α^* Null und daher am Rande nur noch Schubkräfte $N_{\alpha x}^*$ vorhanden, die einem Randglied zugeführt werden müssen. Sie sind nach (1267) zum Breitenschnitt $x = 0$ symmetrisch und erzeugen im Querschnitt x des Randgliedes eine Längskraft

$$S = -\left(p_y + \frac{1}{r}\frac{\partial N_\alpha}{\partial\alpha}\right)\int_l^x x\,dx = \left(p_y + \frac{1}{r}\frac{\partial N_\alpha}{\partial\alpha}\right)\left(\frac{l^2 - x^2}{2}\right). \tag{1268}$$

Die Längskräfte S der beiden Randglieder bilden mit den Längskräften N_x eines Querschnitts der Tonne eine Gleichgewichtsgruppe

$$S + \int_0^{\alpha^*} N_x r \, d\alpha = 0$$

und erhalten damit die Bedeutung der Biegungslängskraft eines Balkenträgers.

Die Form des Breitenschnittes steht mit dem Spannungszustand in einer Beziehung, die sich bei der Belastung der Tonne durch Eigengewicht $g = \text{const}$ leicht verfolgen läßt, wenn der Parameter n in der Gleichung des Breitenschnittes $1/r = 1/a \cdot \cos^n \alpha$ durch verschiedene ganze Zahlen ersetzt wird. $n = 3$ liefert eine Parabel, $n = 2$ eine Kettenlinie, $n = 0$ einen Kreis und $n = -1$ eine Zykloide. Mit $p_x = 0$, $p_y = g \sin\alpha$, $p_z = g \cos\alpha$ ist dann

$$\left.\begin{aligned} &N_\alpha = -g\,a/\cos^{n-1}\alpha\,, \quad \text{die Bogenkraft} \quad H = -N_\alpha \cos\alpha = g\,a/\cos^{n-2}\alpha\,, \\ &N_{x\alpha} = -g\,x\,(2-n)\sin\alpha\,, \qquad N_x = -g\,\frac{(2-n)}{a}\cos^{n+1}\alpha\,\frac{l^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{1269}$$

a) Der Breitenschnitt ist eine Kettenlinie: $n = 2$.

$$H = g\,a = \text{const}\,, \qquad N_{x\alpha} = 0\,, \qquad N_x = 0\,, \qquad S = 0\,. \tag{1270}$$

Die Tonne überträgt das Eigengewicht abgesehen von Randstörungen biegungsfrei nach den Bauteilen am Rande $\alpha^* = \text{const}$.

b) Der Breitenschnitt ist der Kettenlinie einbeschrieben: $n > 2$.

Der Bogenschub nimmt mit wachsendem α zu, die Schubkräfte $N_{\alpha x} = N_{x\alpha}$ und die Längskräfte N_x sind positiv und daher S negativ.

c) Der Breitenschnitt ist gegen die Kettenlinie überhöht: $n < 2$.

Der Bogenschub nimmt mit wachsendem α ab, die Schubkräfte $N_{\alpha x} = N_{x\alpha}$ und die Längskräfte N_x sind negativ, die Längskraft S der Randglieder positiv. Bei Tonnen mit senkrechter Endtangente ($N_\alpha^* = 0$) wird das Eigengewicht vollständig nach den Querstützen abgetragen. Die Tonne wird zum Träger. Für freitragende Schalendächer mit Querstützung durch Wände oder Binder sind nur die überhöhten Breitenschnitte geeignet.

Nach diesen Untersuchungen kann das Gleichgewicht zwischen der stetigen Belastung einer Tonnenschale und den inneren Kräften eines Längsspannungszustandes nur in Verbindung mit einem Randglied hergestellt werden, dessen Längskraft S die Schubkräfte $N_{\alpha x}$ am Rande der Schale α^* aufnimmt und ausgleicht. Da jedoch der Sinn der Längskraft S des Randgliedes dem Sinne der Längskraft N_x des Schalenrandes stets entgegengesetzt ist, so kann sich in der Randzone kein Längsspannungszustand ausbilden. Die Unstetigkeit der Formänderung zwischen Schalenrand und Randglied bedeutet vielmehr stets Krümmungsänderungen durch Biegung. Sie sind um so größer, je mehr die mit der Angliederung besonderer Bauteile verbundene unstetige Gewichtsvermehrung die Annahmen über die äußeren Kräfte in den Gleichgewichtsbedingungen für den Längsspannungszustand verändert. Dabei ist zunächst noch immer ein Breitenschnitt mit senkrechter Endtangente angenommen worden. Die Verbindung von flachen Kreiszylinderschalen mit hohen Randträgern zwingt jedoch von vornherein ebenso wie die unstetige Belastung oder die unstetige Krümmung der Tonnenschalen dazu, die Biegungsspannungen des Flächentragwerks in den Vordergrund zu stellen. Dabei werden die Anschlußkräfte zwischen Träger und Schale in ähnlicher Weise wie bei den rotationssymmetrischen Schalen als die überzähligen Größen eines Hauptsystems betrachtet, das durch die Trennung der Randträger von der Schale entsteht. Die überzähligen Größen, also die Biegungsmomente, Längs- und Schubkräfte sind jetzt allerdings nicht mehr konstant, sondern Funktionen von x, die als periodische Funktionen in trigonometrischen Reihen entwickelt angenommen werden. Das Ergebnis entsteht aber ebenso wie bei den biegungssteifen rotationssymmetrischen Schalen durch die Überlagerung des Längsspannungszustandes aus der vorgeschriebenen Belastung mit den Biegungsspannungen aus den überzähligen Größen, für deren Berechnung die geometrischen Bedingungen über die gegenseitige Verschiebung und Verdrehung der Ufer der Anschlußquerschnitte von Schalen und Randträger verwendet werden. Die Lösung des Problems ist von U. Finsterwalder gezeigt worden. Mit Rücksicht auf Platzmangel muß auf die angegebene Literatur verwiesen werden.

