



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Lehrbuch der wichtigsten Kartenprojektionen

Möllinger, Oskar

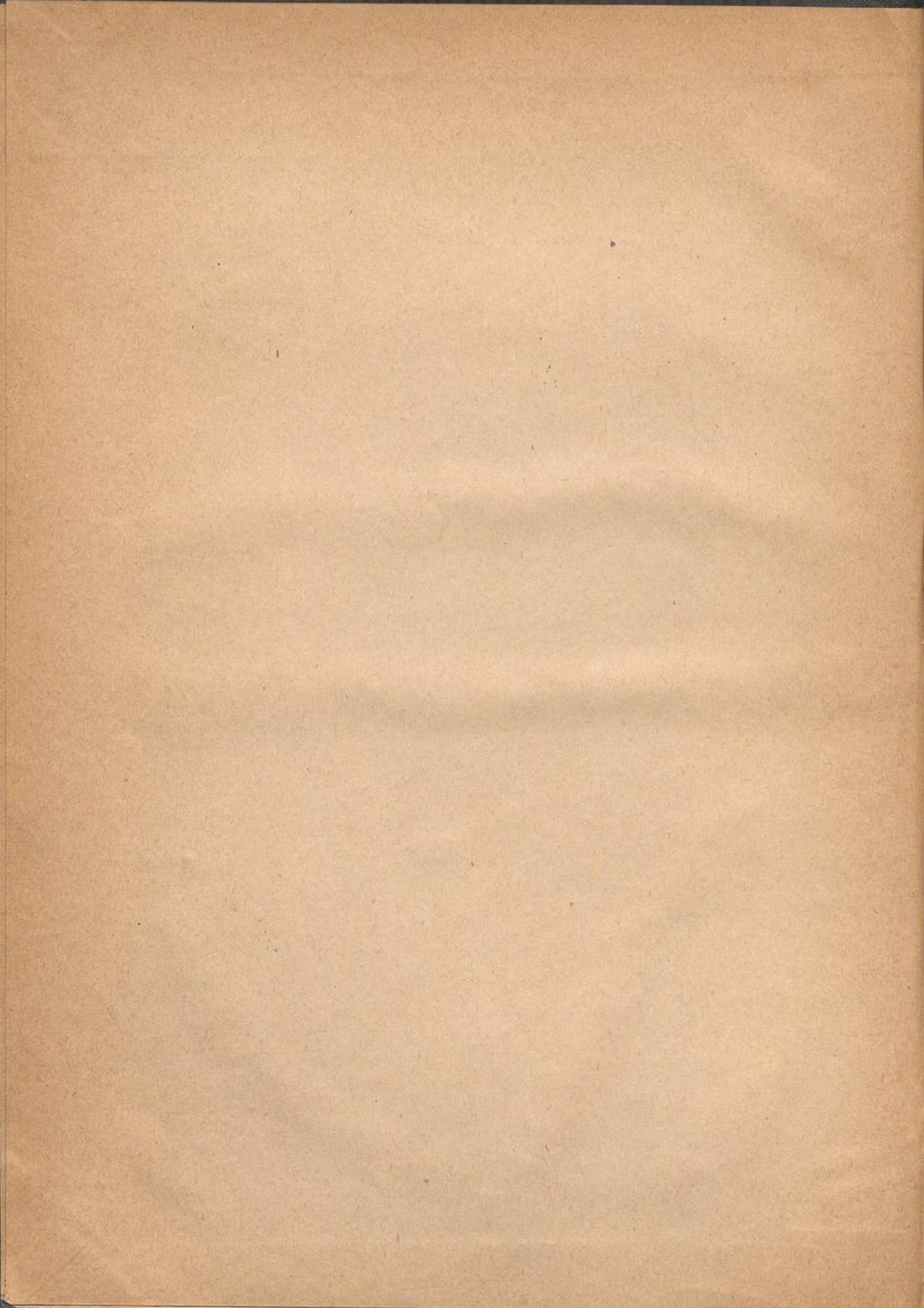
Zürich, 1882

[urn:nbn:de:hbz:466:1-76263](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-76263)

M
22 950

2200

~~G. N. 2200~~
~~1296~~



*Gaßmann des Königl. Hofes
vom 30. April 1880*

2200

1296

Lehrbuch
der
wichtigsten Kartenprojektionen

mit besonderer Berücksichtigung

der

Stereographischen,
Bonne'schen und Mercatorprojektion.

Für

höhere Lehranstalten sowie zum Selbstunterrichte

herausgegeben von

Oskar Möllinger,

Ingenieur,

früher Lehrer am mathematischen Institut in Fluntern-Zürich.

Mit 50 in den Text gedruckten Figuren.



Zürich.

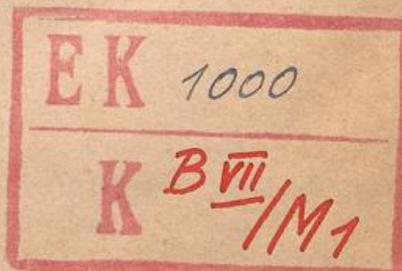
Verlag von Cäsar Schmidt.

1882.

03

M

22950



[Faint, illegible text, likely bleed-through from the reverse side of the page]

Vorwort.

Mit vorliegendem Lehrbuche beabsichtigt der Verfasser, allen denjenigen welche sich für das Kartenwesen interessiren, besonders den Schülern höherer Lehranstalten und solchen, welche sich mit dem Entwerfe neuer Karten beschäftigen, ein Hilfsmittel zu bieten, durch das sie in den Stand gesetzt werden, sich in möglichst kurzer Zeit mit den wichtigsten Methoden vertraut zu machen, die bei der Construction von Erd- und Himmelskarten zur Anwendung kommen. Obgleich schon verschiedene Werke über Kartenprojektionen existiren, von welchen ich vor Allem die Folgenden erwähne:

J. J. Littrow's Chorographie. Wien 1833.

H. Gretschel's Lehrbuch der Kartenprojektionen. Weimar, 1873.

A. Germain. Traité des projections des cartes géographiques. Paris (1867).

L. B. Francoeur Géodésie. Paris 1835. Chap. VI,

so muss doch gesagt werden, dass in diesen Werken mehr die Theorie der Kartenprojektionen behandelt wird, während die Anfertigung bestimmter Kartennetze, die zur Darstellung eines Theiles der Erd- oder Himmelskugel dienen, zu sehr in den Hintergrund tritt. Auch wird darin, so vor Allem in „Germain's traité des projections“ die Kenntniss der Differential- und Integralrechnung vorausgesetzt, während diese Wissenschaft im Interesse derjenigen, welche weniger mit ihr vertraut sind, bei den meisten Kartenprojektionen umgangen werden kann. Germain's und Gretschel's Lehrbücher, welche alle möglichen bis jetzt bekannten Kartenprojektionen enthalten, sind daher für denjenigen, der mit dieser Wissenschaft bereits etwas vertraut ist, sehr

lehrreich; da sie jedoch ihren Gegenstand in allzuumfassender Weise behandeln, so eignen sie sich weniger für den Studirenden, welcher sich mit dieser ihm noch fremden Disciplin bekannt machen will. Dem Nichtkenner einer Wissenschaft ist es nicht möglich das Wesentliche vom Unwesentlichen zu unterscheiden, wesshalb er genöthigt ist den ganzen in einem Buche gegebenen Lehrstoff durchzuarbeiten, für ihn ist es von Interesse, ein Lehrbuch zu besitzen, welches nicht zu schwer geschrieben ist, ihn im Studium nicht ermüdet und es ihm bei den heut' zu Tage gestellten grossen Anforderungen möglich macht, sich in kurzer Zeit viele und doch gründliche Kenntnisse anzueignen.

Schon aus diesen Gründen schien es mir gerechtfertigt ein Lehrbuch der wichtigsten Kartenprojektionen zu verfassen, welches die sich im Gebrauche befindenden Projektionen in leichtverständlicher Weise behandelt. Durch zahlreiche Beispiele wurde darin gezeigt, wie die theoretisch gewonnenen Resultate sich bei der Ausführung bestimmter Kartennetze verwerthen lassen, wodurch der Leser einige Praxis in der Anfertigung dieser letzteren erhalten soll.

In den Lehrbüchern der Kartenprojektionen wird gewöhnlich auf die Herstellung der Kartennetze auf dem Wege der Construction, wobei Fehler unvermeidlich sind, ein zu grosser Werth gelegt. Es ist zweckmässiger zur Bestimmung von Netzpunkten die analytische Methode in Anwendung zu bringen, welche daher in vorliegendem Buche bevorzugt wurde.

In Bezug auf eine Vergleichung, welche ich zwischen der als vorzüglich bekannten Bonne'schen Projektionsmethode und der stereographischen Projektion eines gegebenen Kugelabschnittes angestellt habe, sei folgende Bemerkung gestattet:

Bei der Bonne'schen Projektion projiciren sich, wie wir sehen werden, nur die Parallelkreise wieder als Kreise, die Meridiane werden aber durch Curven dargestellt, welche die Parallelkreise schiefwinklig schneiden und durch Verbindung einzelner Punkte erhalten werden. Es ist daher zur genauen Construction eines Kartennetzes nach dieser Methode eine umfassende und zeitraubende Berechnung desselben erforderlich, und schien es mir keine ganz zwecklose Arbeit zu sein, zu untersuchen, ob nicht eine perspectivische Darstellungsweise eines gegebenen Kugelabschnittes, welcher sich über einen kleineren Theil der Kugelfläche erstreckt, auf dieselbe Genauigkeit wie eine Projektion nach der Bonne'schen Methode Anspruch machen kann.

Als einfachste perspectivische Darstellung der Kugeloberfläche ist die stereographische Projektionsmethode bekannt, nach welcher die Parallelkreise und Meridiane sich wieder als Kreise projiciren, die sich unter rechten Winkeln schneiden. Die stereographische Projektionsmethode hat ausserdem den Vortheil, dass die nach ihr erhaltene Projektion eines bestimmten Theiles der Kugeloberfläche dem Originalen in den kleinsten Theilen ähnlich ist und in Bezug auf die Verjüngung der Distanzen, welche vom Centrum der Karte ausgehen, eine bestimmte Gesetzmässigkeit stattfindet, während eine Abwicklung, welche vom mittleren Meridiane der Karte ausgeht, wie dies bei der Bonne'schen Methode der Fall ist, in dieser Beziehung keinem bestimmten Gesetze unterworfen ist.

Es wurde daher eine Vergleichung dieser beiden Projektionsarten angestellt und die Netze von Europa und Deutschland nach der stereographischen und Bonne'schen Methode berechnet.

Um die Güte dieser Netze zu prüfen, wurden auf jedem der beiden darzustellenden Kugelabschnitte beliebige Punkte, welche durch ihre sphärischen Coordinaten gegeben sind, gewählt, und die Projektionen dieser Punkte in Bezug auf ein, durch den Mittelpunkt der Karte gehendes rechtwinkliges Coordinatensystem, sowohl nach der stereographischen als nach der Bonne'schen Methode bestimmt. Durch Berechnung der wirklichen Entfernungen der Punkte auf der Kugel und derjenigen ihrer Projektionen ergab sich sofort, welcher Projektionsmethode in jedem Falle der Vorzug zu geben war. —

Zum Verständnisse dieses Buches sind diejenigen Kenntnisse erforderlich, welche an unseren Industrieschulen und Gymnasien in der ebenen und sphärischen Trigonometrie, sowie in der analytischen Geometrie und algebraischen Analysis gelehrt werden, und dasselbe ist daher gleichsam als eine Anwendung dieser Disciplinen zu betrachten. Den Leser erlaube ich mir darauf aufmerksam zu machen, dass das Zeichnen der Figuren, nach der im Texte jeweiligen angegebenen Weise, zum Verständnisse dieses letzteren von wesentlichem Vortheile ist. Beim Entwurfe der Figuren wurde gewöhnlich die Parallelprojektion in Anwendung gebracht und dabei folgende Bezeichnungen eingeführt: Die Punkte im Raume wurden mit grossen oder kleinen Buchstaben: $A B a b$, ihre horizontalen Projektionen mit $A' B' a' b'$, ihre vertikalen Projektionen mit $A'' B'' a'' b''$ und ihre zweiten vertikalen Projektionen mit $A''' B''' a''' b'''$ bezeichnet. Für

den Nord- und Südpol der Kugel wurden die Bezeichnungen P_n , P_s , p_n , p_s gewählt.

Die Integralrechnung fand nur bei der Mercatorprojektion ihre Anwendung, weil sie bei genauer Behandlung dieser Projektionsart wohl nicht umgangen werden kann. Für den Nichtkenner dieser Disciplin wurde übrigens diese wichtige Projektionsmethode (Seite 70) auch elementar behandelt, wobei jedoch, wie schon jetzt zu bemerken ist, nur ein aproximativ richtiges Kartennetz erhalten wird. Das Capitel über „die Berücksichtigung der Abplattung der Erde bei der Construction einer Karte nach Merkatorsprojektion“ (Seite 77) kann vom Leser, wofern er sich nicht besonders dafür interessiren sollte, übergangen werden.

Auch für geographische Institute, welche sich mit der Herausgabe von Kartenwerken befassen, wird dieses Buch nicht ohne Interesse sein, weil es eine bis dato nicht veröffentlichte Methode enthält, nach welcher beliebige Abschnitte der Erd- oder Himmelskugel stereographisch abgebildet werden können. Ferner kommt darin eine neue Projektion vor, welche von Prof. Otto Möllinger bei der Construction seiner vor Kurzem herausgegebenen transparenten Sternkarte mit beweglichem Horizont zur Anwendung gekommen ist. Ausserdem enthält das Buch eine Reihe von Tabellen, welche von mir berechnet wurden und zur Construction verschiedener Kartennetze dienen.

Indem ich daher die Hoffnung ausspreche mit diesem Buche einen kleinen Beitrag zur Erweiterung des Kartenwesens und der mathematischen Geographie geliefert zu haben, möchte ich dasselbe den Herren Lehrern, welche sich, wie unsere Schulausstellungen beweisen, gegenwärtig vielfach mit Terrainstudien und Kartenentwürfen beschäftigen, sowie den Herren Professoren höherer Lehranstalten zum Gebrauche beim Klassenunterrichte freundlichst empfehlen.

Faido (Tessin), im September 1881.

Oskar Möllinger.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung	1
I. Abschnitt.	
Die stereographische Projektionslehre.	
Die Grundlage der stereographischen Projektionslehre	7
Ableitung der allgemeinen Formeln, auf welchen die Construction stereographischer Netze beruht	16
I. Projektion auf den Meridian (stereographische Aequatorialprojektion) Anwendung derselben auf die Construction von Planiglobien und Sternkarten	20
II. Projektion auf den Aequator (stereographische Polarprojektion)	26
Construction von Otto Möllinger's transparenter Sternkarte mit beweglichem Horizont	29
III. Projektion auf den Horizont (stereographische Horizontalprojektion) .	35
Ableitung der Fundamentalformeln für die stereographische Horizontalprojektion	37
Tabelle zur Construction einer Karte des mittleren Europa nach der stereographischen Horizontalprojektion	47
Stereographische Projektion eines gegebenen Kugelabschnittes, wenn die Bildebene mit der Ebene seines Grenzkreises parallel angenommen wird	49
Berechnung der Kartennetze von Europa und Deutschland nach dieser Projektionsmethode	55
Stereographisches Netz von Deutschland	62
II. Abschnitt.	
Die cylindrischen Projektionen.	
1. Die Plattkarten	63
2. Die Mercatorprojektion und ihre Anwendung in der Schiffahrtskunde .	65
Tabelle der wachsenden Breiten in Minuten	68
Graphische Lösung der auf den Curs eines Schiffes sich beziehenden Aufgaben	72
Berücksichtigung der Abplattung der Erde beim Entwurfe einer Karte nach Mercatorsprojektion	77

	Seite
III. Abschnitt.	
Die Kegelprojektionen.	
Die gewöhnliche Kegelprojektion	83
Die Projektion von Delisle	86
Die Flamsteed'sche Projektion	87
Werthe der Parallelkreisgrade der Erdkugel, wenn die Länge eines Meridiangrades = 100 gesetzt wird	88
Die Bonne'sche oder die modificirte Flamsteed'sche Projektionsmethode	89
Berücksichtigung der Abplattung der Erde bei der Bonne'schen Projektion	94
Längen der Meridian- und Parallelkreisgrade sowie der Normalen des Erdellipsoides für die Abplattung $\frac{a-b}{a} = \frac{1}{299,1528}$ (nach Bessel)	98
Berechnung des Netzes von Europa nach der Bonne'schen Methode wobei die Erde als Kugel betrachtet wird. (Entfernung der Parallelkreise und Meridiane = 10°)	101
IV. Abschnitt.	
Vergleichung der stereographischen und Bonne'schen Projektionsmethode.	
Prüfung der stereographischen und Bonne'schen Kartennetze von Europa, Deutschland und der Schweiz	104
Zusammenstellung der Resultate für das Kartennetz von Europa	109
Zusammenstellung der Resultate für das Kartennetz von Deutschland	111 u. 113
Zusammenstellung der Resultate für das Kartennetz der Schweiz	116
V. Abschnitt.	
Von den äquivalenten Abbildungen	118
1. Lambert's normale isocylindrische Projektion	118
2. Aequivalente Cylinderprojektion einer Kugelzone	119
3. Albers äquivalente Kegelprojektion	120
4. Lambert's äquivalente Kegelprojektion	124
5. Projektion von Bonne	127
6. Die äquivalente Projektion von Joh. Werner	127
VI. Abschnitt.	
Von den konformen oder orthomorphen Abbildungen	129
1. Die stereographische Projektionsmethode	129
2. Die Projektion von Mercator	131
3. Lambert's konforme Kegelprojektion	133
VII. Abschnitt.	
Construktion des Netzes der Erd- und Himmelsgloben	138
Netz eines Globus dessen Radius $r=1$ ist	141

Einleitung.

Es ist keine ganz leichte Sache Globen von so beträchtlichen Dimensionen anzufertigen, dass dadurch die Details der Erdkugel, sowie die auf der Himmelskugel gedachten Sterne und Sternbilder, mit einiger Genauigkeit dargestellt werden können. Auch stehen die Leistungen eines grösseren Globus in keinem Verhältnisse zu den bedeutenden Herstellungskosten und den beim Gebrauche resultirenden Unbequemlichkeiten. Man hat sich daher sehr bald entschlossen, Theile der Erdoberfläche auf einer Ebene abzubilden, wodurch einerseits den Dimensionen einer solchen Darstellung keine Grenzen gesetzt sind und anderseits bestimmten Zwecken, welchen dieselbe dienen soll, Rechnung getragen werden kann.

Da die krummen Flächen in zwei Klassen, in *developpable* und nicht *developpable* Flächen eingetheilt werden, von welchen die ersteren wie die Cylinder und Kegelflächen in eine Ebene entwickelt werden können, die letzteren aber wie die Kugel und das Sphäroid eine Entwicklung nicht zulassen, so wurden bei Darstellung der Erdoberfläche, welche letztere in Folge der geringen Abplattung der Erde als Kugelfläche betrachtet werden kann, zwei Wege eingeschlagen: Entweder wendet man die Methoden der gewöhnlichen *Perspective* an, um auf einer Ebene, welche als *Bildebene* angenommen wird, ein *perspectivisches* Bild eines bestimmten Theiles der Erdoberfläche zu erhalten, oder man denkt sich an den darzustellenden Theil des Globus eine *tangentiale Cylinder- oder Kegelfläche*, auf welche man sich die Details der Kugeloberfläche *projicirt* denkt, gelegt, und entwickelt diese in eine Ebene. In beiden Fällen ist es unmöglich aus den erhaltenen Projektionen die richtigen Distanzen der Orte und gleichzeitig die wirklichen Oberflächendimensionen der Kugel oder des Sphäroides in der Darstellung zu bewahren, was nur dann geschehen könnte, wenn diese Flächen wirklich entwickelbar wären.

Aus dem soeben Gesagten folgt, dass ein Lehrbuch der Kartenprojektionen in 3 Hauptabschnitte zerfallen muss und zwar:

1) in eine Beschreibung der perspectivischen Projektionen, von welchen wir jedoch nur die stereographische als die wichtigste dieser Projektionsarten behandeln werden;

2) in eine Darstellung der verschiedenen Cylinderprojektionen, von welchen wohl die Mercatorprojektion durch ihre Anwendung in der Schifffahrtskunde die grösste Bedeutung erlangt hat und

3) in eine Beschreibung der Kegelprojektionen, von welchen vor Allen Lambert's conforme, d. h. in den kleinsten Theilen dem Originale ähnliche Projektion bei dem Entwurfe neuer Karten bevorzugt wird.

Bildliche Darstellungen oder Projektionen der Erd- oder Himmelskugel nennt man Karten. Die Karten, welche die Erdoberfläche darstellen, werden je nach der Grösse des Kugelabschnittes, welchen sie repräsentiren und dem bei der Darstellung zur Anwendung kommenden Massstabe in topographische (ortbeschreibende) und geographische (erdbeschreibende) oder Landkarten eingetheilt. Die topographischen Karten grössten Massstabes geben Bilder des Erdbodens mit allen auf ihm vorkommenden Objekten und Unebenheiten der Oberfläche, welche Darstellungsweise in der Verjüngung der topographischen Generalkarte die im Massstabe 1 : 500 000 ausgeführt ist, ihre Begrenzung findet. Die Verjüngung der geographischen Karten geht von 1 : 500 000 an abwärts und ist sozusagen eine unbegrenzte; je nach der Grösse der Darstellung unterscheidet man Specialkarten, General- oder Uebersichtskarten, Planiglobien und Universal- oder Weltkarten.

Bei der Anfertigung von Landkarten sind folgende Methoden im Gebrauch: die ältere Flamsteed'sche Projektion für äquatoriale Gegenden (nach welcher in den Atlanten gewöhnlich Afrika dargestellt ist); die Kegelprojektion von Delisle für Theile der Erde, welche weniger als die Hälfte einer Hemisphäre einnehmen (nach dieser Methode sind in den Atlanten die Karten der einzelnen Staaten Europas gezeichnet) sowie die oben genannte conforme Projektion von Lambert; die Bonne'sche oder modificirte Flamsteed'sche Projektion für grössere Theile einer Halbkugel, welche beim Entwurf der Karte von Asien benutzt wird. Nach der letztgenannten Methode, welche wie wir sehen werden als die Beste zu empfehlen ist, sind auch Kartenwerke kleinerer Länder die auf grössere Genauigkeit Anspruch machen sollen entworfen, so die topographischen Karten

von Frankreich, Preussen, Thüringen und Bayern. Auch die Dufourkarte der Schweiz ist nach dieser Projektionsmethode angefertigt.*)

Da bei dem Entwurfe von Kartennetzen die Construction von Kreisbogen, deren Centren sich gewöhnlich nicht auf dem Blatte befinden, eine Hauptrolle spielt, so seien im Nachfolgenden alle sich auf diese beziehenden Werthe, wie Tangentenlänge, Scheitelabstand, Coordinaten des Scheitels und Bogenlänge angegeben.

