



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

83. Vieleckkuppeln

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

Miesel, K.: Über die Festigkeit von Kreiszyklinderschalen mit nichtachsensymmetrischer Belastung. Ing.-Arch. 1929 S. 22. — Geckeler, J.: Zur Theorie der Elastizität flacher rotationsymmetrischer Schalen. Ing.-Arch. 1930 S. 255. — Rüsck, H.: Theorie der querversteiften Zylinderschalen für schmale, unsymmetrische Kreissegmente. Diss. München 1931. — Finsterwalder, U.: Die querversteiften zylindrischen Schalengewölbe mit kreissegmentförmigem Querschnitt. Ing.-Arch. Bd. 4 (1933) S. 43.

83. Vieleckkuppeln.

Die Breitenschnitte der zyklisch symmetrischen Tragwerke sind in der Regel Vielecke mit gerader Seitenzahl ($2n$). Sie bilden n Tonnenschalen, die untereinander kongruent sind und sich gegeneinander in n Gratlinien abstützen. Die Krümmung des Querschnitts $1/R_\beta$ kann sich beliebig ändern. Sie ist jedoch in der Regel mathematisch bestimmt, der Querschnitt also z. B. ein Kreisbogen, eine Ellipse oder eine Zyklode.

Der Schalensektor ist durch einen Rand $\alpha = \alpha_2$ und durch zwei Gratlinien begrenzt, welche den Winkel $2\varphi = \pi/n$ einschließen (Abb. 841). Sind die Randbedingungen für $\alpha = \alpha_2$ nach S. 794 erfüllt und Randstörungen ohne Bedeutung, so erzeugt jede stetige Belastung allein Schnittkräfte N_α , $N_{\alpha x}$, N_x . Die allgemeinen Angaben darüber auf S. 794 enthalten zwei Funktionen $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$ als Integrationskonstante, über die im Sinne des Längsspannungszustandes in den Graten so verfügt werden kann, daß die Hauptschnittkräfte mit der Tangente an die Gratlinien zusammenfallen und daher die Komponenten in Richtung der Haupt- und Binormalen Null sind. Die Anzahl $2n$ der unbekanntenen Funktionen $f(\alpha)$ stimmt mit der Anzahl $2n$ der verfügbaren Bedingungengleichungen der Schale für den Längsspannungszustand des Tragwerks in den Graten überein. Die Grate erhalten daher bei jeder stetigen Belastung der Tonnen im wesentlichen nur Längskräfte.

Die Integration der Gleichgewichtsbedingungen (1262) für eine Belastung aus $p_x = 0$, $p_y = p_y(\alpha)$, $p_z = p_z(\alpha)$ liefert mit $R_\beta \equiv r$

$$\left. \begin{aligned} N_\alpha &= -p_z R_\beta, & N_{\alpha x} &= -\left(\frac{\partial N_\alpha}{R_\beta \partial \alpha} + p_y\right) x + f_1(\alpha) = -p_y^* x + f_1(\alpha), \\ N_x &= \frac{\partial p_y^*}{2R_\beta \partial \alpha} x^2 - \frac{\partial f_1(\alpha)}{R_\beta \partial \alpha} x + f_2(\alpha). \end{aligned} \right\} (1271)$$

Die Belastung ist entweder symmetrisch (Eigengewicht, Schneelast) oder antisymmetrisch (Windbelastung).

Die Unstetigkeit der Mittelfläche in den Gratlinien zwingt zur Zerlegung des Spannungsbildes. Der eine Anteil beschreibt die Tragwirkung der Tonne zur Übertragung der Belastung nach den Gratlinien, der andere die Tragwirkung der Kuppel zur Übertragung der Randkräfte in den Gratlinien nach den Stützpunkten und Randgliedern.

Lösung bei zyklisch symmetrischer Belastung.

Anteil I. Die Schubkräfte $N_{\alpha x}$ sind in allen Symmetrieebenen, also auch in den Querschnitten $x=0$ (Abb. 841) Null, so daß nach (1271) $f_1(\alpha) = 0$. Durch die Ausnutzung der Symmetrie ist in den Gratschnitten nur noch die Bedingung verfügbar, daß die Komponente B_α der Hauptschnittkraft in $x = l_\alpha$ in Richtung der Binormalen Null ist. Darnach gilt für den Grundriß eines differentialen Schalenteils (Abb. 842)

$$B_\alpha = (N_{\alpha,1} - 2N_{\alpha x,1} \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi + N_{\alpha,1} \cos^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \varphi) R_\beta d\alpha \cos \varphi = 0,$$

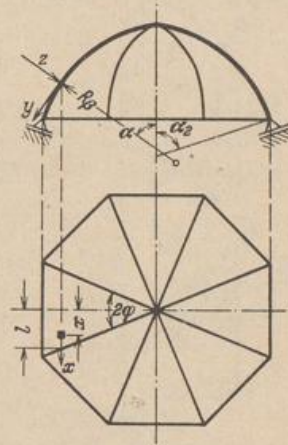


Abb. 841.