1. Der Breitenschnitt ist eine Ellipse.

$$r = \frac{a^2 b^2}{(a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha)^{3/2}}.$$

Schnittkräfte aus Eigengewicht $p_y = g \sin\alpha$; $p_z = g \cos\alpha$.

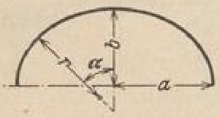

Abb. 839.

$$N_\alpha = -g\, a^2 b^2 \frac{\cos\alpha}{(a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha)^{3/2}},$$

$$N_{x\alpha} = -g\, x \frac{2a^2 + (a^2 - b^2)\cos^2\alpha}{a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha} \sin\alpha,$$

$$N_x = -\frac{g\, l^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) \cos\alpha \frac{3a^2b^2 - 3a^2(a^2 - b^2)\sin^2\alpha - (a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha)^2}{a^2b^2\,(a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha)^{1/2}}$$

Schnittkräfte aus Schneelast. $p_y = p_s \sin\alpha \cos\alpha$, $p_z = p_s \cos^2\alpha$.

$$N\alpha = -p_s\, a^2 b^2 \frac{\cos^2\alpha}{(a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha)^{3/2}},$$

$$N\alpha x = -3\, p_s\, a^2\, x \frac{\sin\alpha \cos\alpha}{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha},$$

$$N_x = \frac{3}{2} p_s \frac{l^2}{b^2}\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) \frac{a^2\sin^2\alpha - b^2\cos^2\alpha}{(a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha)^{1/2}}.$$

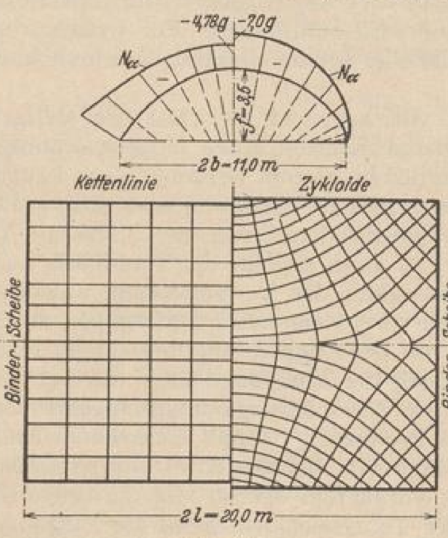

Abb. 840.

Gleichung der

Kettenlinie	Zykloide
$y = 8{,}28 - 4{,}78\, \mathfrak{Cos}\, \frac{x}{4{,}78}$	$x = \frac{f}{2}(\varphi - \sin\varphi)$
$a = 4{,}78$	$y = \frac{f}{2}(1 - \cos\varphi)$
	$0 \leqq \varphi \leqq f$
	$a = 2f$

2. Der Breitenschnitt ist eine Zykloide.

$$r = a \cos\alpha.$$

Schnittkräfte aus Eigengewicht

$$p_y = g \sin\alpha, \quad p_z = g \cos\alpha.$$

$$N_\alpha = -g\, a \cos^2\alpha, \qquad N_{x\alpha} = -3\, g\, a \frac{x}{a} \sin\alpha,$$

$$N_x = -\frac{3}{2} g\, a \frac{l^2}{a^2}\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right).$$

Die Schnittkräfte und Trajektorien sind in Abb. 840 mit denjenigen für eine Kettenlinie als Breitenschnitt verglichen worden.

Schnittkräfte aus Schneelast

$$p_y = p_s \sin\alpha \cos\alpha, \quad p_z = p_s \cos^2\alpha.$$

$$N_\alpha = -p_s\, a \cos^3\alpha, \quad N_{x\alpha} = -4\, p_s\, x \sin\alpha \cos\alpha,$$

$$N_x = 2\, p_s\, a \frac{l^2}{a^2}\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) \frac{1 - 2\cos^2\alpha}{\cos\alpha}.$$

Schwerin, E.: Über die Spannungen in symmetrisch und unsymmetrisch belasteten Kugelschalen. Berlin 1918 und Arm. Beton 1919 S. 25. — Thoma, D.: Die Beanspruchung freitragender mit Wasser gefüllter Rohre. Z. ges. Turbinenwes. 1920 S. 17. — Schwerin, E.: Über die Spannungen in freitragenden gefüllten Rohren. Z. angew. Math. Mech. 1922 S. 340. —