Ist der Radius r des Kreises und der Centriwinkel α eines Bogens AC (Fig. 1) bekannt, so ist die Tangentenlänge:

$$1) AB = BC = r \operatorname{Tg} \frac{\alpha}{2}$$

Der Scheitelabstand ist:

$$BD = BO - r = \frac{r}{\operatorname{Cos} \frac{\alpha}{2}} - r$$

$$2) BD = r \left(\operatorname{Sec} \frac{\alpha}{2} - 1 \right)$$

Da der Winkel EAF, welchen die Tangente AE mit der Sehne AC bildet = $\frac{1}{2}$ Bg. ADC und \sphericalangle EAD = $\frac{1}{2}$ Bg AD = $\frac{1}{4}$ Bg. ADC ist, so ist \sphericalangle EAD = $\frac{1}{2}$ EAF = \sphericalangle FAD und die Abzisse AE des Scheitels ist gleich der halben Sehne AF, während die Ordinate ED gleich der Pfeilhöhe DF ist.

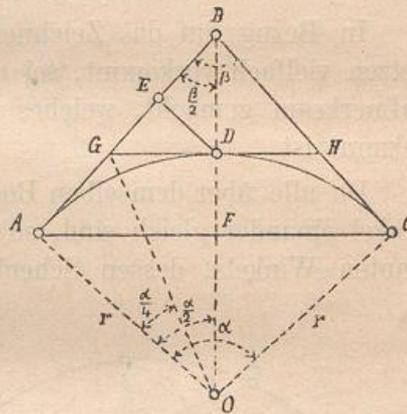


Fig. 1.

Für die Abzisse des Scheitels AE ergibt sich daher folgender Werth:

$$3) AE = AF = r \operatorname{Sin} \frac{\alpha}{2}$$

und für die Ordinate des Scheitels ED

$$4) ED = FD = OD - OF = r \left(1 - \operatorname{Cos} \frac{\alpha}{2} \right)$$

Für den Centriwinkel α ist die Bogenlänge

$$5) \text{ADC} = r \frac{\pi \alpha}{180^\circ}$$

*) Auf eine Anfrage, welche ich an das tit. eidg. Stabsbureau in Bern gerichtet habe, wurde mir unter dem 6. Sept. 1880 geantwortet, dass die Dufourkarte nach Flamsteeds Projektionsmethode angefertigt sei, und ist darunter ohne Zweifel die modificirte Flamsteed'sche Projektion verstanden.

Die Werthe von $Tg \frac{\alpha}{2}$, $Sec \frac{\alpha}{2} - 1$, $Sin \frac{\alpha}{2}$, $1 - Cos \frac{\alpha}{2}$ und $\frac{\pi\alpha}{180}$ finden sich für die Centriwinkel $\alpha \begin{matrix} > 0^{\circ} \\ < 120^{\circ} \end{matrix}$ in der Tabelle I von Sarrazin und Oberbeck's Taschenbuch zum Abstecken von Kreisbogen (Commissions-Verlag von Carl Beelitz in Berlin) von 2 zu 2 Minuten angegeben. Die Zunahmen dieser Werthe können zwischen 2 Centriwinkeln, welche sich nur um 2 Minuten unterscheiden, proportional der Zunahme des Centriwinkels betrachtet werden, wesshalb mittelst dieser Tabelle für jeden Centriwinkel zwischen obigen Grenzen die genannten Werthe zu erhalten sind. Dem Constructeur von Kartennetzen werden dadurch viele überflüssige Rechnungen erspart. —

In Bezug auf das Zeichnen von Kreisbogen, wie es bei Kartennetzen vielfach vorkommt, sei noch auf ein sehr bequemes Instrument aufmerksam gemacht, welches unter dem Namen Peripheriezirkel bekannt ist.

Da alle über demselben Bogen eines Kreises stehenden Peripheriewinkel einander gleich sind, so beschreibt der Scheitelpunkt eines constanten Winkels, dessen Schenkel in allen seinen Lagen durch zwei

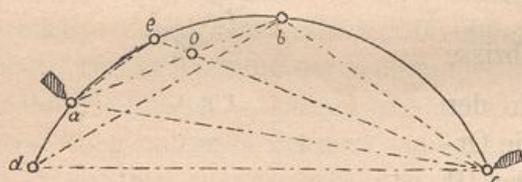


Fig. 2.

festen Punkte gehen, einen Kreis. In Fig. 2 sind abc drei Punkte eines Kreises, welcher einen so grossen Radius besitzen soll, dass es nicht möglich ist, ihn mit einem gewöhnlichen Zirkel oder einem Stan-

genzirkel zu ziehen. Verbindet man den mittleren dieser beiden Punkte b mit den Punkten a und c, so ist der Winkel abc ein Peripheriewinkel über der Sehne ac, welcher auf Carton übertragen und ausgeschnitten werden kann. Wird nun dieser constante Winkel auf dem Blatte so hingeschoben, dass seine Schenkel in allen Lagen durch die Punkte a und c gehen, die der Bequemlichkeit wegen durch Nadeln oder Stifte markirt werden, so beschreibt der Scheitelpunkt b des Winkels bei dieser Bewegung den Kreisbogen abe.

Auf diesem einfachen Principe beruht der Peripheriezirkel*), in

*) Derselbe ist in vorliegender Form von Prof. Otto Möllinger construirt.

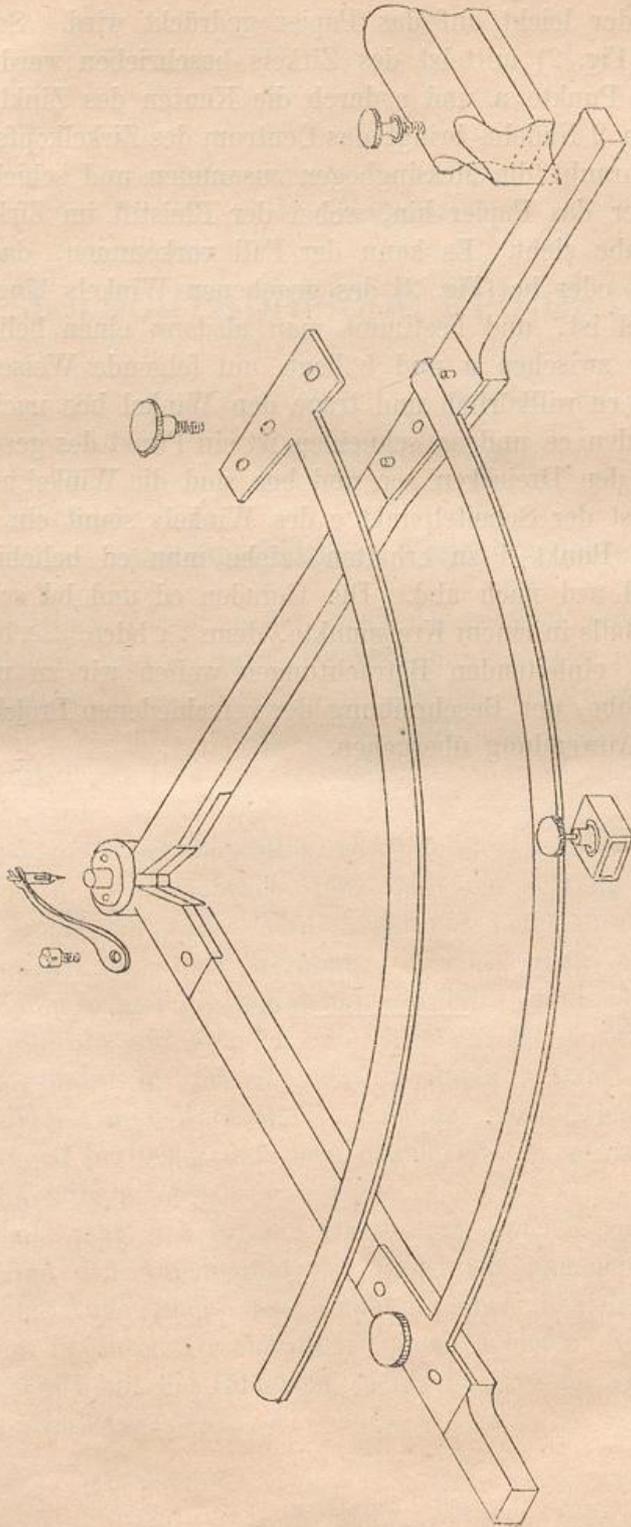


Fig. 3.

Otto Möllinger's Peripheriezirkel.

dessen Kopf sich, wie Fig. 3 zeigt, ein Bleistift befindet, der mittelst einer kleinen Feder leicht auf das Papier gedrückt wird. Soll der Kreisbogen abc (Fig. 2) mittelst des Zirkels beschrieben werden, so markirt man die Punkte a und c durch die Kanten des Zinkblockes Fig. 3 oder durch 2 Nadeln, bringt das Centrum des Zirkelkopfes über den Punkt b , schraubt die Messingbogen zusammen und schiebt den Zirkel sachte über das Papier hin, wobei der Bleistift im Zirkelkopf den Kreisbogen abc zieht. Es kann der Fall vorkommen, dass der eine Schenkel ab oder bc (Fig. 2) des gegebenen Winkels länger als der Zirkelschenkel ist, und bestimmt man alsdann einen beliebigen Punkt e , welcher zwischen a und b liegt, auf folgende Weise: Man ziehe die Gerade ce willkürlich und trage den Winkel bce nach bae ; wo sich die Geraden ce und ae schneiden ist ein Punkt des gesuchten Kreises, denn in den Dreiecken aoe und boc sind die Winkel aec und abc gleich und ist der Scheitelpunkt e des Winkels somit ein Kreispunkt. Um den Punkt d zu erhalten, ziehe man ed beliebig und trage den Winkel acd nach abd . Die Geraden ed und bd scheiden sich alsdann ebenfalls in einem Kreispunkte, denn $\sphericalangle bde = \sphericalangle bac$. —

Nach diesen einleitenden Betrachtungen wollen wir zu unserer eigentlichen Aufgabe, der Beschreibung der verschiedenen Projektionsarten und ihrer Anwendung übergehen.

I. Abschnitt.

Die stereographische Projektionslehre.

Die Grundlage der stereographischen Projektionslehre.

Um einen Körper perspectivisch darzustellen, muss man vor Allem die Bildebene und die Lage des Augenpunktes, von welchem aus nach den Grenzen des Gegenstandes Sehstrahlen gezogen werden, annehmen. Die Punkte wo diese Strahlen die Bildebene treffen, geben in ihrer Gesamtheit ein Bild des Gegenstandes, welches auch seine Projektion genannt wird. Wollte man auf diese Weise einen Theil der Erdoberfläche perspectivisch darstellen, so würde die Anzahl der auszuführenden Operationen so beträchtlich sein, dass ein schneller Fortschritt der Arbeit unmöglich wäre. Man beschränkt sich daher darauf das Netz der Parallelkreise und Meridiane, welches man sich auf der Erd- oder Himmelskugel gezogen denkt, abzubilden und alsdann die Grenzen der Contiente und Länder, die Strassen, Berge, Flüsse und Seen näherungsweise in dasselbe einzuzeichnen. Dabei kann man die Parallelkreise und Meridiane so nahe an einanderlegen, als die Anforderungen in Bezug auf die Genauigkeit der auszuführenden Karte es nothwendig machen.

Denkt man sich bei der Darstellung einer Kugelfläche die Bildebene und den Augenpunkt der Projektion angenommen, so bilden alle vom Auge nach den Punkten eines Kugelkreises gezogenen Strahlen in ihrer Gesamtheit einen schiefen Kreiskegel, dessen Durchschnitt mit der Bildebene nichts anderes als eine Curve zweiten Grades sein kann.

Die Gleichung dieser Curve wird für den Fall, in welchem die Schnittebene E (Fig. 4) auf der Ebene SAA' die durch die längste und kürzeste Seitenkante des Kegels geht, senkrecht steht, auf folgende Weise erhalten:

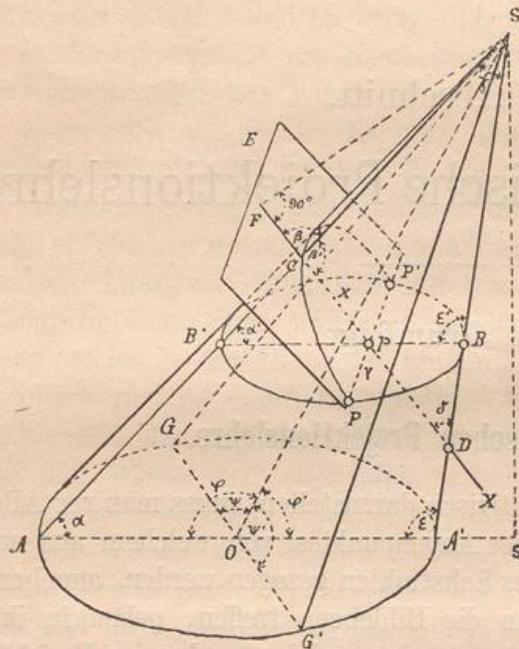


Fig. 4.

In Fig. 4 sei SAA' ein schiefer Kegel, dessen Basis AA' ein Kreis ist, SA seine längste, SA' seine kürzeste Seitenkante, welche mit der Basisebene die Winkel α und ϵ bilden, dann steht zunächst die Ebene SAA', welche durch diese Kanten geht, senkrecht auf der Basisebene AA', denn sie muss durch die Senkrechte Ss gehen, welche man von der Spitze S des Kegels auf die Basisebene zieht.

Legt man nämlich durch die Senkrechte Ss und die Axe SO des Kegels eine Ebene, so schneidet sie die Kegelfläche in der längsten und kürzesten Seitenkante, wie sich dies auf folgende Weise beweisen lässt:

Man lege durch die Axe SO irgend eine andere Ebene SGG', so ist φ' der Winkel, welchen die Gerade SO mit ihrer Projektion bildet und ψ' der Winkel, welchen sie mit der Durchschnittslinie OG' der Ebenen SGG' und AA' einschliesst,

$$\text{und } \varphi' < \psi' \text{ somit } SA' < SG'$$

$$\text{ferner } \varphi > \psi \text{ also } SA > SG$$

was sich auch für irgend eine andere Ebene, die durch SO gelegt wird, beweisen lässt. SA' ist also die kürzeste, SA die längste Seitenkante des Kegels.

Wird nun dieser Kegel durch eine beliebige Ebene E geschnitten, welche auf der Dreiecksebene ASA' senkrecht steht, so ist sein

Durchschnitt mit dieser Ebene die Curve PCP', deren Gleichung abzuleiten ist. Der Einfachheit wegen wollen wir noch folgende Bezeichnungen einführen. Es sei β der Winkel, welchen die Schnittebene mit der längsten Seitenkante SA bildet, γ der Winkel den die längste und kürzeste Seitenkante mit einander einschliessen und $SF = d$ der senkrechte Abstand der Kegelspitze von der Schnittebene. Durch irgend einen Punkt P der Curve lege man eine Ebene BB', welche mit der Basisebene parallel ist und die Kegelfläche in einem Kreise schneidet. Da die Ebenen E und BB' auf der Ebene ASA' gleichzeitig senkrecht stehen, so steht auch ihre Durchschnittslinie PP' auf der Ebene ASA' senkrecht und Pp ist sowohl auf der Geraden BB' als auch auf der Geraden CD senkrecht. Legt man nun in der Ebene E durch den Punkt C ein rechtwinkliges Axensystem, dessen Abzissenaxe mit CD zusammenfällt, während die Ordinatenaxe mit PP' parallel ist, so ist Cp = x die Abzisse, Pp = y die Ordinate des Punktes P und man hat zwischen diesen Grössen eine Gleichung aufzustellen.

Da BB' ein Kreis ist, so besteht die Gleichung:

$$1) y^2 = B'p \cdot Bp$$

Aus Dreieck B'Cp folgt: $B'p : Cp = \sin B'Cp : \sin \alpha'$

oder da $Cp = x$, $B'Cp = \beta$, und $\alpha' = \alpha$ ist

$$2) B'p = \frac{x \cdot \sin \beta}{\sin \alpha}$$

ferner folgt aus $\triangle BpD$:

$$Bp : Dp = \sin \delta : \sin DBp$$

oder da $Dp = CD - Cp = CD - x$, ferner $\beta = \gamma + \delta$ also $\delta = \beta - \gamma$ und $DBp = 180^\circ - \epsilon' = 180^\circ - \epsilon = \alpha + \gamma$ ist, so ergibt sich

$$3) Bp = \frac{(CD - x) \sin(\beta - \gamma)}{\sin(\alpha + \gamma)}$$

Substituirt man die Werthe 2) und 3) in Gleichung 1) so erhält man

$$y^2 = \frac{x \sin \beta (CD - x) \sin(\beta - \gamma)}{\sin \alpha \sin(\alpha + \gamma)}$$

$$\text{oder 4) } y^2 = \frac{CD \sin \beta \sin(\beta - \gamma)}{\sin \alpha \sin(\alpha + \gamma)} \cdot x - \frac{\sin \beta \sin(\beta - \gamma)}{\sin \alpha \sin(\alpha + \gamma)} x^2.$$

Den Werth von CD kann man noch durch den senkrechten Abstand $SF = d$ der Kegelspitze von der Schnittebene ausdrücken. Aus dem Dreieck SCD folgt:

$$CD : SC = \sin \gamma : \sin \delta \text{ oder da } \delta = \beta - \gamma \text{ ist}$$

$$CD = \frac{SC \sin \gamma}{\sin(\beta - \gamma)}$$

ferner folgt aus dem bei F rechtwinkligen Dreieck:

$$SC = \frac{d}{\sin \beta} \text{ und daher}$$

$$CD = \frac{d \sin \gamma}{\sin \beta \sin(\beta - \gamma)}.$$

Substituirt man diesen Werth in Gleichung 4) so lautet die Gleichung der Schnittkurve:

$$(I) y^2 = \frac{d \sin \gamma}{\sin \alpha \sin(\alpha + \gamma)} x - \frac{\sin \beta \sin(\beta - \gamma)}{\sin \alpha \sin(\alpha + \gamma)} x^2.$$

Diese Gleichung besitzt aber die Form:

$$y^2 = mx - nx^2,$$

welche für positives n die Scheitelgleichung der Ellipse, für negatives n die Scheitelgleichung der Hyperbel und für $n = 0$ diejenige der Parabel ist. Da nun die Werthe von α , β , $(\alpha + \gamma)$ nie grösser als 180° sein können, so hängt das Zeichen von n einzig von der Grösse $\sin(\beta - \gamma)$ ab. Ist $\sin(\beta - \gamma)$ positiv, d. h. $\beta - \gamma$ positiv, und $\beta > \gamma$, so ist die Curve eine Ellipse,

ist $\sin(\beta - \gamma)$ negativ, d. h. $\beta - \gamma$ negativ und $\beta < \gamma$, so ist sie eine Hyperbel,

und für $\sin(\beta - \gamma) = 0$, d. h. für $\beta - \gamma = 0$ und $\beta = \gamma$ eine Parabel.

Um im ersten und zweiten Falle die Werthe der grossen und kleinen Axe der Curve zu berechnen, vergleiche man die erhaltene Gleichung (I) mit der Scheitelgleichung der Ellipse und Hyperbel. Die Scheitelgleichung der Ellipse lautet:

$$(Ia) y^2 = \pm \frac{2b^2}{a} x - \frac{b^2}{a^2} x^2$$

diejenige der Hyperbel dagegen:

$$y^2 = \pm \frac{2b^2}{a} x + \frac{b^2}{a^2} x^2.$$

In beiden Fällen bestehen die Bedingungsgleichungen:

$$5) \frac{2b^2}{a} = \frac{d \sin \gamma}{\sin \alpha \sin(\alpha + \gamma)} \text{ und } \frac{b^2}{a^2} = \frac{\sin \beta \sin(\beta - \gamma)}{\sin \alpha \sin(\alpha + \gamma)} \quad (6)$$

(vergleiche Gleich. I und Ia)

aus welchen die Werthe von a und b zu ermitteln sind. Es ist

$$7) b^2 = \frac{ad \sin \gamma}{2 \sin \alpha \sin(\alpha + \gamma)} \text{ und } b^2 = \frac{a^2 \sin \beta \sin(\beta - \gamma)}{\sin \alpha \sin(\alpha + \gamma)}.$$

Comparirt man diese Werthe, wobei man die gleichen Grössen auf beiden Seiten weglässt, so ergibt sich:

$$a \sin \beta \sin(\beta - \gamma) = \frac{d \sin \gamma}{2}$$

$$(II) a = \frac{d \sin \gamma}{2 \sin \beta \sin(\beta - \gamma)}$$

Substituirt man diesen Werth in Gleichung 7) so ist

$$b^2 = \frac{d^2 \sin^2 \gamma}{4 \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \gamma) \sin(\beta - \gamma)}$$

$$\text{und (III) } b = \frac{d \sin \gamma}{2 \sqrt{\sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \gamma) \sin(\beta - \gamma)}}$$

welcher Werth für $\beta < \gamma$ d. h. für die Hyperbel imaginär ist.

Für den Fall dass die Ellipse in einen Kreis übergeht, ist

$$a = b \text{ oder}$$

$$\frac{1}{\sin \beta \sin(\beta - \gamma)} = \frac{1}{\sqrt{\sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \gamma) \sin(\beta - \gamma)}}$$

Nimmt man den reciproken Werth dieser Gleichung und quadriert dieselbe, so hat man:

$$\sin^2 \beta \sin^2(\beta - \gamma) = \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \gamma) \sin(\beta - \gamma)$$

$$\text{oder (IV) } \sin \beta \sin(\beta - \gamma) = \sin \alpha \sin(\alpha + \gamma).$$

Nun besteht bekanntlich die goniometrische Beziehung:

$$\cos(x - y) - \cos(x + y) = 2 \sin x \sin y \text{ und daher}$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) - \cos(x + y)]$$

$$\text{somit } \sin \beta \sin(\beta - \gamma) = \frac{1}{2} [\cos \gamma - \cos(2\beta - \gamma)] \text{ und}$$

$$\sin \alpha \sin(\alpha + \gamma) = \frac{1}{2} [\cos \gamma - \cos(2\alpha + \gamma)]$$

Die Bedingungsgleichung IV lautet nun:

$$\cos \gamma - \cos(2\beta - \gamma) = \cos \gamma - \cos(2\alpha + \gamma) \text{ oder}$$

$$(IVa) \cos(2\beta - \gamma) = \cos(2\alpha + \gamma).$$

Diese Gleichung ist aber richtig für:

$$(V) 2\beta - \gamma = \pm(2\alpha + \gamma) + n \cdot 360^\circ$$

Nimmt man das positive Zeichen, so ergibt sich:

$$2\beta - \gamma = 2\alpha + \gamma + n \cdot 360^\circ \text{ oder}$$

$$2\beta = 2\alpha + 2\gamma + n \cdot 360^\circ$$

$$\beta = \alpha + \gamma + n \cdot 180^\circ; \beta \text{ ist aber immer } < 180^\circ$$

also $n = 0$ und es ist

$\beta = \alpha + \gamma$ die eine Bedingung für welche die Ebene die Kegelfläche in einem Kreise schneidet. Da nun, wie aus Fig. 4 ersichtlich $\beta' = 180^\circ - \beta$ und $\varepsilon = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$ so ist auch $\beta' = \varepsilon$. Es ist aber $\delta = 180^\circ - (\beta' + \gamma)$ und $\alpha = 180^\circ - (\varepsilon + \gamma)$ somit für diesen Fall auch $\delta = \alpha$.