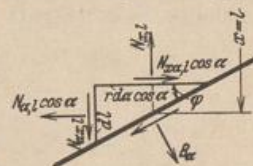


Abb. 842.

und mit (1271)

$$N_{\alpha x, l} = -p_y^* l, \quad N_{x, l} = \frac{\partial p_y^*}{2R_\beta \partial \alpha} l^2 + f_2(\alpha)$$

also

$$f_2(\alpha) = -\frac{l^2}{2} \frac{\partial p_y^*}{R_\beta \partial \alpha} - 2p_y^* l \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi + p_z R_\beta \cos^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \varphi. \quad (1272)$$

Die Trägerwirkung des Schalensektors besteht daher aus den Schnittkräften

$$\left. \begin{aligned} N_\alpha &= -p_z R_\beta, & N_{\alpha x} &= -p_y^* x, & N_x^{(T)} &= -\frac{l^2 - x^2}{2} \frac{\partial p_y^*}{R_\beta \partial \alpha} - f_2(\alpha), \\ f_3(\alpha) &= +2p_y^* l \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi + N_\alpha \cos^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (1273)$$

Sie sind jedoch nur durch die Längskraft $Z_\alpha^{(T)}$ eines Zugliedes am Rande $\alpha = \alpha_2$ im Gleichgewicht

$$Z_\alpha^{(T)} = +\frac{l^2 - x^2}{2} p_y^* + \int_0^{\alpha_2} f_3(\alpha) R_\beta d\alpha. \quad (1274)$$

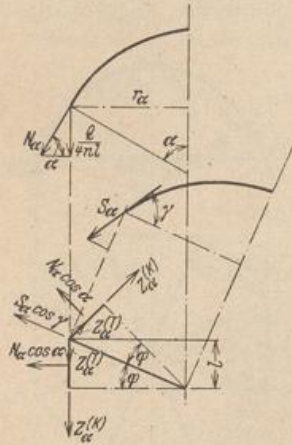


Abb. 843.

Anteil II. Der Spannungszustand durch die Kuppelwirkung des Tragwerks besteht aus Längskräften $N_x^{(K)}$, die von der nach den Graten abgetragenen Belastung hervorgerufen werden. Sie lassen sich nach (1096) am einfachsten als Zuwachs der Resultierenden $Z_\alpha^{(K)}$ aller Längskräfte oberhalb eines Breitenschnittes α berechnen.

Durch diesen werden neben der Resultierenden Q_α der Belastung die Schnittkräfte N_α , $Z_\alpha^{(T)}$ und die Längskraft S_α in Richtung der Grattangenten zu äußeren Kräften, die miteinander im Gleichgewicht sind. Die Summe aller senkrechten Komponenten liefert S_α (Abb. 843).

$$\left. \begin{aligned} Q_\alpha + 4nlN_\alpha \sin \alpha + 2nS_\alpha \sin \gamma &= 0, & \text{also mit } \sin \gamma &= 1/\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha / \cos^2 \varphi}, \\ S_\alpha &= -\left(\frac{Q_\alpha}{2n} - 2p_z R_\beta r_\alpha \sin \alpha \operatorname{tg} \varphi\right) \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha / \cos^2 \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (1275)$$

Zum Gleichgewicht der waagerechten Komponenten der Schnittkräfte S_α , N_α mit der Schubkraft $Z_\alpha^{(T)}$ an den Eckpunkten eines freien Breitenschnittes α ist die Längskraft $Z_\alpha^{(K)}$ eines Zugringes notwendig (Abb. 843).

$$\left. \begin{aligned} Z_\alpha^{(K)} + \frac{S_\alpha \cos \gamma}{2 \sin \varphi} + r_\alpha N_\alpha \cos \alpha + \int_0^\alpha f_3(\alpha) R_\beta d\alpha &= 0 \\ \text{und} \\ N_\alpha^{(K)} = -\frac{\partial Z_\alpha^{(K)}}{R_\beta \partial \alpha} = \frac{\partial}{R_\beta \partial \alpha} \left(\frac{S_\alpha \cos \gamma}{2 \sin \varphi} + r_\alpha N_\alpha \cos \alpha \right) + f_3(\alpha). \end{aligned} \right\} \quad (1276)$$