Die Schnittebene E bildet alsdann mit der längsten und kürzesten Kegelkante dieselben Winkel, welche diese Kanten mit der Basisebene einschliessen, und man sagt

die Kegelfläche werde von der Ebene E antiparallel geschnitten.

Nimmt man in Gleich. V das negative Zeichen, so ergibt sich:

$$2\beta - \gamma = -2\alpha - \gamma \mp n \cdot 360^\circ \text{ oder}$$

$$\beta = -\alpha \mp n \cdot 180^\circ. \text{ Da } \beta \text{ immer kleiner}$$

als 180° sein muss, so ist $n = 1$ zu setzen und

$$\beta = 180^\circ - \alpha \text{ oder da } \beta = 180^\circ - \beta' \text{ ist}$$

$$180^\circ - \beta' = 180^\circ - \alpha$$

$$\beta' = \alpha, \text{ d. h. die Schnittebene ist mit der Basis-}$$

ebene parallel. Es gibt also nur zwei Fälle in welchen ein schiefer Kreiskegel von einer auf ASA' senkrecht stehenden Ebene in einem Kreise geschnitten wird.

Der Satz, dass der Durchschnitt einer Ebene, welche einen schiefen Kegel mit Kreisbasis antiparallel schneidet, immer ein Kreis sein muss, findet sich schon im ersten Buche (Lehrsatz 5) der Conica des Apollonius von Perga und wird derselbe daselbst auf folgende Art bewiesen: Es ist Pp senkrecht auf BB' und CD , (Fig. 4 Seite 8)) und BB' ein Kreis, also:

$$Pp^2 = Bp \cdot B'p$$

Nun ist nach Voraussetzung $\delta = \alpha = \alpha'$ also $\triangle DBp \sim \triangle B'Cp$

und daher $Bp : Cp = Dp : B'p$ somit

$$Bp \cdot B'p = Cp \cdot Dp \text{ und}$$

$$Pp^2 = Cp \cdot Dp$$

Denkt man sich nun die Ebene BB' parallel mit sich selbst verschoben, so wird sich für jeden Curvenpunkt dieselbe Gleichung ergeben, und es ist in Folge dessen diese Curve ein Kreis, dessen Durchmesser die Gerade CD ist.

Schon zur Zeit des Ptolemäus hat man erkannt, dass wenn man bei Darstellungen der Kugeloberfläche die Bildebene durch das Centrum der Kugel gehen lässt und den Augenpunkt im Endpunkte desjenigen Kugelradius annimmt, welcher auf dieser Ebene senkrecht steht, alle Kreise des Globus sich wieder als Kreise projiciren, welche sich unter denselben Winkeln wie die Kugelschnitte schneiden.

Um den ersten Theil dieses Satzes zu beweisen, hat man nur zu zeigen, dass bei dieser Annahme die Kegelfläche, welche die vom Augenpunkt nach dem Kugelkreis gezogenen Projektionsstrahlen bilden, durch die Bildebene antiparallel geschnitten wird.

Es sei in Fig. 5 CD die Bildebene, so errichte man im Mittelpunkte M der Kugel eine Senkrechte MO auf die Ebene CD, welche die Kugeloberfläche in O trifft, O wird dann als Augenzentrum der Projektion angenommen. Ferner sei AB ein beliebiger Kugelkreis und OAB der schiefe Kreiskegel, welcher von der Bildebene CD in der Curve **ab** geschnitten wird. Um zu beweisen, dass diese ein Kreis ist, ziehe man OG und MF senkrecht auf die Ebene AB des Kugelkreises und lege durch OG und die Augenaxe OQ eine Ebene, welche die Kugel in dem grössten Kreise QPD schneidet. In dieser Ebene muss auch die Senkrechte MF liegen, welche durch den Mittelpunkt F des Kugelkreises geht und die Kugel im Pole P dieses Kreises trifft, und endlich befindet sich auch die Axe OF des Kegels in dieser Ebene. Wie oben bewiesen wurde, schneidet aber die durch die Normale OG und die Kegellaxe OF gelegte Ebene den Kegel in der längsten und kürzesten Seitenkante. Es ist also OA die längste, OB die kürzeste Erzeugende der Kegelfläche, und da die Bildebene CD senkrecht steht auf der Ebene OAB des Axendreieckes, so hat man nun die Gleichheit der Winkel OAB und Oba, sowie der Winkel OBA und Oab nachzuweisen.

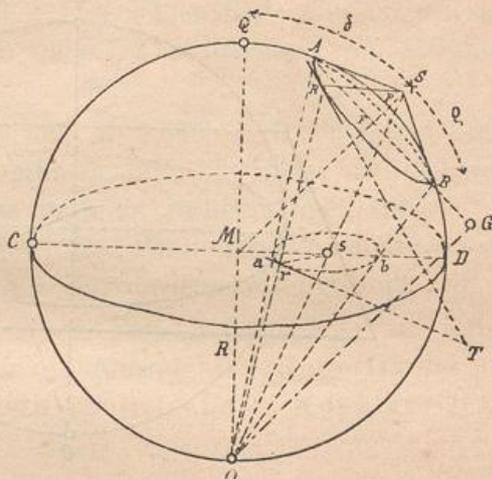


Fig. 5

Es ist der Winkel OAB Peripheriewinkel über Bogen ODB, somit

$$\sphericalangle OAB = \frac{1}{2} (OD + DB) = \frac{1}{2} (90^\circ + BD)$$

ferner nach einem bekannten Satze:

$$\sphericalangle Oba = \frac{1}{2} (OC + BD) = \frac{1}{2} (90^\circ + BD)$$

also $\sphericalangle OAB = \sphericalangle Oba$ und da die Dreiecke OAB und Oab zwei Winkel gleich haben, so ist auch $\sphericalangle OBA = \sphericalangle Oab$.

Der Kegel wird also antiparallel geschnitten, und die Durchschnittskurve ab ist ein Kreis.

Der zweite Theil des Satzes, nach welchem sich die Projektionen zweier Kugelkreise unter denselben Winkeln schneiden, wie die Kreise selbst, wird auf folgende Weise bewiesen.

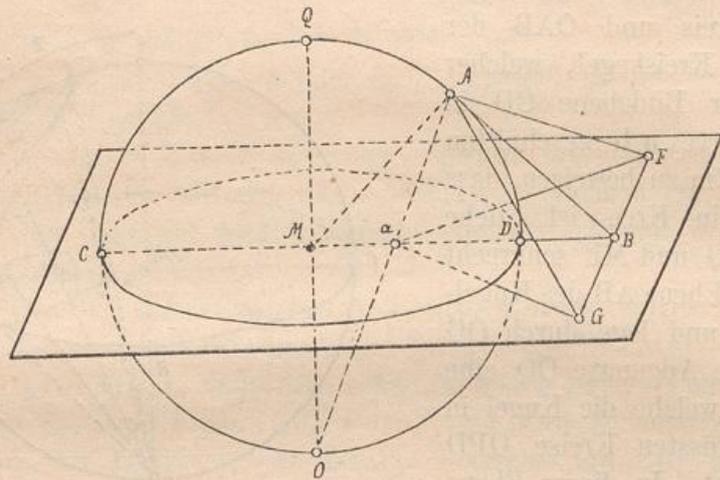


Fig. 6.

Es seien AG und AF (Fig. 6) Tangenten an zwei Kugelkreise, welche sich im Punkte A schneiden und den sphärischen Winkel FAG einschliessen, und FG die Durchschnittslinie, in welcher die Ebene, die durch die Tangenten gelegt wurde, die Bildebene schneidet; dann sind aF und aG Tangenten an die sich im Punkte \bar{a} schneidenden Projektionskreise und es ist zu beweisen, dass $\sphericalangle FaG = \sphericalangle FAG$.

Man lege durch die Augenaxe OQ und den Punkt A eine Ebene, welche die Kugel in dem grössten Kreise DAQ schneidet, und ziehe im Punkte A eine Tangente AB an diesen Kreis, die die Durchschnittslinie FG im Punkte B trifft. Da nun die Ebenen AFG und CD auf der Ebene ODAQ gleichzeitig senkrecht stehen, so ist auch ihr Durchschnitt die Gerade FG senkrecht auf der Ebene ODAQ also FG senkrecht auf BA und Ba und die Dreiecke ABF, ABG, aBF, aBG sind bei B rechtwinklig. Ferner ist

$$\sphericalangle OAB = \frac{1}{2} (OD + DA) = \frac{1}{2} (90^\circ + DA)$$

$$\text{und } \sphericalangle AaB = \frac{1}{2} (CO + DA) = \frac{1}{2} (90^\circ + DA) \text{ somit}$$

$$\sphericalangle OAB = \sphericalangle AaB \text{ und } \triangle BAa \text{ gleichschenkelig}$$

$$\text{also } AB = aB$$

Die Dreiecke ABG und aBG sowie die Dreiecke ABF und aBF sind nun congruent und es ist 1) $\sphericalangle GaB = \sphericalangle GAB$

2) $\sphericalangle FaB = \sphericalangle FAB$ also

$GaB + FaB = GAB + FAB$ oder

$GaF = GAF$.

Liegen die Geraden AF und AG auf derselben Seite von AB, so sind die Gleichungen 1) und 2) von einander abzuziehen, im Uebrigen bleibt der Beweis des Satzes unverändert.

Da sich die Parallelkreise und Meridiane auf der Kugel unter rechten Winkeln schneiden, so müssen auch die Bilder dieser Kreise unter sich rechte Winkel bilden und die rechtwinkligen sphärischen Vierecke, welche von den Meridianen und Parallelkreisen eingeschlossen werden, wieder durch rechtwinklige Curvenvierecke dargestellt sein.

Eine andere Eigenschaft dieser Projektionsmethode ist ferner folgende: Denkt man sich an die Kugel eine Kegelfläche gelegt, welche sie längs dem zu projicirenden Kugelkreis AB (Fig. 5) berührt, so ist die Projektion s der Spitze S des Kegels der Mittelpunkt der Projektion ab des Kugelkreises, wie sich auf folgende Art leicht beweisen lässt:

Es sei R ein beliebiger Punkt des Kugelkreises, r seine Projektion, ferner RT eine Tangente an den Kugelkreis im Punkte R und rT ihre Projektion, dann sind RT und die Kegelkante RS Tangenten an die Kugelfläche welche auf einander senkrecht stehen, und da sich nach dem Vorhergehenden die Projektionen zweier Kugeltangenten unter demselben Winkel schneiden wie die Tangenten selbst, so schliessen die Geraden rT und rs ebenfalls einen rechten Winkel ein. Die Gerade rs geht also durch den Mittelpunkt des Kreises a b, und da diess von jeder anderen Linie

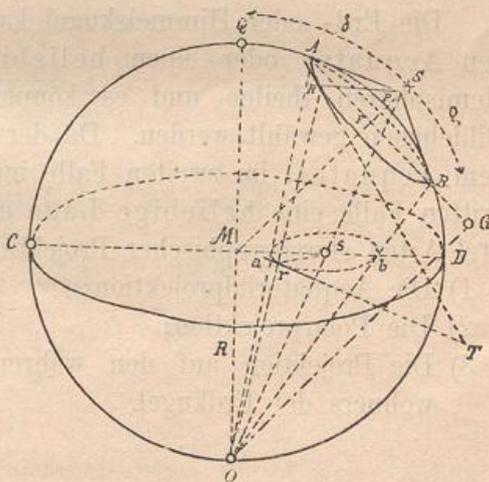


Fig. 5.

rs auch gesagt werden kann, so muss der Punkt s der Mittelpunkt des Kreises a b sein.

Man nennt solche Projektionen, bei welchen die Bildebene durch den Mittelpunkte der Kugel geht und der Augenpunkt im Endpunkt des auf dieser Ebene senkrechten Kugelradius liegt: stereographische Projektionen.

Wie schon erwähnt, werden dieselben hauptsächlich zur Darstellung ganzer Kugelhemisphären angewandt und nennt man die Gesammtheit zweier Hemisphären, welche nach dieser Methode abgebildet werden: Weltkarte. Bei einer solchen Karte sind nur die in ihrer Mitte liegenden Theile in den richtigen Verhältnissen dargestellt, während die übrigen Parthien an Ausdehnung zunehmen, je weiter sie vom Centrum der Karte abstehen. Dieses Wachsthum kömmt von der Schiefe der Sehstrahlen her, welche um so bedeutender wird, je weiter sich die Strahlen von der optischen Axe entfernen. Es folgt hieraus, dass man bei Weltkarten nicht für die ganze Karte denselben Massstab anwenden darf. (Ueber die Bestimmung des Vergrößerungsverhältnisses für verschiedene Theile der Karte siehe das Capitel über die conformen Abbildungen.)

Die Erd- oder Himmelskugel kann man durch einen Meridian, den Aequator oder einen beliebigen grössten Kreis in zwei Hemisphären theilen und es können die Ebenen dieser Kreise als Bildebenen gewählt werden. Da der Augenpunkt im ersten Falle auf dem Aequator, im zweiten Falle im Pole der Kugel liegt und im dritten Falle eine beliebige Lage auf der Kugel besitzt, so gibt es drei Arten stereographischer Projektionen der Kugeloberfläche:

- 1) Die Aequatorialprojektion;
- 2) Die Polarprojektion;
- 3) Die Projektion auf den wahren Horizont eines beliebigen Bewohners der Erdkugel.

Ableitung der allgemeinen Formeln auf welchen die Construction stereographischer Netze beruht.

Es sei CD (Fig. 5) die Bildebene, O der Augenpunkt und OQ die Augenaxe, ferner AB ein beliebiger Kugelkreis, dessen Projektion ab gesucht ist, und P der Pol dieses Kreises. Legt man durch die Augen-

axe OQ und den Pol P des Kreises eine Ebene, so steht diese senkrecht auf der Bildebene und es ist die Projektion des Kreises CQPD die gerade Linie CD. Ist P der eine Pol der Erd- oder Himmelskugel, so nennt man diesen Kreis, resp. seine Projektion CD den Hauptmeridian des Kartennetzes.

Um den Kreis AB auf der Kugelfläche zu bestimmen, sei die Entfernung QP = δ seines Poles vom Gegenpunkte Q des Auges und der Bogenhalbmesser PA = ϱ des Kreises, ferner der Radius R der Kugel gegeben. Aus diesen Werthen lässt sich dann für den Projektionskreis ab, die Entfernung Ms = d seines Mittelpunktes s vom Centrum der Karte, sowie der Radius as = r des Kreises ermitteln.

In Fig. 5 ist QB = $\delta + \varrho$; QA = $\delta - \varrho$

ferner \sphericalangle QOB = $\frac{1}{2}(\delta + \varrho)$; QOA = $\frac{1}{2}(\delta - \varrho)$

Mb = OM . Tg QOB; Ma = OM Tg QOA

$e' = R \cdot \text{Tg } \frac{1}{2}(\delta + \varrho)$; $e = R \text{Tg } \frac{1}{2}(\delta - \varrho)$ (I)

Ist $\varrho > \delta$, so ist $e = R \text{Tg } \frac{1}{2}(\varrho - \delta)$ (Ia)

in welchem Falle jedoch e vom Punkte M aus auf die andere Seite von CD aufzutragen ist. Ferner ergibt sich:

$$Ms = d = Ma + as = Ma + \frac{ab}{2} = \frac{2Ma + ab}{2}$$

$$\text{oder } d = \frac{Ma + (Ma + ab)}{2} = \frac{Ma + Mb}{2}$$

$$d = \frac{R}{2} \left[\text{Tg } \frac{1}{2}(\delta - \varrho) + \text{Tg } \frac{1}{2}(\delta + \varrho) \right]$$

oder da $\text{Tg } \alpha + \text{Tg } \beta = \frac{\text{Sin } (\alpha + \beta)}{\text{Cos } \alpha \text{Cos } \beta}$, so ergibt sich

$$d = \frac{R \text{Sin } \delta}{2 \text{Cos } \frac{\delta + \varrho}{2} \text{Cos } \frac{\delta - \varrho}{2}} \text{ (II) oder}$$

$$d = \frac{R \text{Sin } \delta}{\text{Cos } \delta + \text{Cos } \varrho} \text{ (IIa)}$$

Der Werth des Radius as des Projektionskreises ergibt sich wie folgt:

$$as = r = \frac{ab}{2} = \frac{Mb - Ma}{2}$$

$$r = \frac{R}{2} \left[\text{Tg } \frac{1}{2}(\delta + \varrho) - \text{Tg } \frac{1}{2}(\delta - \varrho) \right]$$

oder da $\text{Tg } \alpha - \text{Tg } \beta = \frac{\text{Sin } (\alpha - \beta)}{\text{Cos } \alpha \text{Cos } \beta}$

$$r = \frac{R \text{Sin } \varrho}{2 \text{Cos } \frac{1}{2}(\delta + \varrho) \text{Cos } \frac{1}{2}(\delta - \varrho)} \text{ (III) oder } r = \frac{R \text{Sin } \varrho}{\text{Cos } \delta + \text{Cos } \varrho} \text{ (IIIa)}$$

Die Distanz $P_n Q = \delta$ des Erd- oder Himmelspoles vom Gegenpunkte Q des Auges, der Winkel γ , welchen der Meridian $P_n \dot{A} P_n$ der durch den Pol des gegebenen Kreises geht mit dem Hauptmeridiane $P_n Q P_n$ bildet, derselbe wird wie bekannt durch den Bogen EF des Aequators gemessen. Ferner muss noch der Abstand $AF = \alpha$ des Poles A des Kugelkreises vom Aequator und der Bogenhalbmesser $AD = \rho$ des Kreises bekannt sein.

Legt man durch die Augenaxe OQ und den Pol A des Kugelkreises eine Ebene, so steht diese auf der Bildebene senkrecht und schneidet die Kugel in dem grössten Kreise QAO , welcher sich als gerade Linie MG projicirt. Zieht man die Projektionsstrahlen OH und OH' , so schneiden sie die Gerade MG in den Punkten h und h' und da HH' ein Durchmesser des Kugelkreises ist, so muss auch hh' ein Durchmesser seiner Projektion sein. Vor Allem hat man nun den Winkel $C'MG = \varepsilon$ zu berechnen, welchen die Gerade MG , auf der der Mittelpunkt des Kreises hh' liegt, mit dem Hauptmeridiane MC' einschliesst. Es ist aber

$$\varepsilon = \sphericalangle GQC' = 180^\circ - \omega.$$

Der Winkel ω ergibt sich aus dem sphärischen Dreiecke $AP_n Q$, von welchem zwei Seiten $P_n Q = \delta$ und $P_n A = 90^\circ - \alpha = \vartheta$ und der von ihnen eingeschlossene Winkel γ gegeben sind. Nach den Nepersehen Analogien ist

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Tg} \frac{1}{2} (\omega + \eta) &= \frac{\cos \frac{1}{2} (\vartheta - \delta)}{\cos \frac{1}{2} (\vartheta + \delta)} \operatorname{Cotg} \frac{\gamma}{2} \\ \operatorname{Tg} \frac{1}{2} (\omega - \eta) &= \frac{\sin \frac{1}{2} (\vartheta - \delta)}{\sin \frac{1}{2} (\vartheta + \delta)} \operatorname{Cotg} \frac{\gamma}{2} \end{aligned} \right\} \text{(V)}$$

$$\omega = \frac{1}{2} (\omega + \eta) + \frac{1}{2} (\omega - \eta) \text{ (VI)}$$

Nachdem mit Gleich VI ω berechnet ist, ergibt sich $\varepsilon = 180^\circ - \omega$. Man kann statt dessen auch zuerst die Seite $AQ = \mathcal{A}$ mittelst des Cosinussatzes und alsdann den Winkel ω mit dem Sinussatze berechnen.

$$\cos \mathcal{A} = \cos \delta \cos \vartheta + \sin \delta \sin \vartheta \cos \gamma \text{ oder}$$

$$\cos \mathcal{A} = \cos \delta \sin \alpha + \sin \delta \cos \alpha \cos \gamma \text{ (Va)}$$

$$\text{ferner ist } \sin \omega = \frac{\sin \gamma \sin \vartheta}{\sin \mathcal{A}} = \frac{\sin \gamma \cos \alpha}{\sin \mathcal{A}} \text{ (VIa)}$$

$$\text{und } \varepsilon = 180^\circ - \omega \text{ (VII)}$$

Macht man im Entwurfe des Kartennetzes den Bogen $C'G = \varepsilon$, so ist die Richtung der Geraden MG bestimmt und man berechnet nun nach Gleichung (I) (II) (III) die Werthe von $Mh = e$, $Mm = d$ und $hm = r$. (m ist der Mittelpunkt des Projektionskreises).

Wir wollen nun die einzelnen Projektionsarten der stereographischen Projektionsmethode betrachten und die erhaltenen Gleichungen auf spezielle Fälle anwenden.

I. Projektion auf den Meridian.

(Stereographische Aequatorialprojektion.)

Anwendung derselben auf die Konstruktion von Planigloben und Sternkarten.

(Siehe Fig. 8 und 9.)

Es sei $P_n H P_s G$ die Erd- oder Himmelskugel, $P_n' H' P_s' G'$ ihre horizontale, $P_n'' H'' P_s'' G''$ ihre vertikale Projektion*), so denke man sich die Kugel in eine solche Lage gebracht, dass ihre Axe auf der horizontalen Projektionsebene senkrecht steht und die Ebene des nullten Meridianes $P_n H P_s G$, welcher bei Darstellungen der Erdkugel gewöhnlich durch die Insel Ferro gelegt wird, mit der vertikalen Projektionsebene parallel ist. Nimmt man die Ebene des 0^{ten} Meridianes als Bildebene an, so liegt das Auge im Punkte O des Aequators. Die Augenaxe OQ steht im vorliegenden Falle senkrecht auf der vertikalen Projektionsebene und in dieser projicirt sich das stereographische Bild der Halbkugel, welches in der Ebene $P_n H P_s G$ liegt, in der wahren Grösse.

Um das stereographische Bild irgend eines Parallelkreises $BCDE$ zu erhalten, betrachte man die zweite vertikale Projektion der Kugel, in welcher die Bildebene als gerade Linie $P_n''' P_s'''$ erscheint. O''' ist die Projektion des Augenpunktes, von welchem aus die Strahlen $O'''C'''$ und $O'''E'''$ gezogen werden, die die Bildebene in den Punkten c''' und e''' treffen. ce ist ein Durchmesser des Projektionskreises und man hat die Punkte c''' und e''' nach c'' und e'' zu projiciren. Der Mittelpunkt l'' von $c''e''$ ist das Centrum des gesuchten Kreises, welcher durch die Punkte $B''D''$ gehen muss. Sollte e'' zu weit wegfallen, so ist es ein Leichtes durch die Punkte $B''c''D''$ einen Kreis

*) In der Folge werden die Punkte im Raume mit grossen Buchstaben ($P, Q \dots$), ihre Projektionen mit $P'P''P'''$, $Q'Q''Q'''$, \dots bezeichnet. Ferner sollen die stereographischen Bilder dieser Punkte im Raume gleichnamige kleine Buchstaben ($p, q \dots$) erhalten, und ihre Projektionen $p'p''p'''$, $q'q''q'''$, \dots heissen.

zu legen. Es ist noch zu bemerken, dass sich der Aequator, dessen Ebene auf der vertikalen Pr. Eb. senkrecht steht, als gerade Linie

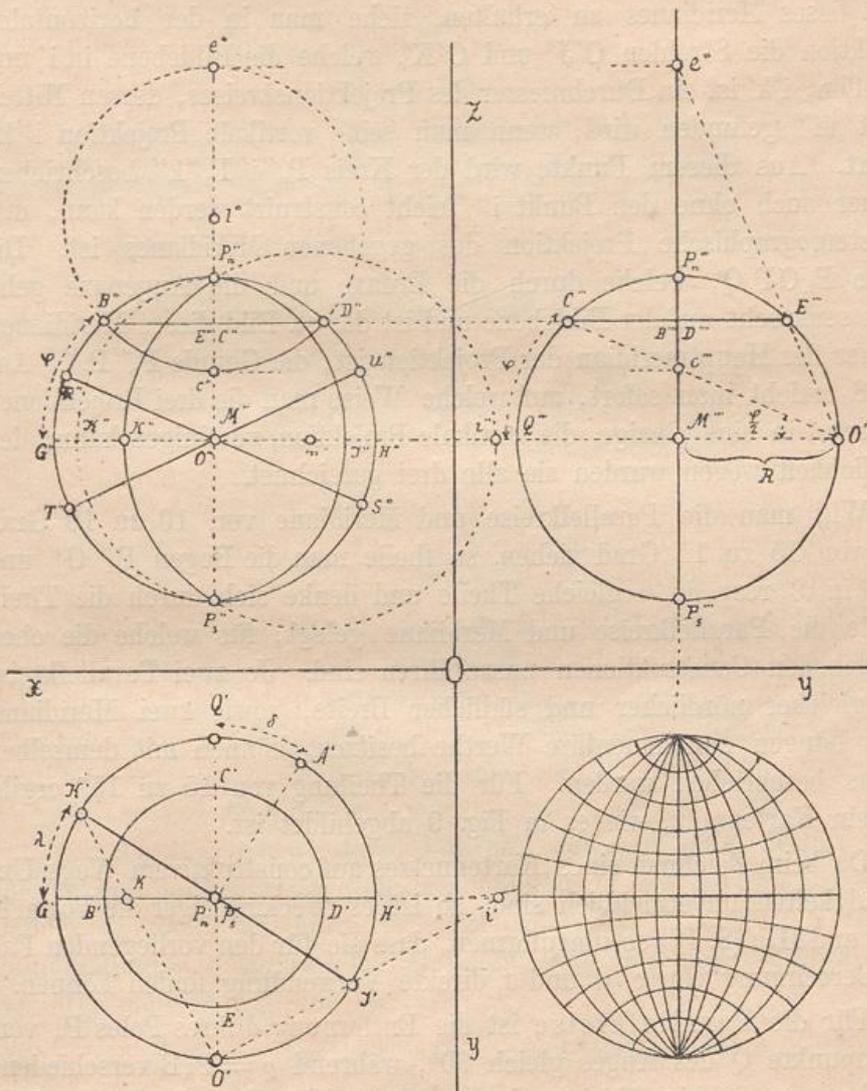


Fig. 8.

Fig. 9.

$G''H''$ projicirt. Ferner besitzen je zwei und zwei Parallelkreise, welche gleichweit vom Aequator entfernt sind, zu ihm eine symmetrische Lage, und müssen daher auch die stereographischen Bilder dieser Kreise zu der Geraden $G''H''$ eine symmetrische Lage haben.

Die stereographische Projection irgend eines Meridianes

wird auf folgende Weise erhalten: Es sei $P_n J P_s K$ (Fig. 8) ein Meridian, welcher mit dem 0^{ten} Meridian den Winkel λ einschliesst, $J'K'$ seine horizontale, $J''K''$ seine vertikale Projektion. Um das stereographische Bild dieses Meridianes zu erhalten, ziehe man in der horizontalen Projektion die Strahlen $O'J'$ und $O'K'$, welche die Bildebene in i' und k' treffen, $i'k'$ ist ein Durchmesser des Projektionskreises, dessen Mittelpunkt m'' gefunden wird, wenn man seine vertikale Projektion $i''k''$ halbiert. Aus diesem Punkte wird der Kreis $P_n''i''P_s''k''$ beschrieben, welcher auch ohne den Punkt i'' leicht construirt werden kann, und die stereographische Projektion des gegebenen Meridianes ist. Die Ebene $P_n O P_s Q$, welche durch die Erdaxe und die Augenaxe geht, steht senkrecht auf der Bildebene und ist das st. Bild dieses Meridianes, welcher der Hauptmeridian der Projektion ist, die Gerade $P_n''P_s''$. Aus Fig. 8 ersieht man sofort, auf welche Weise man die drei Projektionen der Kugel in eine einzige, die vertikale Projektion, vereinigen kann; der Deutlichkeit wegen wurden sie alle drei gezeichnet.

Will man die Parallelkreise und Meridiane von 10 zu 10 Grad oder von 15 zu 15 Grad ziehen, so theile man die Bogen $P_n''G''$ und $G'Q'$ in 9 resp. in 6 gleiche Theile und denke sich durch die Theilpunkte die Parallelkreise und Meridiane gelegt, für welche die oben angegebenen Konstruktionen auszuführen sind. Je zwei Parallelkreise von gleicher nördlicher und südlicher Breite, sowie zwei Meridiane, deren Längen supplementäre Werthe besitzen, können mit demselben Radius beschrieben werden. Für die Theilung von 15 zu 15° ergibt sich ein Kartennetz, wie es in Fig. 9 abgebildet ist.

Da beim Zeichnen eines Kartennetzes auf konstruktivem Wege Ungenauigkeiten unvermeidlich sind, so ist es zweckmässiger die Formeln I, IIa und IIIa (S. 17) so umzuformen, dass sie für den vorliegenden Fall zur Berechnung von e , d und r direkte Verwendung finden können.

Für die Parallelkreise ist die Entfernung δ ihres Poles P_n vom Gegenpunkte Q des Auges gleich 90° , während $\varrho = P_n B$ verschiedene Werthe von 0° bis 90° annehmen kann. Die Formeln I, IIa, IIIa nehmen daher folgende Form an

$$e = R \operatorname{Tg} \frac{1}{2} (90^\circ - \varrho) \quad (\text{VIII})$$

$$d = \frac{R}{\operatorname{Cos} \varrho} \quad (\text{IX})$$

$$r = R \cdot \operatorname{Tg} \varrho \quad (\text{X}).$$

Statt der Poldistanz ϱ des Parallelkreises kann auch seine Breite φ

gegeben sein. Es ist aber $\varrho = 90^\circ - \varphi$ und $\text{Cos } \varrho = \text{Sin } \varphi$,
 $\text{Tg } \varrho = \text{Cotg } \varphi$, die Formeln lauten daher:

$$e = R \text{Tg } \frac{\varphi}{2} \quad (\text{VIIIa})$$

$$d = \frac{R}{\text{Sin } \varphi} \quad (\text{IXa})$$

$$r = R \cdot \text{Cotg } \varphi \quad (\text{Xa}).$$

Man kann diese Werthe auch unmittelbar aus Fig. 8 erhalten, in
 welcher $\sphericalangle Q'''O'''C''' = \frac{\varphi}{2}$ und $\sphericalangle Q'''O'''E''' = \frac{180^\circ - \varphi}{2} =$

$90^\circ - \frac{\varphi}{2}$ ist. Es ergibt sich:

$$M'''e''' = M''e'' = e = R \text{Tg } \frac{\varphi}{2}$$

$$M'''e''' = M''e'' = R \text{Tg } \left(90^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) = R \text{Cotg } \frac{\varphi}{2}$$

$$d = \frac{M''e'' + M'''e'''}{2} = \frac{R}{2} \left(\text{Tg } \frac{\varphi}{2} + \text{Cotg } \frac{\varphi}{2} \right)$$

$$d = \frac{R}{2} \left(\frac{\text{Sin}^2 \frac{\varphi}{2} + \text{Cos}^2 \frac{\varphi}{2}}{\text{Cos } \frac{\varphi}{2} \text{Sin } \frac{\varphi}{2}} \right) = \frac{R}{\text{Sin } \varphi}$$

ferner ist $2r = e''e''' = M''e'' - M'''e''' = R \left(\text{Cotg } \frac{\varphi}{2} - \text{Tg } \frac{\varphi}{2} \right)$

$$2r = \frac{R \left(\text{Cos}^2 \frac{\varphi}{2} - \text{Sin}^2 \frac{\varphi}{2} \right)}{\text{Cos } \frac{\varphi}{2} \text{Sin } \frac{\varphi}{2}} = \frac{R \text{Cos } \varphi}{\frac{\text{Sin } \varphi}{2}} = 2 R \text{Cotg } \varphi$$

$$r = R \text{Cotg } \varphi.$$

Für die Meridiane deren Pole auf dem Aequator liegen, variiert
 die Distanz δ dieser Pole vom Gegenpunkte Q des Auges zwischen 0°
 und 90° (siehe die horiz. Projektion der Fig. 8), dagegen ist der
 Bogenhalbmesser sämtlicher Meridiane $\varrho = 90^\circ$ und die Formeln Ia
 IIa, IIIa nehmen folgende Gestalt an:

$$e = R \text{Tg } \frac{1}{2} (90^\circ - \delta) \quad [(XI)] \quad \text{denn } \varrho = \overline{\delta}$$

$$d = R \text{Tg } \delta \quad (XII)$$

$$r = \frac{R}{\text{Cos } \delta} \quad (XIII).$$

Ist die Bildebene $G'H'$ (Fig. 8) der 0° Meridian, und die geog.
 Länge $G'K' = \lambda$ des zu projicirenden Meridianes gegeben, so ist $\text{Bg}A'Q'$
 $= \text{Bg}.G'K'$ d. h. $\delta = \lambda$ und

$$e = R \text{Tg } \frac{1}{2} (90^\circ - \lambda) \quad (\text{XIa})$$

$$d = R \operatorname{Tg} \lambda \quad (\text{XIIa})$$

$$r = \frac{R}{\operatorname{Cos} \lambda} \quad (\text{XIIIa}).$$

Nach dieser Methode werden die meisten Weltkarten construirt, wobei man gewöhnlich den Meridian von Ferro, welcher die Erde in die Land- und Wasserhälfte resp. in die alte und neue Welt theilt, als 0^{ten} Meridian und gleichzeitig als Bildebene annimmt.

In nachfolgender Tabelle sind sowohl für die Parallellkreise als Meridiane die Werthe von e d r angegeben, wenn die Werthe von φ und λ von 5° zu 5° wachsen. Der Radius der Kugel wurde = 1 gesetzt.

φ oder λ	Parallellkreise			Meridiane		
	$e = \operatorname{Tg} \frac{\varphi}{2}$	$d = \frac{1}{\operatorname{Sin} \varphi}$	$r = \operatorname{Cotg} \varphi$	$e = \operatorname{Tg} \frac{1}{2}(90^\circ - \lambda)$	$d = \operatorname{Tg} \lambda$	$r = \frac{1}{\operatorname{Cos} \lambda}$
5°	0,04366	11,47371	11,43005	0,91634	0,08749	1,00382
10°	0,08749	5,75877	5,67128	0,83910	0,17633	1,01543
15°	0,13165	3,86370	3,73205	0,76733	0,26795	1,03528
20°	0,17633	2,92380	2,74748	0,70021	0,36397	1,06418
23° 28'	0,20770	2,51120	2,30351			
25°	0,22169	2,36620	2,14451	0,63707	0,46631	1,10338
30°	0,26795	2,00000	1,73205	0,57735	0,57735	1,15470
35°	0,31530	1,74345	1,42815	0,52057	0,70021	1,22077
40°	0,36397	1,55572	1,19175	0,46631	0,83910	1,30541
45°	0,41421	1,41421	1,00000	0,41421	1,00000	1,41421
50°	0,46631	1,30541	0,83911	0,36397	1,19175	1,55572
55°	0,52057	1,22077	0,70021	0,31530	1,42815	1,74345
60°	0,57735	1,15470	0,57735	0,26795	1,73205	2,00000
65°	0,63707	1,10338	0,46631	0,22169	2,14451	2,36620
66° 32'	0,65604	1,09016	0,43412			
70°	0,70021	1,06418	0,36397	0,17633	2,84748	2,92380
75°	0,76733	1,03528	0,26795	0,13165	3,73205	3,86370
80°	0,83910	1,01543	0,17633	0,08749	5,67127	5,75876
85°	0,91633	1,00382	0,08749	0,04366	11,43005	11,47371

Wir wollen nach dieser Methode noch einen beliebigen Kugelkreis, z. B. die Ekliptik projectiren. Um die Frühlings-, Sommer-, Herbst- und Wintergestirne darzustellen, wie sie von einem Bewohner des Erd-äquators gesehen werden, ist es am zweckmässigsten diese Projektion anzuwenden. Für die Frühlingsgestirne ist der 180^{te}, für die Sommergestirne der 270^{te}, für die Herbstgestirne der 360^{te} und für die Wintergestirne der 90^{te} Declinationskreis der Kugel Hauptmeridian der

Projektion. Wollte man in diese 4 Karten, welche ein vollständiges Bild der ganzen Himmelskugel geben, einen beliebigen Kugelkreis einzeichnen, so hätte man nach den Gleichungen, V VI und VII (Seite 19) die Winkelwerthe von ω und ε , und nach den Gleichungen I, IIa, IIIa (Seite 17) die Werthe von e d r zu berechnen.

Ist $P_n Q = \delta$ (siehe Fig. 7, Seite 18) die Entfernung des Poles vom Gegenpunkt Q des Auges

$EF = \gamma$ die Rectascension des Poles der Ekliptik

$P_n A = \vartheta$ die Distanz des Poles der Ekliptik vom Himmelspol

$AD = \varrho$ der Bogenhalbmesser der Ekliptik

so sind in die Gleichungen Va und VIa für δ γ ϑ ϱ folgende Zahlenwerthe zu substituiren:

- 1) für die Frühlingsgestirne: $\delta = 90^\circ, \gamma = 90^\circ, \vartheta = 23^\circ 27' 20'', \varrho = 90^\circ$
- 2) „ „ Sommergestirne: $\delta = 90^\circ, \gamma = 0^\circ, \vartheta = 23^\circ 27' 20'', \varrho = 90^\circ$
- 3) „ „ Herbstgestirne: $\delta = 90^\circ, \gamma = 270^\circ, \vartheta = 23^\circ 27' 20'', \varrho = 90^\circ$
- 4) „ „ Wintergestirne: $\delta = 90^\circ, \gamma = 180^\circ, \vartheta = 23^\circ 27' 20'', \varrho = 90^\circ$

Für No. 1 ergibt sich

$$\cos A = 0 \text{ also } A = 90^\circ$$

$$\sin \omega = \sin 23^\circ 27' 20'' \text{ also}$$

$$\omega = 23^\circ 27' 20''$$

$$\varepsilon = 180^\circ - \omega = 156^\circ 32' 40''$$

Der Winkel ε ist an die Gerade $M''P_n''$ (Fig. 8) in der Richtung des Uhrzeigers anzutragen und liegt auf seinem Schenkel MG (Fig 7) der Mittelpunkt des gesuchten Kreises. Ferner ergeben sich nach den Gleichungen I, IIa und IIIa die Werthe von e d r .

$$e = \operatorname{Tg} \frac{1}{2} (A - \varrho) = \operatorname{Tg} 0^\circ = 0$$

$$d = \frac{\sin A}{\cos A + \cos \varrho} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$r = \frac{\sin \varrho}{\cos A + \cos \varrho} = \frac{1}{0} = \infty$$

Da d und r unendlich gross ist, so projicirt sich die Ekliptik in diesem Falle als gerade Linie $R''S''$ (Fig. 8), welche mit dem Aequator $G''H''$ einen Winkel von $23^\circ 27'$ einschliesst, und kann man auch ohne Hülfe der Formeln zu diesem Resultate gelangen, denn die Ebene der Ekliptik geht durch die Augenaxe und steht daher senkrecht auf der Bildebene, wesshalb sie sich als gerade Linie projicirt. Diese Linie muss mit dem Aequator einen Winkel von $23^\circ 27'$ bilden, denn die stereographischen Projektionen zweier Kugelkreise schneiden sich unter demselben Winkel, wie die Kreise selbst.

Auch für die Herbstgestirne projectirt sich die Ekliptik als gerade Linie T''U'' (Fig 8), welche in Bezug auf den Aequator G''H'' zu der Geraden R''S'' eine symetrische Lage besitzt.

Für No. 2 ergibt sich nach Gleichung Va und VIa:

$$\begin{aligned} \cos A &= \sin \vartheta = \sin 23^\circ 27' 20'' \\ A &= 66^\circ 32' 40'' \end{aligned}$$

$$\sin \omega = \frac{0}{\sin 66^\circ 32' 40''} = 0$$

$$\omega = 0^\circ$$

$$\varepsilon = 180^\circ$$

ferner nach Gleichung I, IIa, IIIa:

$$e = \operatorname{Tg} \frac{1}{2} (66^\circ 32' 40'' - 90^\circ)$$

$$e = - \operatorname{Tg} 11^\circ 43' 40''$$

$$e = - 0,20760$$

$$d = \operatorname{Tg} A = \operatorname{Tg} 66^\circ 32' 40''$$

$$d = 2,30473$$

$$r = \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{\cos 66^\circ 32' 40''}$$

$$r = 2,51233$$

Für No. 4 ergibt sich nach Gleichung Va und VIa:

$$\cos A = - \sin \vartheta =$$

$$- \sin 23^\circ 27' 20''$$

$$A = 66^\circ 32' 40''$$

$$A = 180^\circ - 66^\circ 32' 40''$$

$$A = 113^\circ 27' 20''$$

$$\sin \omega = 0, \omega = 180^\circ$$

$$\varepsilon = 0^\circ$$

Nach den Gleichungen I, IIa, IIIa erhält man:

$$e = \operatorname{Tg} \frac{1}{2} (113^\circ 27' 20'' - 90^\circ)$$

$$e = \operatorname{Tg} 11^\circ 43' 40''$$

$$e = 0,20760$$

$$d = \operatorname{Tg} A = \operatorname{Tg} 113^\circ 27' 20''$$

$$d = - 2,30473$$

$$r = \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{\cos 113^\circ 27' 20''}$$

$$r = - 2,51233$$

Zusammenstellung der erhaltenen Werthe.

• Ansicht	ε	e	d	r
I. Frühlingsgestirne	156°32'40''	0,00000	∞	∞
II. Sommergestirne	180°	- 0,20760	2,30473	2,51233
III. Herbstgestirne	203°27'20''	0,00000	∞	∞
IV. Wintergestirne	360°	0,20760	- 2,30473	- 2,51233

II. Projektion auf den Aequator.

(Stereographische Polarprojektion.)

Befindet sich das Auge in dem einen Pol der Kugel, so fällt die Bildebene mit der Aequatorebene zusammen und der Aequator A'B'C'D' (Fig. 10) ist der Grenzkreis der Karte. Die Erd- oder Himmelsaxe ist

$$r = R \operatorname{Tg} \frac{1}{2} (90^\circ - \varphi) \quad (\text{XIVa})$$

Für $R = 1$ gibt die Tabelle Seite 24 in der drittletzten Colonne die Werthe von r wenn φ von 5° zu 5° zunimmt.

Diese Projektionsmethode wird beim Entwurfe von Karten der Nord- und Südpolarländer sowie zur Construction von Himmelskarten angewandt und eignet sich hauptsächlich zur Darstellung der Circumpolargestirne. Will man in eine solche Karte die Ekliptik, welche durch die Punkte $A' C'$ des Aequators geht, einzeichnen, so substituirt man zur Berechnung der Werthe e d und r in die Gleichungen I, IIa, IIIa folgende Werthe:

$$\delta = 23^\circ 27' 20'' \quad \varphi = 90^\circ$$

$$\text{Es ergibt sich } e = -\operatorname{Tg} 33^\circ 16' 20'' = -0,65618$$

$$d = \operatorname{Tg} 23^\circ 27' 20'' = 0,43389$$

$$r = \frac{1}{\operatorname{Cos} 23^\circ 27' 20''} = 1,09007$$

Für eine Karte, welche die südliche Hemisphäre darstellt, ergeben sich dieselben Werthe von e d r , der Mittelpunkt der Ekliptik liegt jedoch auf der anderen Seite der Geraden $B'D'$ (Fig. 10).

Nach dieser Methode kann man Projektionen der Kugelfläche erhalten, welche mehr als die Halbkugel darstellen. Ist z. B. in Fig. 10

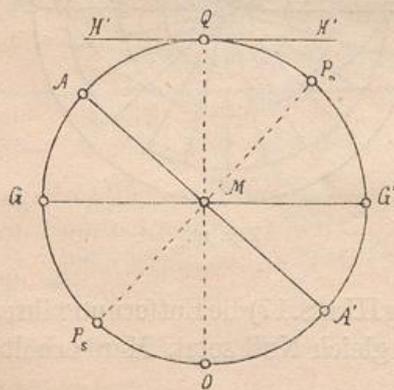


Fig. 11.

$G''H''$ ein Parallelkreis, welcher südlich vom Aequator liegt, so besitzt seine stereographische Projektion $g''h''$ einen grösseren Halbmesser als der Aequator und ist ein zu diesem concentrischer Kreis $g'h'$. Je grösser die südliche Breite der Parallelkreise wird, um so grösser werden die Radien der Bildkreise, welche in Folge der Schiefe der Sehstrahlen unverhältnissmässig wachsen, wesshalb die an den Grenzen einer solchen Karte liegenden Figuren verzerrt erscheinen. Zur Darstellung der in unseren Breiten im Laufe des Jahres sichtbaren Him-

melszone sowie beim Entwurfe einer Karte, welche mehr als die eine Erdhemisphäre darstellen soll, wird diese Projektionsart hie und da angewandt. In Fig. 11 ist $P_n P_s$ die Erdaxe, $A A'$ der Aequator und Q ein beliebiger Erd-

ort, dessen geog. Breite $AQ = \varphi$ gegeben ist. $H'H'$ ist der scheinbare, GG' der wirkliche Horizont dieses Ortes, welcher letzterer die Himmelskugel in eine sichtbare und unsichtbare Hälfte theilt. Alle Gestirne, welche daher eine südl. Declination bis $AG = 90^\circ - \varphi$ besitzen, sind für diesen Ort im Laufe des Jahres sichtbar, und es bildet für einen Bewohner dessen geog. Breite 48° beträgt, derjenige Parallelkreis die Grenze der Karte, dessen südl. Declination $= 42^\circ$ ist. Die Radien der südlichen Parallelkreise ergeben sich, wenn man in Gleichung XIV ϱ der Reihe nach die Werthe $95^\circ 100^\circ \dots 130^\circ$ gibt. Für den Kugelradius $R = 1$ erhält man folgende Werthe von r :

südliche Declination	$r = \text{Tg } \frac{\varrho}{2}$
5°	1,0913
10	1,1918
15	1,3032
20	1,4281
25	1,5697
30	1,7321
35	1,9210
40	2,1445

Aus dieser Zusammenstellung sieht man, dass der Radius desjenigen Parallelkreises dessen südliche Declination 40° beträgt, doppelt so gross ist als der Radius der Kugel, wesshalb die Gestirne, welche die Kugelzone zwischen dem Aequator und -40° südl. Declination einnehmen, eine viel grössere Fläche bedecken als die Gestirne zwischen 0° und 90° nördl. Declination.