Durch die Überlagerung der Anteile I und II des Spannungszustandes entsteht die gesuchte Schnittkraft

$$\left. \begin{aligned} N_x = N_x^{(T)} + N_x^{(K)} &= -\frac{l^2 - x^2}{2} \frac{\partial p_y^*}{R_\beta \partial \alpha} + \frac{\partial}{R_\beta \partial \alpha} \left(\frac{S_\alpha \cos \gamma}{2 \sin \varphi} + r_\alpha N_\alpha \cos \alpha \right) \\ \text{mit} \\ \frac{S_\alpha \cos \gamma}{2 \sin \varphi} + r_\alpha N_\alpha \cos \alpha &= -\frac{Q_\alpha \operatorname{ctg} \alpha}{2n \sin 2\varphi} + p_z R_\beta r_\alpha \frac{\cos \alpha}{\cos^2 \varphi}, & \varphi &= \pi/2n. \end{aligned} \right\} \quad (1277)$$

Eigengewicht: $p_x = 0$, $p_y = g \sin \alpha$, $p_z = g \cos \alpha$.

$$Q_\alpha = 4n \operatorname{tg} \varphi \int_0^\alpha g R_\beta r_\alpha d\alpha = 4n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n} Q_{\alpha g}. \quad (1278)$$

Schneelast: $p_x = 0$, $p_y = p \sin \alpha \cos \alpha$, $p_z = p \cos^2 \alpha$.

$$Q_\alpha = 4n \operatorname{tg} \varphi \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{p_0}{2} r_\alpha^2 = 4n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n} Q_{\alpha 2}. \quad (1279)$$

a) Der Meridian ist ein Kreisbogen (Abb. 844):

$$Q_{\alpha 1} = g a [a(1 - \cos \alpha) - c \alpha], \quad Q_{\alpha 2} = \frac{p_0}{2} (a \sin \alpha - c)^2. \quad (1280)$$

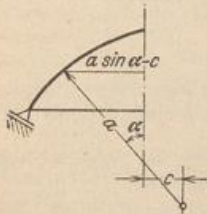


Abb. 844.

b) Der Meridian ist eine Zykloide (Abb. 845):

$$\left. \begin{aligned} Q_{\alpha 1} &= 2 g f^2 \left(\alpha \sin \alpha + \cos \alpha - \frac{1}{3} \cos^3 \alpha - \frac{2}{3} \right), \\ Q_{\alpha 2} &= \frac{p}{8} f^2 (2\alpha + \sin 2\alpha)^2 \end{aligned} \right\} (1281)$$

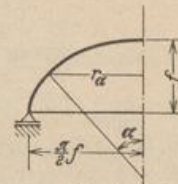


Abb. 845.

Ist die Meridiankurve anderweit festgelegt, so werden die Integrationen in Verbindung mit $R_\beta d\alpha = ds \rightarrow \Delta s$ als Summe und die Differentialquotienten ebenso wie auf S. 763 angenähert als Differenzenquotienten berechnet.

Berechnung einer Vieleckkuppel.

Die Kuppel hat einen achteckigen Grundriß nach Abb. 841 mit $2n = 8$, $\varphi = \pi/8$ und einen Kreisquerschnitt mit dem Radius $a = 20,5$ m. Die Belastung besteht aus Eigengewicht $g = 0,20$ t/m². Nach (1273) ist

$$N_\alpha = -g a \cos \alpha = -4,1 \cos \alpha,$$

$$N_{\alpha x} = -2 g x \sin \alpha = -0,4 x \sin \alpha,$$

oder für

$$x = l = a \sin \alpha \operatorname{tg} \varphi;$$

$$N_{\alpha x}(x=l) = -3,39 \sin^2 \alpha.$$

Für den Kreisquerschnitt ist nach (1278) und (1280) $Q_\alpha = 16 g a^2 (1 - \cos \alpha) \operatorname{tg} \varphi$ und die Längskraft in den Graten nach (1275)

$$S_\alpha = 2 g a^2 \operatorname{tg} \varphi [(1 + \sin^2 \alpha) \cos \alpha - 1] \sqrt{1 + \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{\cos^2 \varphi}}.$$

Die Ringkraft ist nach (1277) für $x = 0$

$$N_{x(x=0)} = \frac{g a}{\sin^2 \alpha \cos^2 \varphi} \left[1 - \cos \alpha [1 + \sin^4 \alpha (\beta - \sin^2 \varphi)] \right].$$

Die Schnittkräfte sind in Abb. 846 dargestellt.

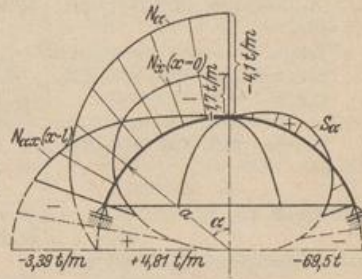


Abb. 846.

Dischinger, F.: Die Theorie der Vieleckkuppeln. Diss. Dresden und Beton u. Eisen 1929 S. 100.