Dieser Uebelstand wird vermieden, sobald man den Augenpunkt auf der Verlängerung der Weltaxe annimmt. Die Projektionen der Meridiane bleiben dabei unverändert, diejenigen der Parallelkreise sind concentrische Kreise, deren Radien von der Annahme des Augenpunktes abhängen. Prof. Otto Möllinger hat bei der Construction seiner transparenten Sternkarte den Augenpunkt in solcher Entfernung vom Centrum der Kugel angenommen, dass die Bogen vom Aequator bis 42° nördlicher und südlicher Declination auf der Karte gleich gross erscheinen und in Folge dessen die Parallelkreise von $+42^\circ$ und -42° Declination gleichweit vom Aequator entfernt sind. Die Karte ist für einen Bewohner des 48° Parallelkreises construirt, wesshalb der Bogen $AQ = 48^\circ$, der Bogen $AG = 42^\circ$ zu setzen ist (Fig. 11).

Es sei AB (Fig. 12) der Aequator der Himmelskugel, welcher gleichzeitig die Bildebene ist. $P_n P_s$ die Weltaxe auf deren Verlängerung der Augenkpunkt O der Projektion liegt. CD und EF seien zwei Parallelkreise, welche die gleiche nördliche und südliche Declination von 42° besitzen. Vom Punkte O denke man sich nach diesen Kreisen Projektionsstrahlen gezogen, die die Bildebene in den Kreisen cd und ef treffen. Da die Entfernungen Ae und Ae dieser Kreise vom Aequator einander gleich sein sollen, so ist vor Allem zu be-

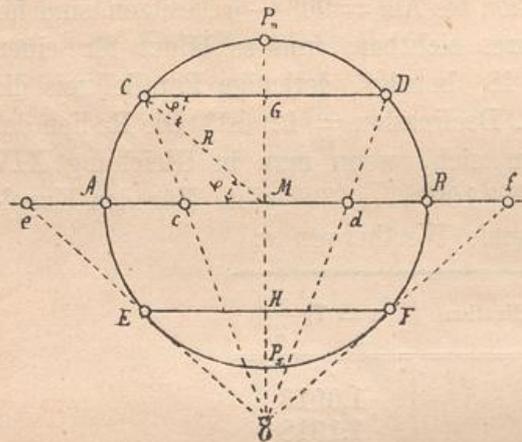


Fig. 12.

weisen, dass es auf der Geraden $P_n P_s$ einen Punkt O gibt, welcher als Augenkpunkt dieser Anforderung entspricht. Es kann diess auf folgende Weise gezeigt werden: In Fig. 12 ist:

$$Me : CG = MO : GO$$

$$Me : EH = MO : HO$$

Setzt man in diesen Proportionen $MO = D$, so ist $GO = D + MG$, $HO = D - MH$ und man erhält:

$$1) Me = \frac{CG \cdot D}{D + MG}$$

$$2) Me = \frac{EH \cdot D}{D - MH}$$

Aus Fig. 12 ergibt sich ferner: $CG = EH = R \cdot \cos \varphi$ und $MG = MH = R \sin \varphi$ somit:

$$(XV) \begin{cases} Me = \frac{R \cos \varphi D}{D + R \sin \varphi} \\ Me = \frac{R \cos \varphi \cdot D}{D - R \sin \varphi} \end{cases}$$

$$\text{und } 3) Ae = AM - Me = R - \frac{R \cos \varphi D}{D + R \sin \varphi} = R \left(1 - \frac{D \cos \varphi}{D + R \sin \varphi} \right)$$

$$4) Ae = Me - AM = \frac{R \cos \varphi D}{D - R \sin \varphi} - R = R \left(\frac{D \cos \varphi}{D - R \sin \varphi} - 1 \right)$$

Nimmt man den Augenkpunkt zuerst im Pole P_s der Kugel an, so ergibt sich für $\varphi = 42^\circ$ nach Gleichung XIV:

$$Mc = RTg 24^\circ = 0,4452 R$$

$$Me = RTg 66^\circ = 2,2460 R$$

$$\text{ferner } Ac = R - 0,4452 R = 0,5548 R$$

$$Ae = 2,2460 R - R = 1,2460 R$$

und daher $Ae > Ac$.

Nimmt man dagegen den Augenpunkt in einer Entfernung $D = 2R$ von der Bildebene an, so ergeben sich die Werthe von Ac und Ae nach den Gleichungen 3 und 4. Es ist

$$Ac = R \left(1 - \frac{2 \cos \varphi}{2 + \sin \varphi} \right)$$

$$Ae = R \left(\frac{2 \cos \varphi}{2 - \sin \varphi} - 1 \right)$$

und für $\varphi = 42^\circ$, $Ac = 0,4432 R$ und $Ae = 0,1168 R$

somit $Ac > Ae$.

Es muss also zwischen P_s und der neuen Lage des Augenpunktes, für welche $MO = 2R$ ist, ein Punkt liegen, von welchem aus die Bogen AC und AE gleich gross erscheinen, d. h. für den $Ac = Ae$ ist. Um seine Distanz D vom Centrum der Kugel zu berechnen, setze man die Werthe für Ac und Ae (Gleich. 3 und 4) einander gleich.

$$\text{Es ist } 1 - \frac{D \cos \varphi}{D + R \sin \varphi} = \frac{D \cos \varphi}{D - R \sin \varphi} - 1 \text{ oder}$$

$$2 = \frac{D \cos \varphi}{D - R \sin \varphi} + \frac{D \cos \varphi}{D + R \sin \varphi}$$

$$\text{oder } 2 = \frac{D}{R} \cdot \frac{\cos \varphi}{\left(\frac{D}{R} - \sin \varphi\right)} + \frac{D}{R} \cdot \frac{\cos \varphi}{\left(\frac{D}{R} + \sin \varphi\right)}$$

Setzt man in dieser Gleichung $\frac{D}{R} = x$, so ist

$$2 = \frac{x \cos \varphi}{x - \sin \varphi} + \frac{x \cos \varphi}{x + \sin \varphi}$$

$$2(x^2 - \sin^2 \varphi) = x \cos \varphi (x + \sin \varphi + x - \sin \varphi)$$

$$2(x^2 - \sin^2 \varphi) = 2x^2 \cos \varphi$$

$$x^2(1 - \cos \varphi) = \sin^2 \varphi$$

$$x = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \cos \varphi}} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}{\sqrt{1 - \cos \varphi}}$$

$$x = \frac{D}{R} = \sqrt{1 + \cos \varphi} \text{ somit}$$

$$(XVI) \quad D = R \sqrt{1 + \cos \varphi} = R \cos \frac{\varphi}{2} \sqrt{2}$$

für $\varphi = 42^\circ$ ist $D = 1,3203 R$

Setzt man $R = 1$ so ist $D = 1,3203$ und es ergeben sich die Radien sämt-

licher Parallelkreise nach den Gleichungen XV. Man erhält folgende Werthe:

Poldistanz der Parallelkreise	Radius der Projektion	Poldistanz der Parallelkreise	Radius der Projektion
5°	0,04967	75°	0,8075
10°	0,09945	80°	0,8705
15°	0,14945	85°	0,9345
20°	0,19980	90°	1,0000
25°	0,25055	95°	1,0665
30°	0,30190	100°	1,1340
35°	0,35395	105°	1,2015
40°	0,40675	110°	1,2685
45°	0,46045	115°	1,3330
50°	0,51500	120°	1,3940
55°	0,57106	125°	1,4485
60°	0,62800	130°	1,4935
65°	0,6865	132°	1,5063
70°	0,7458		

Um die Projektion der Ekliptik und des Horizontes zu erhalten, welche sich bei dieser Annahme des Augenpunktes als Ellipsen projectiren, hat man die grosse und die kleine Axe dieser Ellipsen, sowie die Entfernungen ihrer Mittelpunkte vom Centrum der Karte zu berechnen.

In Fig. 13 ist A''B'' der Aequator, E''D'' die Ekliptik, welche mit ihm einen Winkel von $23\frac{1}{2}^\circ$ bildet, ferner H''G'' der Horizont, für welchen die Poldistanz $P_n''G'' = 48^\circ$ ist. Ekliptik und Horizont, welche beide grösste Kreise der Kugel sind, schneiden sich in dem Kugeldurchmesser PQ, welcher in der Bildebene liegt und daher seine eigene Projektion ist. Beide Ellipsen gehen durch die Punkte P'Q' des Aequators (Fig. 14), die Ekliptik geht ausserdem durch die Punkte e'd', und der Horizont durch die Punkte h'g', welche aus Fig. 13 in die Fig. 14 projectirt werden.

Da E''D'' ein Durchmesser der Ekliptik ist, so muss auch seine perspectivische Projektion e'd' ein Durchmesser der Ellipse e'f'd'i' sein, dessen Grösse wie folgt erhalten wird:

Es ist $e'd' = e''d'' = e''M'' + M''d'' = DTg\gamma + D \cdot Tg\delta$ (Fig. 13) wenn die Entfernung $M''O'' = D$ gesetzt wird. Oder

$$1) e'd' = D (Tg\gamma + Tg\delta) = \frac{D \sin(\gamma + \delta)}{\cos\gamma \cos\delta}$$

Sobald die Winkel γ und δ bekannt sind, kann auch $e'd'$ mit dieser Gleichung berechnet werden. Betrachtet man die Dreiecke $O''M''E''$ und $O''M''D''$,

so ist 2)
$$\begin{cases} E'' + \gamma = 90^\circ - \varepsilon \\ D'' + \delta = 90^\circ + \varepsilon \end{cases}$$

ferner bestehen die Gleichungen:

3)
$$\begin{cases} \operatorname{Tg} \frac{1}{2} (E'' - \gamma) = \frac{\operatorname{Tg} \frac{1}{2} (E'' + \gamma) \cdot (D - R)}{D + R} = \frac{\operatorname{Tg} \frac{1}{2} (90^\circ - \varepsilon) (D - R)}{D + R} \\ \operatorname{Tg} \frac{1}{2} (D'' - \delta) = \frac{\operatorname{Tg} \frac{1}{2} (D'' + \delta) (D - R)}{D + R} = \frac{\operatorname{Tg} \frac{1}{2} (90^\circ + \varepsilon) (D - R)}{D + R} \end{cases}$$

Mittels den Gleichungen 2) und 3) berechnet man die Werthe von γ und δ , und setzt dieselben in Gleichung 1) ein, wodurch die eine Axe $e'd'$ der Ellipse erhalten wird. Die Entfernung $M'C'$ ihres Mittelpunktes C' vom Centrum der Karte wird auf folgende Weise berechnet. Es ist:

$$\begin{aligned} M'C' &= M'd' - d'C' \\ &= M''d'' - \frac{e''d''}{2} \\ &= D \operatorname{Tg} \delta - \frac{D \operatorname{Sin} (\gamma + \delta)}{2 \operatorname{Cos} \gamma \operatorname{Cos} \delta} \end{aligned}$$

4)
$$M'C' = x_1 = \frac{D \operatorname{Sin} (\delta - \gamma)}{2 \operatorname{Cos} \gamma \operatorname{Cos} \delta}$$

Dieser Werth ist die Abszisse x_1 des Punktes P' durch welchen die Ellipse gehen muss, in Bezug auf $C'd'$ als Abscissenaxe und $C'f'$ als Ordinatenaxe. Die Ordinate von P' ist $M'P' = y_1 = R$ und es ergibt sich die zweite Axe der Ellipse, wenn man in ihre Mittelpunkts-Gleichung $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$ für a, y und x die erhaltenen

Werthe setzt, und alsdann b ermittelt. Es ist: 5)
$$a = \frac{e'd'}{2} = \frac{D \operatorname{Sin} (\gamma + \delta)}{2 \operatorname{Cos} \gamma \operatorname{Cos} \delta}$$

Fig. 13.

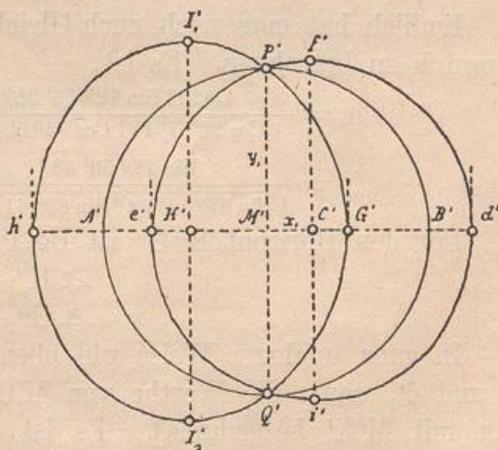
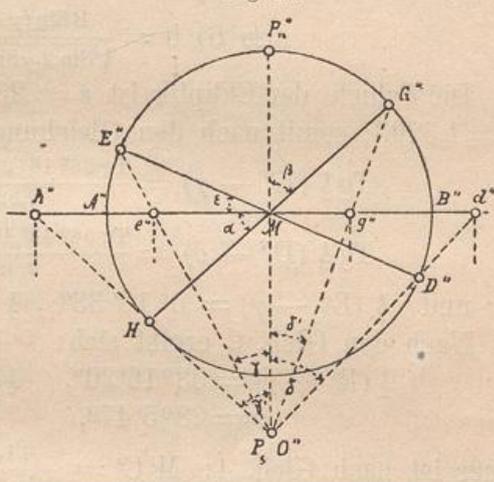


Fig. 14.

$$x = x_1 = \frac{D \sin(\delta - \gamma)}{2 \cos \gamma \cos \delta}$$

$$y = y_1 = R, \quad \text{somit}$$

$$\frac{D^2 \sin^2(\gamma + \delta)}{4 \cos^2 \gamma \cos^2 \delta} R^2 + b^2 \frac{D^2 \sin^2(\delta - \gamma)}{4 \cos^2 \gamma \cos^2 \delta} = \frac{D^2 \sin^2(\gamma + \delta)}{4 \cos^2 \gamma \cos^2 \delta} b^2 \text{ und}$$

$$b^2 (\sin^2(\gamma + \delta) - \sin^2(\delta - \gamma)) = R^2 \sin^2(\gamma + \delta)$$

$$\text{oder } b^2 [\sin(\gamma + \delta) + \sin(\delta - \gamma)] \cdot [\sin(\gamma + \delta) - \sin(\delta - \gamma)] \\ = R^2 \sin^2(\gamma + \delta)$$

Durch gehörige Entwicklung und Reduktion ergibt sich:

$$b^2 \sin 2\gamma \sin 2\delta = R^2 \sin^2(\gamma + \delta)$$

$$\text{also } b = \frac{R \sin(\gamma + \delta)}{\sqrt{\sin 2\gamma \sin 2\delta}}$$

Die Schiefe der Ekliptik ist $\varepsilon = 23^\circ 27' 20''$, ferner ist für $R = 1$
 $D = 1,3203$; somit nach den Gleichungen 3:

$$\operatorname{Tg} \frac{1}{2} (E'' - \gamma) = \frac{\operatorname{Tg} 33^\circ 16' 20'' \cdot 0,3203}{2,3203}$$

$$\operatorname{Tg} \frac{1}{2} (D'' - \delta) = \frac{\operatorname{Tg} 56^\circ 43' 40'' \cdot 0,3203}{2,3203}$$

$$\text{und } \frac{1}{2} (E'' - \gamma) = 5^\circ 10' 33'', \quad \frac{1}{2} (D'' - \delta) = 11^\circ 52' 49''$$

Nach den Gleich. 2 ergibt sich:

$$\frac{1}{2} (E'' + \gamma) = 33^\circ 16' 20'', \quad \frac{1}{2} (D'' + \delta) = 56^\circ 43' 40'' \\ \gamma = 28^\circ 5' 47'', \quad \delta = 44^\circ 50' 51''$$

$$\text{ferner ist nach Gleich. 4: } M'C' = \frac{1,3203 \cdot \sin 16^\circ 45' 04''}{2 \cos 28^\circ 5' 47'' \cos 44^\circ 50' 51''}$$

$$M'C' = 0,30421.$$

Endlich hat man noch nach Gleichung 5) und 6) die Werthe von
 a und b zu berechnen. Es ist:

$$a = \frac{1,3203 \sin 72^\circ 56' 38''}{2 \cos 28^\circ 5' 47'' \cos 44^\circ 50' 51''} = 1,00908$$

$$b = \frac{\sin 72^\circ 56' 38''}{\sqrt{\sin 56^\circ 11' 34'' \sin 89^\circ 41' 42''}} = 1,04880$$

Für den Horizont $H''G''$ ist $\operatorname{Bg.} P_n'' G'' = \beta = 48^\circ$

$$\nearrow H'' + \gamma' = 180^\circ - \beta = 132^\circ$$

$$\nearrow G'' + \delta' = \beta = 48^\circ.$$

In ganz analoger Weise wie oben ergeben sich die Werthe von
 γ' und δ' , sowie die Werthe von $M'C'$, a' und b' [$M'C'$ wollen wir
 nun mit $M'K'$ bezeichnen]. Es ist (siehe Fig. 13 und 14) $\gamma' =$
 $48^\circ 46' 26''$, $\delta' = 20^\circ 28' 59''$, $M'K' = -0,50679$, $a' = 1$, $b' = 1,1600$.

III. Projektion auf den Horizont.

(Stereographische Horizontalprojektion.)

Will man diejenige Hemisphäre der Erdkugel abbilden, in deren Centrum sich irgend ein Land oder eine grössere Stadt, z. B. Wien oder Paris befindet, so lässt man den Gegenpunkt Q des Auges mit demjenigen Orte zusammenfallen, der im Mittelpunkte der Karte liegen soll. Die Augenaxe steht alsdann senkrecht auf dem Horizont $H''H''$ (Fig. 15) des Ortes Q'' und die Bildebene $L''N''$ ist der wahre Horizont dieses Ortes. In Fig. 15 und 16 ist die Bildebene parallel mit der horizontalen Projektionsebene angenommen,

während der Hauptmeridian $Q''P_n''O''P_s''$, welcher durch die Erdaxe $P_n''P_s''$ und die Augenaxe $O''Q''$ geht, eine zur vertikalen Projektionsebene parallele Lage besitzt. Die stereographische Projektion des Hauptmeridianes ist in Folge dessen eine zur Projektionsaxe parallele Gerade $p_n'p_s'$.

Da sämtliche Parallelkreise $C''D''$, $A''B''$ etc. von dem grössten Kreise $A''P_n''B''P_s''$ in Durchmessern $C''D''$, $A''B''$ etc. geschnitten werden, so liegen die Projektionen dieser Durchmesser auf der Geraden $p_n'p_s'$, welche sämtliche Mittelpunkte der stereographischen Projektionen der Parallelkreise enthält.

Um das Bild des Kreises $C''D''$ zu erhalten, ziehe man die Projektionsstrahlen $O''C''$ und $O''D''$, welche die Bildebene in $c''d''$ treffen, die horizontale Projektion $c'd'$ der Geraden ed ist ein Durchmesser des Parallelkreises $c'd'$, dessen Mittelpunkt i' gefunden wird, wenn man $c'd'$ halbirt. Ebenso kann man auch für die übrigen Parallelkreise, welche

Fig. 15.

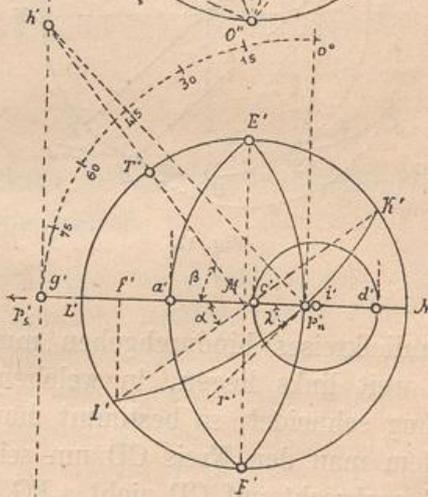
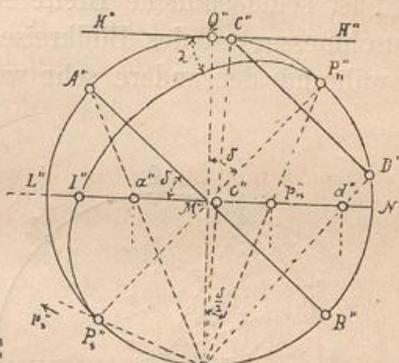


Fig. 16.

entweder von 10 zu 10^o oder von 15 zu 15^o gezogen werden, die Mittelpunkte construiren. Der Aequator A"B", dessen Ebene auf dem Hauptmeridiane senkrecht steht, schneidet die Bildebene in der Geraden EF, welche ebenfalls eine zur vertikalen Projektionsebene senkrechte Lage besitzt. Da die Gerade EF ihre eigene stereographische Projektion ist, so geht durch ihre Endpunkte E, F' das Bild des Aequators.

Liegt wie in Fig. 17 ein Parallelkreis CD südlich vom Aequator und ist seine südliche Breite AC etwas gross, so erhält man von dem Durchmesser ed des Bildkreises gewöhnlich nur den einen Endpunkt e, während der andere sehr weit wegfällt, wesshalb man den Mittel-

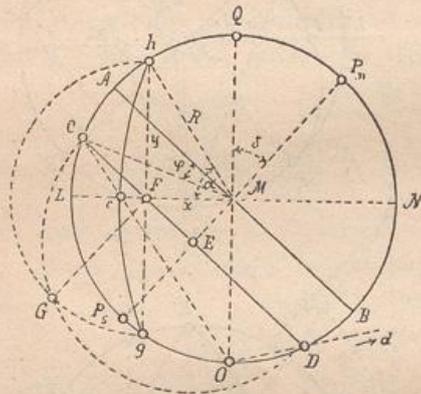


Fig. 17.

Parallelkreises hindurchgehen muss. Sollte die Sehne gh (Fig. 17) zu weit links liegen, in welchem Falle sie den Kreis nicht scharf genug schneidet, so bestimmt man die wahre Grösse von Fg und Fh indem man den Kreis CD um seinen Durchmesser CD niederlegt und FG senkrecht auf CD zieht. FG ist dann die wahre Grösse der halben Sehne, welche nach Fg und Fh getragen wird.

Da sämtliche Meridiane durch die Pole $P_n P_s$ der Kugel gehen, so müssen ihre Bilder durch die Projektionen $p_n' p_s'$ dieser Pole gehen. (Fig. 16) p_s' ist daher eine sämtlichen Meridianen gemeinschaftliche Sehne, und die Mittelpunkte dieser Meridiane liegen auf der Senkrechten $g'h'$, welche man in der Mitte von $p_n' p_s'$ auf dieser Geraden errichtet. Um sie zu erhalten erinnere man sich, dass sich die stereographischen Bilder zweier Kreise unter demselben Winkel schneiden, wie die Kreise selbst. Ist daher λ (Fig. 16) der Winkel, welchen der gesuchte

punkt i dieses Kreises auf andere Weise zu erhalten suchen muss. Dies geschieht auf folgende Art: Die Ebene des Kreises CD steht senkrecht auf dem Hauptmeridiane und schneidet die Bildebene in der Sehne GH, welche im Punkte F ebenfalls auf dem Hauptmeridiane senkrecht steht. GH ist ihr eigenes Bild und erscheint bei der Niederlegung der Bildebene um den Durchmesser LN in der wahren Grösse, wesshalb durch die Endpunkte gh dieser Geraden das Bild des

Meridian mit dem Hauptmeridiane der Karte bildet, so trage man diesen Winkel im Punkte p_n' an $L'p_n'$ an, $p_n'r'$ ist dann eine Tangente an den gesuchten Kreis, dessen Mittelpunkt h' erhalten wird, wenn man $p_n'h'$ senkrecht auf $p_n'r'$ zieht und sie mit der Geraden $g'h'$ zum Schnitt bringt. Will man die Meridiane von 10° zu 10° oder von 15° zu 15° zeichnen, so beschreibt man am einfachsten aus dem Punkte p_n' mit beliebigem Halbmesser (in Fig. 16 wurde er gleich $p_n'g'$ angenommen) einen Kreis, errichtet in p_n' eine Senkrechte auf $p_n'g'$ und theilt den Quadranten $g'0$ vom Punkte 0 aus in 9 resp. in 6 gleiche Theile, verbindet die Theilpunkte mit dem Punkte p_n' , welche Linien die Senkrechte $g'h'$ in den gesuchten Mittelpunkten der Meridiane schneiden. In Fig. 16 bildet der gezeichnete Meridian mit dem Hauptmeridiane einen Winkel von 45° . Sämmtliche Meridiane besitzen zum Hauptmeridiane je zwei und zwei eine symetrische Lage, wesshalb ihre Mittelpunkte gleichweit von g' entfernt sind. Derjenige Meridian, dessen Ebene auf dem Hauptmeridiane senkrecht steht, schneidet die Bildebene in der Geraden $E'F'$ durch deren Endpunkte das Bild dieses Meridians hindurchgehen muss, der Mittelpunkt dieses Kreises liegt in g' .

Ableitung der Fundamentalformeln für die stereographische Horizontalprojection.

Da bei der constructiven Ausführung eines Kartennetzes immer unvermeidliche Constructionsfehler gemacht werden, so ist es zweckmässig auch für diesen Fall die Fundamentalformeln abzuleiten, nach welchen sowohl die Parallelkreise als auch die Meridiane unmittelbar berechnet und alsdann gezeichnet werden können.

Fundamentalformeln für die Parallelkreise. Für diese bleiben die Formeln I, II, III (Seite 17) vollständig unverändert und ist in denselben $\delta = P_n''Q''$ (Fig 15) d. h. gleich der Poldistanz des Ortes Q zu setzen, welcher den Mittelpunkt der Karte einnimmt während ϱ die Poldistanz der Parallelkreise ist. Da $\varrho = 90^\circ - \varphi$, wenn φ die Breite der Parallelkreise bezeichnet, so können die Formeln auch noch folgendermassen geschrieben werden:

$$(XVII) \quad e' = R \operatorname{Tg} \frac{1}{2} (\delta + 90^\circ - \varphi) \quad e = R \operatorname{Tg} \frac{1}{2} (\delta + \varphi - 90^\circ)$$

$$(XVIII) \quad d = \frac{R \operatorname{Sin} \delta}{2 \operatorname{Cos} \frac{\delta + 90^\circ - \varphi}{2} \operatorname{Cos} \frac{\delta + \varphi - 90^\circ}{2}} = \frac{R \operatorname{Sin} \delta}{\operatorname{Cos} \delta + \operatorname{Sin} \varphi}$$

$$(XIX) \quad r = \frac{R \cos \varphi}{2 \cos \frac{\delta + 90^\circ - \varphi}{2} \cos \frac{\delta + \varphi - 90^\circ}{2}} = \frac{R \cos \varphi}{\cos \delta + \sin \varphi}$$

für den Aequator ist $\varphi = 0$ also

$$(XVIIa) \quad e' = R \operatorname{Tg} \frac{1}{2} (\delta + 90^\circ) \quad \text{und} \quad e = R \operatorname{Tg} \frac{1}{2} (\delta - 90^\circ)$$

$$(XVIIIa) \quad d = \frac{R \sin \delta}{\cos \delta} = R \operatorname{Tg} \delta$$

$$(XIX a) \quad r = \frac{R}{\cos \delta}$$

Will man in eine Weltkarte den Polarkreis und den einen Wendekreis einzeichnen, so setze man in den Formeln (XVII) (XVIII) (XIX) $\varphi = 23^\circ 27' 20''$ und $\varphi = 66^\circ 32' 40''$, wodurch man die entsprechenden Werthe von e' e d r erhält.

Für die südlichen Parallelkreise, welche grössere Radien als der Aequator besitzen, ist es zweckmässig ausser dem Punkte c (Fig. 17), welchen man durch Berechnung der Distanz Mc erhält, noch die Schnittpunkte g und h des Parallelkreises mit dem Grenzkreise der Karte zu bestimmen. Diess geschieht am einfachsten durch Berechnung der Coordinaten MF und $Fh = Fg$ der Punkte h und g oder durch Bestimmung des Winkelwerthes $LMh = \alpha$. Aus dem bei E rechtwinkligen Dreieck FEM folgt:

$FM = x = \frac{ME}{\cos(90^\circ - \delta)} = \frac{ME}{\sin \delta}$, wenn δ die Poldistanz des Ortes Q bedeutet, oder da $ME = R \sin \varphi$

$$(XX) \quad x = \frac{R \sin \varphi}{\sin \delta} \quad (\varphi = \text{der südl. Breite des Parallelkreises}).$$

Zur Berechnung von y wendet man die Mittelpunkts Gleichung des Kreises $AP_n BP_s$ an. Es ist

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2 \sin^2 \varphi}{\sin^2 \delta}}$$

$$(XXI) \quad y = \frac{R}{\sin \delta} \sqrt{\sin^2 \delta - \sin^2 \varphi}$$

Endlich ergibt sich der Winkel $LMh = \alpha$ durch die Gleichung

$$\operatorname{Tg} \alpha = \frac{y}{x} = \sqrt{\frac{\sin^2 \delta - \sin^2 \varphi}{\sin^2 \varphi}}$$

$$(XXII) \quad \operatorname{Tg} \alpha = \sqrt{\left(\frac{\sin \delta}{\sin \varphi}\right)^2 - 1}$$

Fundamentalformeln für die Meridiane. Zunächst ergeben sich die Entfernungen $M''p_n$, $M''p_s$ der Pole vom Mittelpunkte der Karte direkt aus Fig. 15 (Seite 41). Es ist $P_n''Q'' = \delta =$ der Poldistanz des Ortes Q , und daher:

$$(XXIII) \begin{cases} M'' p_n'' = O'' M''. \operatorname{Tg} \frac{\delta}{2} = R \operatorname{Tg} \frac{\delta}{2} \\ M'' p_s'' = O'' M''. \operatorname{Tg} \left(90^\circ - \frac{\delta}{2} \right) = R \operatorname{Cotg} \frac{\delta}{2} \end{cases}$$

Die Distanz der Pole $p_n'' p_s'' = R \left(\operatorname{Tg} \frac{\delta}{2} + \operatorname{Cotg} \frac{\delta}{2} \right)$

$$p_n'' p_s'' = \frac{R \left(\sin^2 \frac{\delta}{2} + \cos^2 \frac{\delta}{2} \right)}{\sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2}}$$

$p_n'' p_s'' = \frac{2R}{\sin \delta}$; also die Entfernung des Fusspunktes g' der Senkrechten, (Fig. 16) auf welcher die Mittelpunkte der Meridiane liegen, vom Pole p_n :

$p_n' g' = \frac{p_n'' p_s''}{2} = \frac{R}{\sin \delta}$ und die Entfernung dieser Geraden vom Mittelpunkte der Karte:

$$M' g' = p_n' g' - p_n' M' = \frac{R}{\sin \delta} - R \operatorname{Tg} \frac{\delta}{2}$$

$$M' g' = R \left(\frac{1}{\sin \delta} - \frac{\sin \frac{\delta}{2}}{\cos \frac{\delta}{2}} \right)$$

$$M' g' = \frac{R \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\delta}{2} \right)}{2 \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2}}$$

$$(XXIV) M' g' = \frac{R \cos \delta}{\sin \delta} = R \operatorname{Cotg} \delta$$

Um die Entfernung $g' h'$ des Mittelpunktes irgend eines Meridianes, welcher mit dem Hauptmeridiane den Winkel λ einschliesst, vom Fusspunkte g' der Senkrechten $g' h'$, sowie den Radius $h' p_n' = r$ des Meridianes zu berechnen, betrachte man das rechtwinklige Dreieck $h' g' p_n$ in welchem $\sphericalangle g' p_n' h' = 90^\circ - \lambda$ ist. Es ist

$$g' h' = p_n' g'. \operatorname{Tg} (90^\circ - \lambda)$$

$$(XXV) g' h' = y = \frac{R \operatorname{Cotg} \lambda}{\sin \delta}$$

Ferner ergibt sich $h' p_n' = r = \frac{p_n' g'}{\cos (90^\circ - \lambda)}$

$$(XXVI) r = \frac{R}{\sin \delta \sin \lambda}$$

Die Distanz $g' h'$ ist vom Punkte g' aus nach oben und unten aufzutragen und können mit demselben Halbmesser gleichzeitig zwei Meridiane beschrieben werden. Aus Fig. 16 lässt sich ferner der Winkel

β berechnen, welchen die zur Bestimmung des Mittelpunktes h' dienende Gerade $h'M'$ mit dem Hauptmeridiane bildet. Es ist

$$\text{Cotg } \beta = \frac{M'g'}{g'h'} = \frac{R \cdot \text{Cotg } \delta \cdot \text{Sin } \delta}{R \text{ Cotg } \lambda}$$

$$(XXVII) \text{ Cotg } \beta = \text{Cos } \delta \text{ Tg } \lambda$$

Man kann den Werth von r auch mittelst der Fundamentalformel IIIa (Seite 17) erhalten, wenn man in diese die entsprechenden

Werthe von δ und ϱ einsetzt. In Fig. 18 ist P_nCP_n ein beliebiger Meridian, welcher mit dem Hauptmeridiane den Winkel λ bildet. AB der Aequator und R der Pol des Meridianes, für welchen $QR = \Delta$ die Entfernung vom Gegenpunkte Q des Auges ist. Diess ist aber der für δ in Gleichung IIIa zu substituierende Werth. Es ergibt sich aus dem bei A rechtwinkligen sphärischen Dreieck AQR , dessen Katheten $AQ = \varrho = 90^\circ - \delta$ und $AR = AC + CR = \lambda + 90^\circ$ gegeben sind.

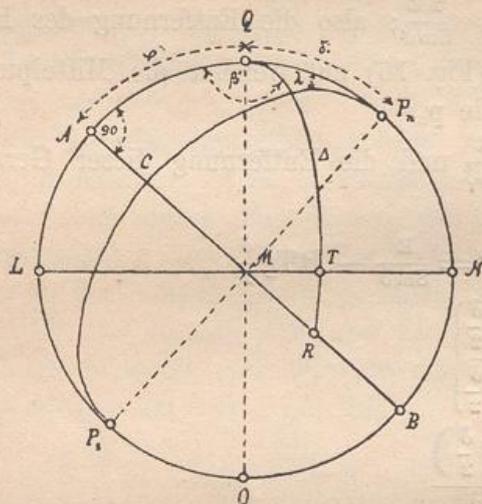


Fig. 18.

(AR kann auch $= \lambda - 90^\circ$ sein.) Es ist

$$\text{Cos } \Delta = \text{Cos } (90^\circ - \delta) \text{Cos } (90^\circ + \lambda)$$

$$\text{Cos } \Delta = - \text{Sin } \delta \text{Sin } \lambda \quad \text{Im vorliegenden Falle ist } \Delta$$

ein stumpfer Winkel, also allgemein:

$$(XXVIII) \text{ Cos } \Delta = \text{Sin } \delta \text{Sin } \lambda$$

Substituirt man diesen Werth in Gleichung IIIa und beachtet man gleichzeitig, dass für jeden Meridian der Bogenhalbmesser $\varrho = 90^\circ$ ist,

$$\text{so ergibt sich: } r = \frac{R \text{Sin } 90^\circ}{\text{Sin } \delta \text{Sin } \lambda + \text{Cos } 90^\circ} = \frac{R}{\text{Sin } \delta \text{Sin } \lambda} \quad (\text{wie oben.})$$

Aus demselben Dreieck AQR (Fig. 18) kann man auch die Gleichung XXVII erhalten, durch welche sich der Winkel β ergibt, dessen Maass das Supplement des Bogens LT des Grenzkreises der Karte ist; die horizontale Projektion $L'T'$ dieses Supplementes (Fig. 16) bestimmt die Richtung der Geraden $M'h'$. Aus Fig. 18 folgt:

$$\begin{aligned} \text{Tg } AR &= \text{Sin } \varphi \cdot \text{Tg } \beta' \\ \text{Tg } (90^\circ + \lambda) &= \text{Cos } \delta \text{ Tg } \beta' \\ \text{Tg } \beta' &= - \frac{\text{Cotg } \lambda}{\text{Cos } \delta} \\ \frac{1}{\text{Cotg } \beta'} &= - \frac{1}{\text{Tg } \lambda \text{ Cos } \delta} \\ \text{Cotg } \beta' &= - \text{Tg } \lambda \text{ Cos } \delta \text{ oder da } \beta = 180^\circ - \beta' \\ \text{Cotg } \beta &= - \text{Cotg } \beta' = \text{Tg } \lambda \text{ Cos } \delta \text{ (wie oben). —} \end{aligned}$$

Endlich ergibt sich nach Gleichung IIa (Seite 17) die Entfernung d des Centrum des Meridianes vom Mittelpunkte der Karte. Es ist

$$(XXIX) \quad d = \frac{R \text{Sin } A}{\text{Cos } A} = R \text{Tg } A$$

Nach Gleichung XXVIII berechnet man die Winkelgrösse Δ und substituirt ihren Werth in Gleichung (XXIX) wodurch d erhalten wird. —

Wir haben noch den Fall zu erwähnen, in welchem der Mittelpunkt des Meridianes ausserhalb des Blattes fällt und der letztere durch drei Punkte zu bestimmen ist. Da die Ebene eines Meridianes durch die Erdaxe geht, so schneidet sie die Bildebene in einer Geraden $J'K'$, (Fig. 16) welche durch das Centrum der Karte geht und den Grenzkreis der Karte in den Punkten J' und K' trifft. Mittelst den Punkten $J'p_n'K'$ kann der Meridian gezeichnet werden und man hat daher nur den Winkel $L'M'J' = \alpha$ zu berechnen, welchen die Gerade $J'K'$ mit dem Hauptmeridiane bildet. Aus dem bei

L'' rechtwinkligen sphärischen Dreieck $P_n''L''J''$ (Fig. 15), in welchem $P_n''L'' = 90^\circ + \delta$ und $\sphericalangle L''P_n''J'' = \lambda$ ist, folgt

$$\begin{aligned} \text{Tg } L''J'' &= \text{Sin } P_n''L'' \cdot \text{Tg } \lambda \text{ oder da } Bg L''J'' = L'J' = \alpha \text{ ist} \\ \text{Tg } \alpha &= \text{Sin } (90^\circ + \delta) \text{ Tg } \lambda \end{aligned}$$

Fig. 15.

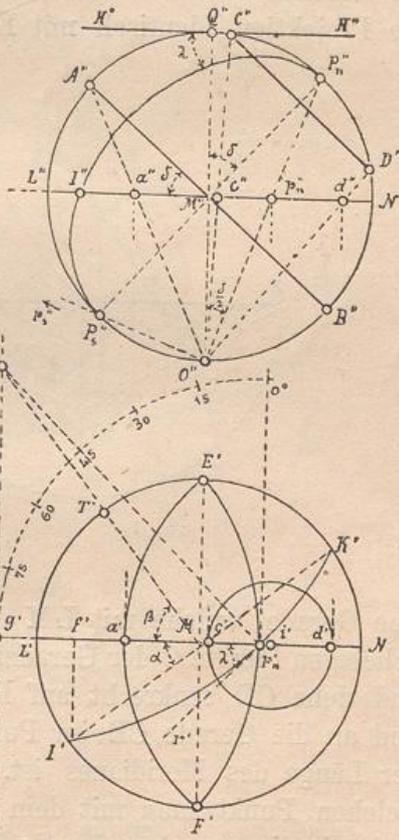


Fig. 16.

$$(XXX) \operatorname{Tg} \alpha = \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Tg} \lambda.$$

Die Abscisse $M'f'$ und Ordinate $f'J'$ des Punktes J' ergeben sich nach den Gleichungen (XXXI) $M'f' = x = R \operatorname{Cos} \alpha$ und $f'J' = y = R \operatorname{Sin} \alpha$.

Wir werden später ein Verfahren kennen lernen, beliebige andere Punkte des Meridianes $J'p_n'K'$ als Durchschnittspunkte mit einem zum Grenzkreise der Karte concentrischen Kreise zu bestimmen, so dass der Meridian mit dem Peripheriezirkel auch dann gezogen werden kann, wenn der Durchmesser der Karte sehr gross ist.

Die Gerade JK (Fig. 16) kann gestützt auf Formel (XXX) auch auf folgende Weise construirt werden: Es sei Fig. 19 in Bezug auf die Projektion identisch mit Fig. 16, LN der Hauptmeridian, P_nP

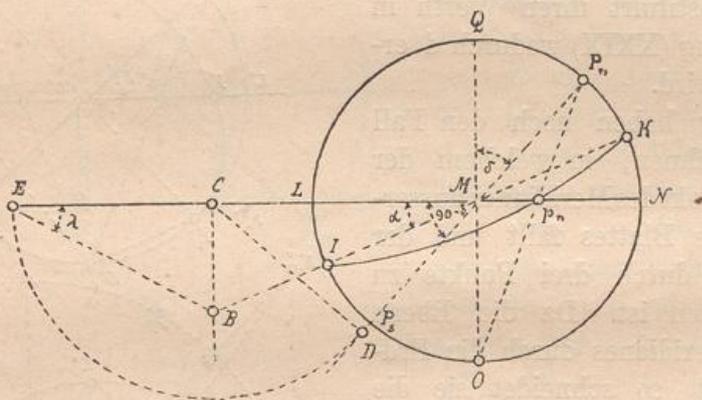


Fig 19.

eine Gerade, welche mit LM den Winkel $90^\circ - \delta$ bildet. In einem beliebigen Punkte C der Geraden LM errichte man die Senkrechte CB und ziehe CD senkrecht auf P_nP_s , trage die Distanz CD nach CE , und an die Gerade CE im Punkte E den Winkel λ , welcher gleich der Länge des Meridianes ist. EB und CB schneiden sich in B , welchen Punkt man mit dem Mittelpunkte M der Karte verbindet, wodurch die gesuchte Gerade JK erhalten wird, denn es ist:

$$\operatorname{Tg} \alpha = \frac{CB}{CM} = \frac{EC \operatorname{Tg} \lambda}{CM} = \frac{CD \operatorname{Tg} \lambda}{CM}$$

$$\operatorname{Tg} \alpha = \operatorname{Sin} (90^\circ - \delta) \operatorname{Tg} \lambda$$

$$\operatorname{Tg} \alpha = \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Tg} \lambda \quad (\text{wie oben.})$$

Um das Bild irgend eines Kugelkreises zu erhalten, von welchem $\delta \gamma \vartheta$ und ϱ (Fig. 7), gegeben ist, wendet man unmittelbar die

Formeln V, VI, VII (Seite 19) an, mit welchen die Werthe von ω und ε berechnet werden. Dadurch ergibt sich die Richtung der Geraden MG (Fig. 7), auf welcher der Mittelpunkt m des gesuchten Kreises liegt. Man berechnet nun die Werthe von e, d und r nach den Gleichungen I, II, III, (Seite 17) und kann alsdann den Kreis construiren.

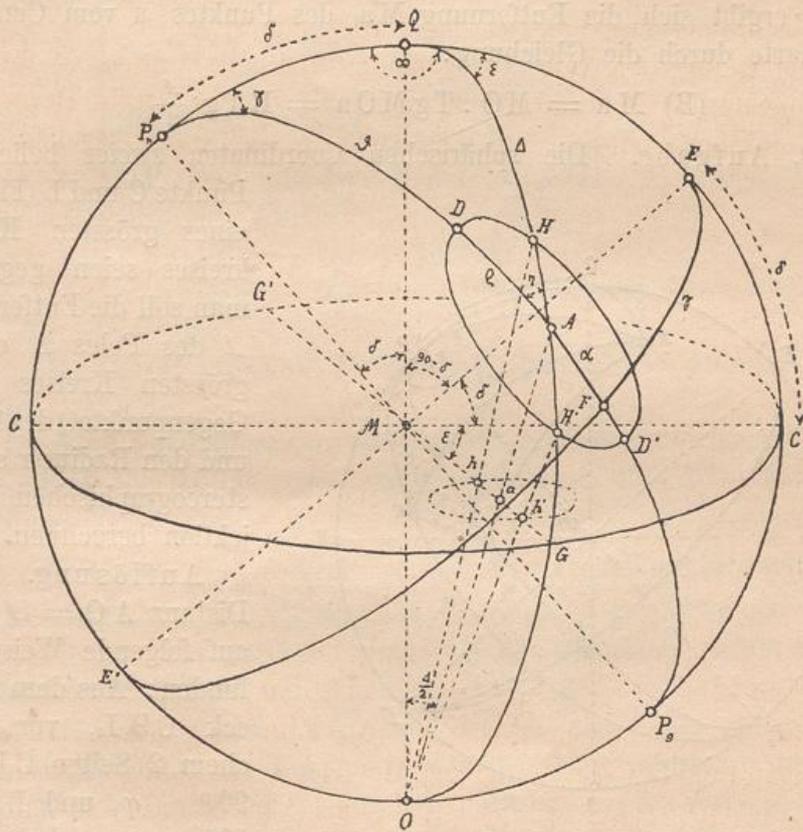


Fig. 7.

Hierher gehören auch die Lösungen folgender 3 Aufgaben:

1. Aufgabe. Gegeben sind die sphärischen Coordinaten eines Punktes A (Fig. 7), der Kugel, als welche wir $EF = \gamma$ und $AF = \alpha$ annehmen wollen, [$\gamma =$ dem Winkel, welchen der Meridian des Punktes A mit dem Hauptmeridiane einschliesst, $\alpha =$ der geog. Breite des Ortes A] man soll die stereographische Projektion a des Punktes A bestimmen.

Auflösung. Zunächst ergibt sich $P_n A = \vartheta = 90^\circ - \alpha$ und man erhält mittelst den Gleichungen V, VI, VII (Seite 19) die Werthe von ω und ε . Durch den Winkel ε ist die Richtung MG der Geraden bestimmt, auf welcher die Projektion a des Punktes liegt. Mittelst des Sinussatzes wird nun die Entfernung A des Punktes A vom Gegenpunkte Q des Auges berechnet, es ist:

$$(A) \sin A = \frac{\sin \vartheta \sin \gamma}{\sin \omega}$$

ferner ergibt sich die Entfernung Ma des Punktes a vom Centrum der Karte durch die Gleichung:

$$(B) Ma = MO \cdot \operatorname{Tg} MOa = R \operatorname{Tg} \frac{A}{2}$$

2. Aufgabe. Die sphärischen Coordinaten zweier beliebiger Punkte C und L (Fig. 37)

eines grössten Kugelkreises seien gegeben, man soll die Entfernung A des Poles A dieses grössten Kreises vom Gegenpunkte Q des Auges und den Radius r seiner stereographischen Projektion berechnen. —

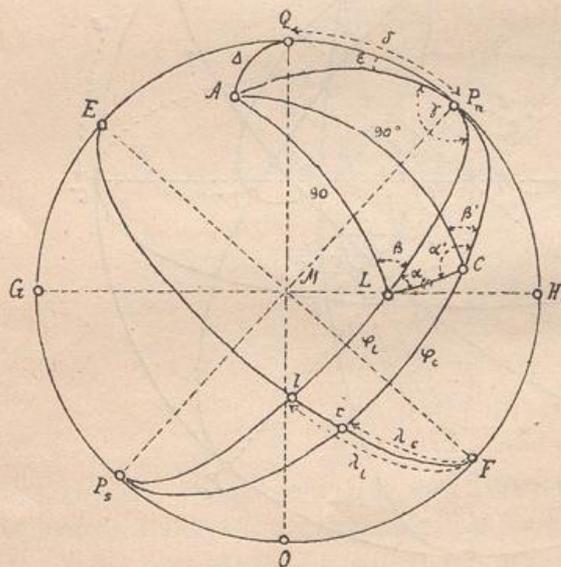


Fig. 37.

Auflösung. Die Distanz $AQ = A$ wird auf folgende Weise gefunden: Aus dem Dreieck CP_nL , von welchem 2 Seiten $CP_n = 90^\circ - \varphi_c$ und $LP_n = 90^\circ - \varphi_l$ und der von ihnen eingeschlossene Winkel CP_nL gegeben

ist, erhält man mittelst den Neperschen Analogien die Winkel α und α' .

$$(C) \begin{cases} \operatorname{Tg} \frac{1}{2} (\alpha' + \alpha) = \frac{\cos \frac{1}{2} (P_n L - P_n C)}{\cos \frac{1}{2} (P_n L + P_n C)} \operatorname{Cotg} \frac{CP_n L}{2} \\ \operatorname{Tg} \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha) = \frac{\sin \frac{1}{2} (P_n L - P_n C)}{\sin \frac{1}{2} (P_n L + P_n C)} \operatorname{Cotg} \frac{CP_n L}{2} \end{cases}$$

Durch diese sind auch die Winkel β und β' bekannt.

$$D) \beta = 90^\circ - \alpha; \beta' = \alpha' - 90^\circ$$

und man kann aus $\triangle AP_nL$ oder aus $\triangle AP_nC$, in welchen zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind, die Seite AP_n berechnen. Durch Anwendung des Cosinussatzes auf diese beiden Dreiecke, in welchen $AL \perp AC = 90^\circ$ ist, ergeben sich die Gleichungen:

$$(E) \begin{cases} \cos AP_n = \sin LP_n \cos \beta \\ \cos AP_n = \sin CP_n \cos \beta' \end{cases}$$

ferner ist:

$$(F) \begin{cases} \sin AP_nL = \sin \gamma = \frac{\sin \beta \sin AL}{\sin AP_n} = \frac{\sin \beta}{\sin AP_n} \\ \sin AP_nC = \sin \gamma' = \frac{\sin \beta'}{\sin AP_n} \end{cases}$$

In $\triangle AQP_n$ sind nun zwei Seiten AP_n , $QP_n = \delta$ und der von ihnen eingeschlossene Winkel

$$(G) \begin{cases} \varepsilon = 180^\circ - (\lambda_1 + \gamma) \text{ oder} \\ \varepsilon = 180^\circ - (\lambda_c + \gamma') \end{cases} \text{ bekannt, und kann } \angle A = \mathcal{A}$$

nach der Gleichung:

$$(H) \cos \mathcal{A} = \cos AP_n \cos \delta + \sin AP_n \sin \delta \cos \varepsilon$$

erhalten werden.

Da der Bogenhalbmesser eines grössten Kreises der Kugel $= 90^\circ$ ist, so wird der Radius seiner stereographischen Projektion nach der Gleichung:

$$(J) r = \frac{R}{\cos \mathcal{A}} \text{ berechnet, in welche Gleichung IIIa übergeht.}$$

3. Aufgabe. Die sphärischen Coordinaten der Eckpunkte eines Kugeldreieckes sind gegeben, man soll die Oberfläche seiner stereographischen Projektion berechnen.

Auflösung. Nach Aufgabe 1 werden zuerst die stereographischen Projektionen der Eckpunkte des Dreieckes bestimmt und ihre Coordinaten in Bezug auf ein durch den Mittelpunkt der Karte gehendes rechtwinkliges Axensystem ermittelt (die Ordinatenaxe lässt man mit dem Hauptmeridiane zusammenfallen). Mit den letzteren können die Sehnenlängen der stereographischen Projektionen der Kreisbogen, sowie die Oberfläche des Sehnendreieckes berechnet werden. Ferner ergeben sich nach Aufgabe 2 die Radien der stereographischen Kreisbogen, durch diese und die Sehnenlängen sind auch die Centriwinkel der 3 Kreissectoren bestimmt, deren Oberfläche nun berechnet werden kann. Zieht man von den Sektoren die drei Mittelpunktsdreiecke ab, so ergeben sich die Oberflächen der Kreisabschnitte, die zu dem Sehnendreieck zu adiren sind. Es wird dadurch die Gesamt-

oberfläche der stereographischen Projektion des sphärischen Dreieckes erhalten. —

Für das sphärische Dreieck Lissabon-Constantinopel-Petersburg wurden folgende Dreiecksseiten gefunden:

$$LC = p = 29^{\circ} 7' 33'', LP = c = 32^{\circ} 32' 8'', CP = l = 18^{\circ} 57' 18''$$

Nach den Gleichungen C bis J der vorigen Aufgabe ergeben sich die Radien ihrer stereographischen Projektionen wie folgt:

$$r_p = 3,157167 = 5318,33 \text{ g. Meilen}; r_c = 2,358500 = 3972,96 \text{ g. M.}$$

$$r_l = 11,98233 = 20184,57 \text{ g. M.}$$

Ferner erhält man folgende den Sehnen lc, lp, cp entsprechende Centriwinkel:

$$\nu_p = 4^{\circ} 42' 12'', \nu_c = 7^{\circ} 0' 2'', \nu_l = 0^{\circ} 47' 40''$$

Die Oberfläche des Sehnendreieckes ist:

$$F = \sqrt{\frac{S}{2} \left(\frac{S}{2} - p\right) \left(\frac{S}{2} - c\right) \left(\frac{S}{2} - l\right)} = 60485,88 \square \text{ M.}$$

die Oberflächen der 3 Kreisabschnitte sind: $A_p = 1352,30$

$$A_c = 2415,70$$

$$A_l = 639,00$$

Also der Inhalt der stereogr. Projektion

$$\text{des sphärischen Dreieckes } O = 64892,88$$

Nach der Formel von L'Huillier ergibt sich der sphärische Excess ε des Kugeldreieckes:

$$\text{Tg } \frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\text{Tg } \frac{S}{4} \text{Tg } \frac{1}{2} \left(\frac{S}{2} - p\right) \text{Tg } \frac{1}{2} \left(\frac{S}{2} - c\right) \text{Tg } \frac{1}{2} \left(\frac{S}{2} - l\right)},$$

in dieser ist $S = p + c + l =$ der Summe der Seiten des sphärischen Dreieckes. Man erhält

$\varepsilon = 4^{\circ} 54' 56'' = 17696''$ und somit die Oberfläche des sphärischen Dreieckes

$$O' = \frac{R^2 \pi \varepsilon}{180} = \frac{859,437^2 \cdot 3,14159 \cdot 17696}{648000} = 63369,13 \text{ geogr. Q.-Meilen.}$$

Die stereographische Projektion ist daher um 1523,75 Q.-Meilen oder um 2,4 % grösser als die Oberfläche des sphärischen Dreieckes. (Für den ganzen Kugelabschnitt beträgt die Flächendifferenz 2 %).*)

Vor Kurzem wurden vom Verfasser dieses Buches vier transparente Sternkarten von einem Meter Durchmesser veröffentlicht, die unter dem Titel „Ansichten des Sternhimmels“ erschienen sind, bei welchen die stereographische Horizontalprojektion zur An-

*) Der Radius der stereog. Projektion desjenigen Kugelkreises, welcher den Kugelabschnitt begrenzt auf dem sich Europa befindet und der daher Grenzkreis der Karte ist, wurde gleich der Länge des Bogenhalbmessers dieser Kreises angenommen.

wendung kam. Die Karten stellen die Frühlings-, Sommer-, Herbst- und Wintergestirne dar, wie sie von einem Bewohner des mittleren Europa gesehen werden. Bei ihrer Construction wurde als Bildebene der Horizont eines Bewohners des 48. Parallelkreises angenommen und um die Sterne genau eintragen zu können die Parallelkreise und Meridiane von Grad zu Grad gezogen. Für die nördlichen Parallelkreise wurden nach den Gleichungen I, IIa, IIIa, die Werthe von e d und r berechnet, für die südlichen Parallelkreise nach den Gleichungen (XX) und (XXII) die Werthe x und α , für die Meridiane nach Gleichung (XXIV) die Distanz $M'g'$; für die Meridiane, bei welchen $\lambda \begin{matrix} > 0^\circ \\ < 56^\circ \end{matrix}$ ist nach den Gleichungen (XXX) und (XXXI) die Werthe von α und x und endlich für die Meridiane, bei welchen $\lambda > 50^\circ$ ist nach den Gleichungen (XXV) und (XXVI) die Werthe von $g'h' = y$ und r .

Da das auf solche Weise erhaltene Kartennetz auch zur Construction einer Karte des mittleren Europa verwendet werden kann, so seien die zu seiner Construction dienenden Zahlenwerthe in nachfolgender Tabelle angegeben.

Für $R = 0,5$ (Radius der Kugel) und $\delta = 42^\circ$ ergaben sich folgende Werthe:

Tabelle zur Construction einer Karte des mittleren Europa nach der stereog. Horizontalprojektion.
Parallelkreise.

ϱ	$e = R \cdot \operatorname{Tg} \frac{1}{2}(\delta - \varrho)$ für $\varrho < \delta$	$d = \frac{R \operatorname{Sin} \delta}{\operatorname{Cos} \delta + \operatorname{Cos} \varrho}$	$r = \frac{R \operatorname{Sin} \varrho}{\operatorname{Cos} \delta + \operatorname{Cos} \varrho}$	ϱ	$e = R \cdot \operatorname{Tg} \frac{1}{2}(\varrho - \delta)$ für $\varrho > \delta$	$d = \frac{R \operatorname{Sin} \delta}{\operatorname{Cos} \delta + \operatorname{Cos} \varrho}$	$r = \frac{R \operatorname{Sin} \varrho}{\operatorname{Cos} \delta + \operatorname{Cos} \varrho}$
0°	0,1919	0,1919	0,0000	60°	-0,0792	0,2691	0,3483
5	0,1673	0,1922	0,0250	65	-0,1017	0,2870	0,3887
10	0,1434	0,1933	0,0502	70	-0,1247	0,3083	0,4330
15	0,1200	0,1953	0,0755	75	-0,1481	0,3339	0,4820
20	0,0972	0,1988	0,1016	80	-0,1722	0,3649	0,5371
25	0,0747	0,2028	0,1281	85	-0,1969	0,4030	0,5999
30	0,0526	0,2079	0,1554	90	-0,2226	0,4502	0,6728
35	0,0306	0,2142	0,1836	95	-0,2493	0,5100	0,7593
40	0,0087	0,2217	0,2130	100	-0,2771	0,5875	0,8646
45	-0,0131	0,2307	0,2438	105	-0,3064	0,6908	0,9972
50	-0,0350	0,2414	0,2764	110	-0,3372	0,8341	1,1713
55	-0,0570	0,2541	0,3111				

Parallelkreise.

Stüdl. Breite φ	Entfernung e	Abzisse $x = \frac{R \sin \varphi}{\sin \delta}$	$Tg \alpha = \sqrt{\left(\frac{\sin \delta}{\sin \varphi}\right)^2 - 1}$	Stüdl. Breite φ	Entfernung e	Abzisse $x = \frac{R \sin \varphi}{\sin \delta}$	$Tg \alpha = \sqrt{\left(\frac{\sin \delta}{\sin \varphi}\right)^2 - 1}$
5°	-0,2493	0,0651	82° 31'	25°	-0,3700	0,3158	50° 50'
10	-0,2771	0,1297	74 .58	30	-0,4049	0,3736	41 .39
15	-0,3064	0,1934	67 .15	35	-0,4424	0,4286	31 .00
20	-0,3372	0,2555	59 .16	40	-0,4828	0,4803	16 .08

Meridiane $\lambda < 56^\circ$

$M'g' = R \operatorname{Cotg} \delta = 0,5553$

λ	$Tg \alpha = \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Tg} \lambda$ α	$M'f = R \operatorname{Cos} \alpha$ x	λ	$Tg \alpha = \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Tg} \lambda$ α	$M'f = R \operatorname{Cos} \alpha$ x
0°	0° 00'	0,5000	30°	23° 13'	0,4595
5	3.43	0,4989	35	27.29	0,4435
10	7.28	0,4957	40	31.57	0,4242
15	11.16	0,4903	45	36.37	0,4013
20	15.08	0,4826	50	41.32	0,3743
25	19.07	0,4724	55	46.42	0,3431

Meridiane $\lambda > 50^\circ$

λ	$g'h' = \frac{R \operatorname{Cotg} \lambda}{\sin \delta}$ y	$r = \frac{R}{\sin \delta \sin \lambda}$	λ	$g'h' = \frac{R \operatorname{Cotg} \lambda}{\sin \delta}$ y	$r = \frac{R}{\sin \delta \sin \lambda}$
55°	0,5232	0,9122	75°	0,2002	0,7726
60	0,4314	0,8628	80	0,1318	0,7588
65	0,3484	0,8245	85	0,0654	0,7501
70	0,2720	0,7962	90	0,0000	0,7472

Um die Ekliptik in die Karten einzuzichnen, wurden zur Berechnung der Werthe ε e d r die Gleichungen V, VI, VII, I, II, III angewandt.

Wie schon früher erwähnt, ist für die Frühlingsgestirne der 180te,

für die Sommergestirne der 270^{te} , für die Herbstgestirne der 360^{te} und für die Wintergestirne der 90^{te} Declinationskreis Hauptmeridian des Beobachters und sind daher in die genannten Gleichungen für $\delta \gamma \vartheta \varrho$ (Fig. 7) folgende Werthe zu substituiren:

für die Frühlingsgestirne : $\delta = 42^{\circ}$, $\gamma = 90^{\circ}$, $\vartheta = 23^{\circ}27'20''$, $\varrho = 90^{\circ}$
 „ „ Sommergestirne : „ „ $\gamma = 0^{\circ}$ „ „ „ „ „ „
 „ „ Herbstgestirne : „ „ $\gamma = 270^{\circ}$ „ „ „ „ „ „
 „ „ Wintergestirne : „ „ $\gamma = 180^{\circ}$ „ „ „ „ „ „

Da $R = 0,5$ Meter angenommen wurde, so ergaben sich für ε e d und r folgende Werthe:

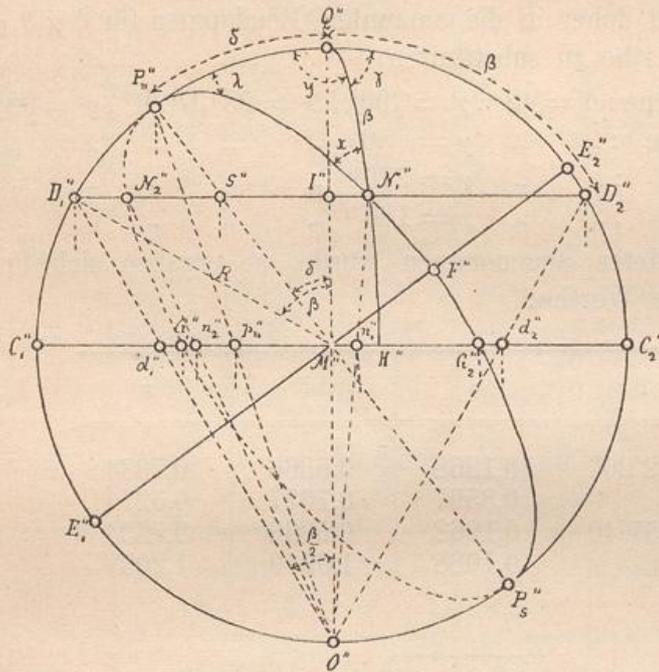
γ	ε	e	d	r
90°	$147^{\circ}2'20''$	0,1968	0,5366	0,7334
0°	0°	0,3597	0,1677	0,5274
270°	$212^{\circ}57'40''$	0,1968	0,5366	0,7334
180°	0°	0,1088	1,0949	1,2037

Stereographische Projektion eines gegebenen Kugelabschnittes wenn die Bildebene mit der Ebene seines Grenzkreises parallel angenommen wird.

Um einen beliebigen Erdtheil z. B. Europa, Afrika etc. oder ein beliebiges Land wie Frankreich, Deutschland, die Schweiz etc. nach der stereographischen Projektionsmethode darzustellen, denke man sich den betreffenden Erdtheil von einem kleinen Kugelkreise umschlossen, und verbinde den Pol dieses Kreises, welcher gleichzeitig Mittelpunkt des Landes ist mit dem Centrum der Kugel. Der so erhaltene Durchmesser wird als Augenaxe und sein Endpunkt als Augenpunkt der Projektion angenommen. In Fig. 20 ist Q'' der Mittelpunkt des Landes, das von dem Kugelkreise $D_1'' D_2''$ umschlossen wird; $C_1'' C_2''$ die Bildebene, welche mit der Ebene des Kreises $D_1'' D_2''$ parallel ist und $O'' Q''$ die Augenaxe, ferner $Q'' P_n'' O'' P_s''$ der durch die Augenaxe und die Erdaxe gehende grösste Kreis, dessen stereographische Projektion die Gerade $C_1 C_2$ ist, die wir den Hauptmeridian der Projektion genannt haben.

Um alsdann das Bild irgend eines Kugelkreises zu erhalten, muss

Fig. 20.



vor allem die Distanz $P'' Q'' = \delta$ des Erdpoles vom Gegenpunkte des Auges und der Bogenhalbmesser $D''_1 Q'' = \beta$ des Grenzkreises der Karte gegeben sein.

Ferner für einen Meridian der Winkel λ , welchen seine Ebene mit der Ebene des Hauptmeridianes bildet, für einen Parallelkreis

der Bogenhalbmesser ϱ , mit welchem man sich denselben vom Nordpol P_n der Kugel beschreiben denken kann und für einen beliebigen Kugelkreis endlich die aus Fig. 7 (Seite 18) ersichtlichen Elemente δ γ ϑ und ϱ .

Um einen Meridian $G''_1 P'' G''_2 P''$ (Fig. 20) zu projiciren, berechne man zunächst den Radius der Basis

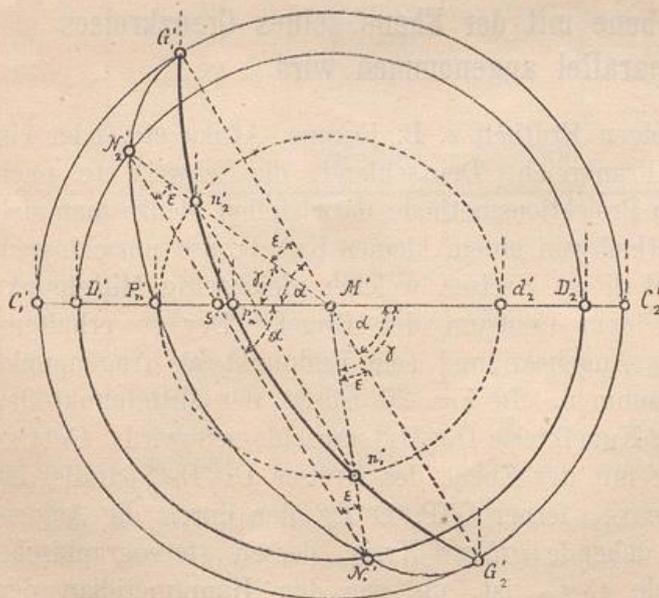


Fig. 21.

Bemerkung. In Fig. 21 ist bei P_n der Buchstabe d'_1 als Endpunkt des Durchmessers $d'_1 d'_2$ zu setzen.

des Kugelabschnittes $D_1''Q''D_2''$. Es ergibt sich aus dem Dreiecke $D_1''I''M''$:

$D_1''I'' = R \cdot \sin \beta$ (XXXII) ($R =$ dem Radius der Kugel), ferner erhält man aus dem Dreiecke $d_1''M''O''$ den Radius der stereographischen Projektion dieses Kreises, welcher der Grenzkreis $d_1 d_2$ der Karte ist.

$$d_1''M'' = R \operatorname{Tg} \frac{\beta}{2} \quad (\text{XXXIII}).$$

Die Ebene des Meridianes $P_n''G_2''P_s''G_1''$ schneidet nun die parallelen Ebenen $D_1''D_2''$ und $C_1''C_2''$ in den parallelen Geraden ($N_1''N_2''$, $N_1'N_2'$) und ($G_1''G_2''$, $G_1'G_2'$), von welchen die letztere in der Bildebene liegt, also gleichzeitig ihre stereographische Projektion ist. Mit ihr ist auch die Gerade ($n_1''n_2''$, $n_1'n_2'$) parallel, welche die stereographische Projektion von N_1N_2 ist, denn die Ebene ON_1N_2 schneidet auch die parallelen Ebenen D_1D_2 und C_1C_2 in parallelen Linien.

Vor Allem kann man nun mit Gleichung XXX (Seite 42) den Winkel α berechnen, welchen die Gerade $G_1'G_2'$ (Fig. 21) mit dem Hauptmeridiane bildet. Es ist:

$$\operatorname{Tg} \alpha = \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Tg} \lambda \quad (\text{XXX}).$$

Da die Ebene des zu projicirenden Meridianes durch die Erdaxe $P_n P_s$ geht, so muss ihr Durchschnitt N_1N_2 mit der Ebene D_1D_2 des Kugelkreises durch den Punkt S gehen, in welchem die Erdaxe die Ebene dieses Kreises trifft, und die horizontale Projektion $N_1'N_2'$ dieses Durchschnittes geht durch den Punkt S' des Hauptmeridianes. Die Entfernung $S'M'$ ergibt sich aus dem Dreieck $S''I''M''$, in welchem

$$S''I'' = I''M'' \cdot \operatorname{Tg} \delta = R \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Tg} \delta$$

Es ist also auch:

$$S'M' = R \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Tg} \delta.$$

Ferner kann aus dem Dreieck $M'S'N_1'$, in welchem zwei Seiten $S'M'$ und $N_1'M'$, sowie der Winkel α gegeben sind, der Winkel ε berechnet werden.

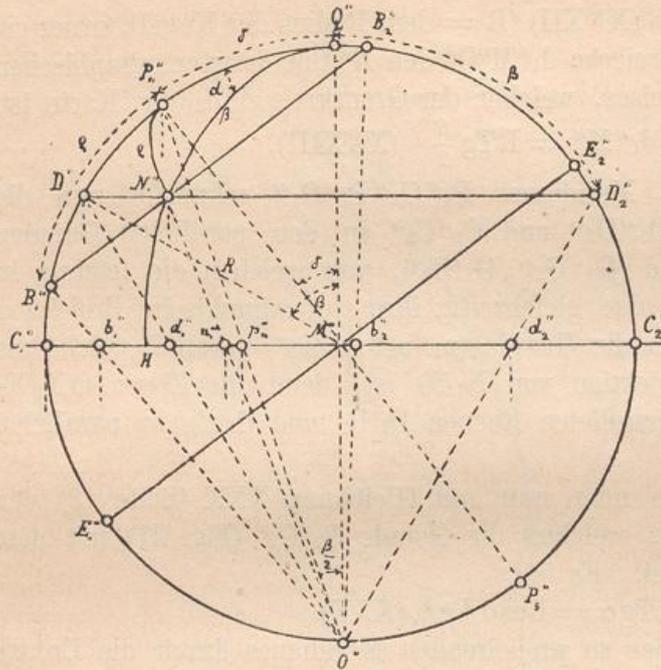
$$\sin \varepsilon = \frac{\sin \alpha \cdot S'M'}{M'N_1'} = \frac{\sin \alpha \cdot R \cdot \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Tg} \delta}{R \sin \beta} \quad (M'N_1' = D_1''I'')$$

$$\sin \varepsilon = \sin \alpha \operatorname{Cotg} \beta \operatorname{Tg} \delta \quad (\text{XXXIV}).$$

Der Winkel ε wird an die Gerade G_1G_2 auf beiden Seiten ange-
tragen, und die Richtungen der Geraden $M'n_1'$ und $M'n_2'$ erhalten,
welche den Grenzkreis der Karte $d_1'd_2'$ in zwei Punkten $n_1 n_2$ der
stereogr. Projektion des Meridianes treffen. Zwei andere Punkte des
Meridianes werden erhalten, wenn man den Winkel ε für einen zweiten
Kugelkreis berechnet, der mit D_1D_2 den Pol Q gemeinschaftlich hat,

und einen Bogenhalbmesser besitzt, welcher kleiner als β ist. Nach

Fig. 22.



den Gleichungen (XXXIII) und (XXXIV) ergeben sich die neuen Werthe von $d_1 M$ und ϵ , welche man entsprechend aufträgt.

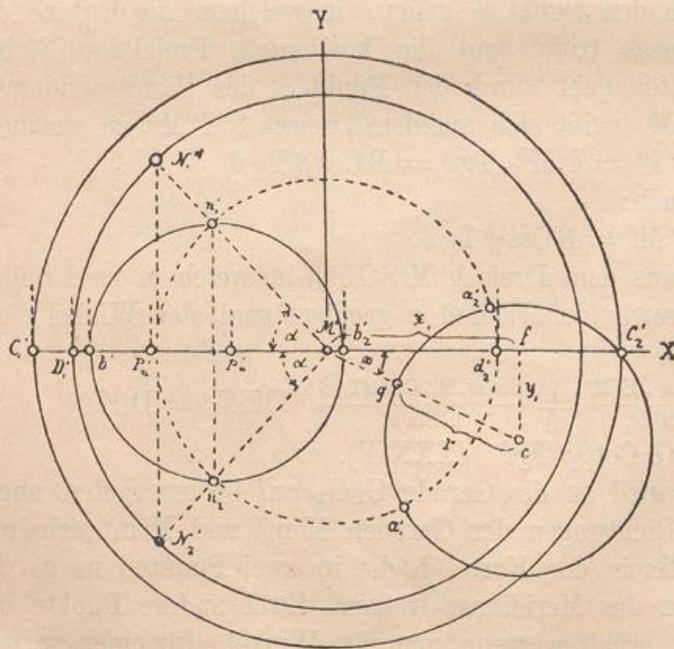
Man kann auch die Richtung der Geraden $M'N_1'$ und $M'N_2'$ durch die Winkel γ und γ_1 bestimmen, welche sie mit dem Hauptmeridiane bilden. Es ist

$$\begin{cases} \gamma = \alpha + \epsilon \\ \gamma_1 = \alpha - \epsilon \end{cases} \text{(XXXV)}$$

Ein zweites Verfahren, den Winkel ϵ zu berechnen ist folgendes:

$\epsilon = \gamma - \alpha$
und da α bekannt ist, so ist zur Bestimmung von ϵ noch γ zu berechnen. Der Winkel γ ist aber gleich dem sphärischen Winkel $N_1'' Q'' D_2''$

Fig. 23.



Bemerkung. In Fig. 22 ist statt D'' , D_1'' zu setzen; in Fig. 23 bei P_n' der Buchstabe d_1' als Endpunkt des Durchmessers $d_1'd_2'$.

(Fig. 20) dessen Werth durch die Gleichung $\gamma = 180^\circ - y$ (XXXVI) bestimmt ist.

Aus dem sphärischen Dreiecke $P_n''Q''N_1''$, in welchem $P_n''Q'' = \delta$, $Q''N_1'' = Q''D_2'' = \beta$, und Winkel λ gegeben sind, kann aber der Winkel y auf folgende Weise berechnet werden:

$$\sin x = \frac{\sin \lambda \sin \delta}{\sin \beta} \quad (\text{XXXVII})$$

und nach den Neper'schen Analogien:

$$\begin{aligned} \operatorname{Tg} \frac{1}{2}(\lambda + x) &= \frac{\cos \frac{1}{2}(\beta - \delta)}{\cos \frac{1}{2}(\beta + \delta)} \operatorname{Cotg} \frac{y}{2} \\ \operatorname{Cotg} \frac{y}{2} &= \frac{\operatorname{Tg} \frac{1}{2}(\lambda + x) \cos \frac{1}{2}(\beta + \delta)}{\cos \frac{1}{2}(\beta - \delta)} \quad (\text{XXXVIII}) \end{aligned}$$

Nachdem man mittelst dieser Gleichung y gefunden hat, berechnet man γ , ε und γ_1 .

Für einen Parallelkreis (Fig. 22 und 23) ist $B_1''B_2''$ die vertikale Projektion, und $P_n''Q'' = \delta$ sowie $P_n''B_1'' = \varrho$ gegeben. Um seine stereographische Projektion zu zeichnen, beachte man, dass sich die Ebenen D_1D_2 und B_1B_2 , welche auf der Ebene des Hauptmeridianes senkrecht stehen, in einer Geraden N_1N_2 schneiden, welche ebenfalls auf dieser Ebene senkrecht ist. Durch die Endpunkte N_1N_2 dieser Geraden geht der Parallelkreis B_1B_2 , und es muss daher das stereographische Bild des Parallelkreises durch die Endpunkte n_1n_2 ihrer Projektion gehen. n_1n_2 ist parallel mit N_1N_2 und beide stehen senkrecht auf dem Hauptmeridiane, dessen horizontale Projektion die Gerade $C_1'C_2'$ ist, auf welcher die Mittelpunkte sämtlicher Parallelkreise liegen.

Wie oben ergibt sich der Radius $M'd_2'$ des Grenzkreises der Karte:

$$M'd_2' = R \operatorname{Tg} \frac{\beta}{2} \quad (\text{XXXIII}).$$

Legt man ferner durch die Punkte N_1N_2 und den Gegenpunkt Q des Auges grösste Kreise, so schliessen diese mit dem Hauptmeridiane den Winkel $D_1''Q''N_1'' = \alpha$ ein, welchen auch die Radien $M'n_1'$ und $M'n_2'$ mit dem Hauptmeridiane bilden. Dieser Winkel ergibt sich aus dem sphärischen Dreiecke $P_n''Q''N_1''$, in welchem die drei Seiten δ , β und $P_n''N_1'' = \varrho$ gegeben sind. Es ist:

$$\cos \alpha = \frac{\cos \varrho - \cos \beta \cos \delta}{\sin \beta \sin \delta} \quad (\text{XXXIX})$$

oder nach einer zur Berechnung mit Logarithmen bequemeren Formel

$$\operatorname{Tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin \left(\frac{S}{2} - \delta\right) \sin \left(\frac{S}{2} - \beta\right)}{\sin \frac{S}{2} \sin \left(\frac{S}{2} - \varrho\right)}} \quad (\text{XL})$$

Es ist selbstverständlich, dass es nur dann nothwendig ist den Winkel α zu berechnen, wenn der Mittelpunkt der stereographischen Projektion des Parallelkreises ausserhalb des Blattes fällt. Ist dies nicht der Fall, so rechnet man nach Gleichung XVII, XVIII, XIX (Seite 37 u 38) die Werthe von e d und r , von welchen der erstere immer aufgetragen werden kann. Durch die drei Punkte n_1 b_2 n_2 ist der Parallelkreis bestimmt, will man jedoch von ihm noch mehr Punkte haben, so berechnet man für einen zweiten Kugelkreis, für welchen der Bogenhalbmesser kleiner als β ist, ebenfalls den Werth des Winkels α , wodurch sich zwei neue Punkte des Parallelkreises ergeben.

Für einen beliebigen Kugelkreis, für welchen die Grössen δ γ ϱ und ϱ (Fig. 7 Seite 18) gegeben sind, berechnet man nach den Gleichungen V, VI, VII (Seite 19) die Grössen ω und ε und nach Gleichung I, II, III (Seite 17) e d und r . Denkt man sich alsdann in Fig. 23 den Kreis construirt, so handelt es sich in dem Fall, in welchem der Mittelpunkt c des Kreises ausserhalb des Blattes fällt, darum, seine Durchschnittspunkte $a_1' a_2'$ mit dem Grenzkreise der Karte oder mit einem zu ihm concentrischen Kreise zu bestimmen, dessen Radius r' gegeben ist. Die Coordinaten des Mittelpunktes c des zu construierenden Kreises sind:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= d \cos \omega \\ y_1 &= d \sin \omega \end{aligned} \right\} \text{(XLI)} \quad \text{wenn } d = M'c \text{ die Entfernung}$$

seines Mittelpunktes vom Anfangspunkte der Coordinaten ist. Die Gleichung des Kreises in Bezug auf die Axen MX , MY lautet:

$$(y - y_1)^2 + (x - x_1)^2 = r^2 \quad (1)$$

ferner ist die Gleichung des Kreises $d_1' d_2'$:

$$y^2 + x^2 = r'^2 \quad (2)$$

Die Coordinaten m , n des Durchschnittspunktes beider Kreise ergeben sich, wenn man in Gleichung 1) und 2) an die Stelle der unbestimmten Coordinaten x und y diejenigen des Durchschnittspunktes setzt, und aus beiden Gleichungen die Werthe von n und m ermittelt.

$$\text{Es ist } (n - y_1)^2 + (m - x_1)^2 = r^2 \quad (3)$$

$$n^2 + m^2 = r'^2 \quad (4)$$

Durch Subtraktion beider Gleichungen ergibt sich

$$-2ny_1 + y_1^2 - 2mx_1 + x_1^2 = r^2 - r'^2$$

$$\text{und } n = \frac{y_1^2 + x_1^2 + r'^2 - r^2 - 2mx_1}{2y_1} \quad (5)$$

Nachdem dieser Werth gehörig reducirt ist (y_1 x_1 r' r sind durch Zahlen gegeben), wird er in Gleichung (4) eingesetzt und aus dieser

m berechnet, endlich ist m in Gleichung (5) zu substituieren, durch welche sich alsdann n ergibt. Sowohl für m als für n erhält man zwei Werthe, von welchen je zwei zusammengehörende die Coordinaten des einen Durchschnittspunktes a_1' oder a_2' sind. Will man ausser diesen noch zwei Punkte des Kreises bestimmen, so ist die Rechnung für einen zu $d_1'd_2'$ concentrischen Kreis zu wiederholen.

Berechnung der Kartennetze von Europa und Deutschland nach der stereographischen Projektionsmethode.

1) Stereographisches Kartennetz von Europa. Als Gegenpunkt Q des Auges werde derjenige angenommen, dessen geographische Länge $\lambda_1 = 40^\circ$ östlich von Ferro und dessen Breite $\varphi_1 = +52^\circ$ ist. Der 40te Meridian ist dann Hauptmeridian der Karte und die Pol-distanz des Gegenpunktes Q: $\delta = 38^\circ$.

Zunächst ist der Bogenhalbmesser β des Grenzkreises der Karte zu berechnen. Für Europa ergibt sich dieser Winkelwerth, wenn man die Entfernung des Punktes Q ($\lambda_1 = 40^\circ, \varphi_1 = 52^\circ$) von einem ausserhalb Europa liegenden Punkte z. B. R ($\lambda_2 = 90^\circ, \varphi_2 = 60^\circ$) berechnet. Denkt man sich aus dem Punkte Q mit dem Bogenhalbmesser QR einen Kreis beschrieben, so muss durch diesen Europa eingeschlossen sein. Die Entfernung zweier Punkte der Kugeloberfläche ist nach Fig. 24 durch die Gleichung bestimmt:

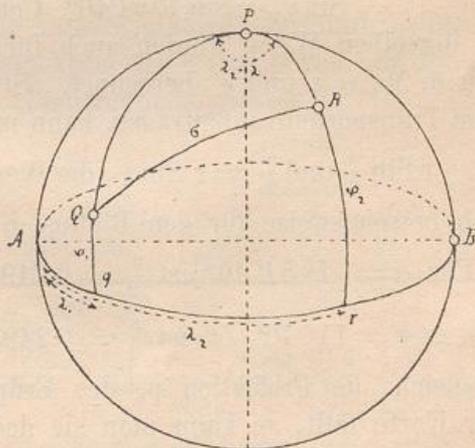


Fig. 24.

$$\begin{aligned} \cos RQ &= \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos (\lambda_2 - \lambda_1) \\ \text{oder } \cos \beta &= \sin 52^\circ \sin 60^\circ + \cos 52^\circ \cos 60^\circ \cos 50^\circ \\ \beta &= 28^\circ 19' 14'' \end{aligned}$$

Der Einfachheit wegen kann man $\beta = 28^\circ$ annehmen und erhält alsdann den Radius $d_1 M$ des Grenzkreises der Karte nach Gleichung XXXIII (Seite 51).

Bemerkung. In Fig. 24 ist σ durch β zu ersetzen.

Es ist $d_1 M = R \operatorname{Tg} \frac{\beta}{2}$ oder für $R = 1$

$$d_1 M = \operatorname{Tg} 14^\circ = 0,249\,328 \quad (\log. = \bar{1}.396\,7711)$$

Will man das Kartennetz von 10° zu 10° berechnen, so hat man um die Meridiane zu konstruieren für λ der Reihe nach folgende Werthe zu setzen:

$$\lambda = 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ.$$

Für $\lambda = 10^\circ$ ergibt sich nach Gleichung XXX (Seite 42):

$$\operatorname{Tg} \alpha = \operatorname{Cos} 38^\circ \operatorname{Tg} 10^\circ \quad \text{und} \quad \alpha = 7^\circ 54' 40''$$

ferner nach Gleichung XXXIV (Seite 51):

$$\operatorname{Sin} \varepsilon = \operatorname{Sin} 7^\circ 54' 40''. \operatorname{Cotg} 28^\circ. \operatorname{Tg} 38^\circ \quad \text{und} \quad \varepsilon = 11^\circ 40' 5''$$

Mittelst der Grössen $d_1 M$, α und ε sind zwei Meridianpunkte bestimmt, zwei weitere Punkte ergeben sich für einen zum Grenzkreise der Karte concentrischen Kreis, dessen Bogenhalbmesser β beispielsweise $= 10^\circ$ angenommen wird. Es ist dann:

$$d_1 M = \operatorname{Tg} 5^\circ = 0,0874887$$

Winkel α bleibt unverändert und ist $= 7^\circ 54' 40''$.

Ferner ist nach Gleichung XXXIV:

$$\operatorname{Sin} \varepsilon' = \operatorname{Sin} 7^\circ 54' 40''. \operatorname{Cotg} 10^\circ. \operatorname{Tg} 38^\circ \quad \text{und} \quad \varepsilon' = 37^\circ 34' 44''$$

In derselben Weise werden auch für die übrigen Meridiane die Werthe von $d_1 M$, α , ε und ε' berechnet. Statt die berechneten Winkel mit dem Transporteur aufzutragen, kann man auch mittelst der Gleichungen $\frac{s}{2} = r \operatorname{Sin} \frac{\alpha}{2}$ und $\frac{s'}{2} = r \operatorname{Sin} \frac{\varepsilon}{2}$, die Werthe ihrer Sehnen erhalten, welche sich beispielsweise für den Radius $d_1 M = r = 0,249328$ ergeben.

$$\text{Für } \alpha = 7^\circ 54' 40'' \text{ ist } \frac{s}{2} = 0,249328 \operatorname{Sin} 3^\circ 57' 20'', s = 0,034399$$

$$\text{„ } \varepsilon = 11^\circ 40' 5'' \text{ ist } \frac{s'}{2} = 0,249328 \operatorname{Sin} 5^\circ 50' 2'', s' = 0,050686$$

Obgleich die Projektion p_n des Erdpoles ausserhalb den Grenzkreis der Karte fällt, so kann man sie doch bei der Konstruktion der Meridiane verwerthen. Ihre Entfernung vom Mittelpunkte der Karte ist:

$$M p_n = R \operatorname{Tg} \frac{\delta}{2} = \operatorname{Tg} 19^\circ = 0,344328 \quad \text{wenn } R = 1 \text{ ist.}$$

ferner ergibt sich nach Gleichung XXIV (Seite 39)

$$M'g' = R \operatorname{Cotg} \delta = \operatorname{Cotg} 38^\circ = 1,27994,$$

diese Distanz ist aber schon so gross, dass sie wohl nicht mehr aufgetragen werden kann, wesshalb die Mittelpunkte der Meridiane ausserhalb des Blattes fallen.

Berechnung der Parallelkreise. Ihre Bogenhalbmesser sind der Reihe nach:

$$\varrho = 20, 30, 40, 50, 60^\circ.$$

Zur Bestimmung der Parallelkreise dienen die Grössen e, d, r und α . Für $\varrho = 20^\circ$ und $R = 1$ ergibt sich nach den Gleichungen I, II, III (Seite 17)

$$e = \operatorname{Tg} \frac{1}{2} (38^\circ - 20^\circ) = \operatorname{Tg} 9^\circ = 0,15838$$

$$d = \frac{\sin 38^\circ}{\cos 38^\circ + \cos 20^\circ} = 0,356348, \quad r = \frac{\sin 20^\circ}{\cos 38^\circ + \cos 20^\circ} = 0,197963$$

Nach Gleichung (XL) (Seite 53) ist:

$$\operatorname{Tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin \left(\frac{s}{2} - \delta\right) \sin \left(\frac{s}{2} - \beta\right)}{\sin \frac{s}{2} \sin \left(\frac{s}{2} - \varrho\right)}} = \sqrt{\frac{\sin 5^\circ \sin 15^\circ}{\sin 43^\circ \sin 23^\circ}}$$

$$\alpha = 32^\circ 26' 40''$$

Für $r = 0,249328$ (Radius des Grenzkreises) ergibt sich die Sehne dieses Winkels durch die Gleichung:

$$\frac{s}{2} = r \sin \frac{\alpha}{2} = 0,249328 \sin 16^\circ 13' 20''$$

$$s = 0,139306.$$

In analoger Weise wurden auch für die übrigen Parallelkreise e d r α und s berechnet. Für den nördlichen Polarkreis ist $\varrho = 23^\circ 27' 20''$ zu setzen. — Nachfolgende Tabelle gibt eine Zusammenstellung der Zahlenwerthe, welche zur Konstruktion des Kartennetzes von Europa nach der stereographischen Projektionsmethode dienen.

Meridiane

Radius der Erde $R = 1$, Entfernung des Poles p_n vom Centrum der Karte:
 $M_{p_n} = 0,344328.$

Winkel welchen der Meridian mit dem Hauptmeridiane bildet: λ	Bogenhalbmesser der concentrischen Kreise β	Radien der concent. Kreise auf welchen Meridianpunkte liegen	α (siehe Gleich. XXX)	Sehne von α für $r = 0,249328$	ε (siehe Gleich. XXXIV)	Sehne von ε für $r = 0,249328$
10°	28°	0,249328	7° 54' 40''	0,034399	11° 40' 5''	0,050686
10	10	0,087489	7 54 40		37 34 44	0,160631
20	28	0,249328	16 0 10	0,069412	23 53 50	0,103239
20	15	0,131653	16 0 10		53 29 54	0,224438
30	28	0,249328	24 27 50	0,105650	37 28 50	0,160208
30	20	0,176327	24 27 50		62 44 23	0,259580
40	28	0,249328	33 28 20	0,143595	54 8 10	0,226912
40	25	0,221695	33 28 20		67 31 50	0,277150

Parallelkreise

Bogenhalb- messer ϱ	e (siehe Gleich. I)	d (siehe Gleich. II)	r (siehe Gleich. III)	α (siehe Gleich. XL)	Sehne von α für $r =$ 0,249328
20°	0,15838	0,356348	0,197963	32°26'40"	0,139306
23°27'20"	0,12761	0,361011	0,233401	39 56 36	0,170319
30°	0,06993	0,372217	0,302290	53 54 40	0,226040
40	—0,01746	0,396166	0,413621	75 55 44	0,306759
50	—0,10510	0,430292	0,535396	100 33 46	0,383562
60	—0,19438	0,477994	0,672375	132 38 8	0,456662

Um in Bezug auf einen bestimmten Massstab in welchem das st. Netz resp. die Karte von Europa gezeichnet werden soll, einen Anhaltspunkt zu bekommen, wollen wir zuerst die Annahme machen, dass der Radius des mit dem Grenzkreise der Karte concentrischen Kreises, dessen Bogenhalbmesser 14° beträgt, also halb so gross ist als der Bogenhalbmesser des Grenzkreises, in der wahren Grösse erscheine. Für $R = 1$ ist der Radius der stereog. Projektion dieses Kreises $d_1 M = \text{Tg } 7^\circ = 0,122785$ und diese Distanz ist auf der Kugel $14 \cdot 15 = 210$ geog. Meilen [: 1° eines grössten Kreises der Erdkugel ist = 15 geog. Meilen, 1 geog. Meile = 7407,407 Meter :]. Um daher die in obiger Tabelle angegebenen Zahlenwerthe in geog. Meilen zu verwandeln, hat man sie bei dieser Annahme mit $\frac{210}{0,122785} = 1710,313$ zu multipliciren.

Für den Grenzkreis der Karte ist alsdann der Radius der stereog. Projektion = 426,429 Meilen, dieser entspricht seinem Bogenhalbmesser = 420 Meilen und es ergibt sich zwischen beiden ein Unterschied von 6,429 Meilen, um welchen für diesen Fall der Radius der stereographischen Projektion grösser ist als die Länge, die er auf der Kugel repräsentirt.

Diese Differenz ist als Fehler auf die dem Grenzkreise zunächst liegenden $14^\circ = 210$ Meilen zu betrachten.

Der Fehler wird geringer, wenn man die Annahme macht, dass der Radius des Grenzkreises der Karte gleich der Länge des Bogenhalbmessers dieses Kreises sein soll. Der Radius des Grenzkreises ist $r = 0,249328$ und diese Distanz ist gleich $28 \cdot 15 = 420$ geogr. Meilen zu setzen. Bei dieser Annahme sind alle in obiger Tabelle enthaltenen Längen, wofern sie in geog. Meilen verwandelt werden sollen mit $\frac{420}{0,249328} = 1684,528$ (log. = 3,2264782) zu

multipliciren. Der Radius des zum Grenzkreise der Karte concentrischen Kreises, dessen Bogenhalbmesser = 14° ist, beträgt alsdann 206,834 geog. Meilen, während der Bogenhalbmesser selbst gleich 210 geog. Meilen ist. Der Unterschied beider Dimensionen beträgt bei dieser Annahme auf eine Länge, welche gleich der obigen von 210 geog. Meilen ist, nur 3,166 geog. Meilen, und ist dieselbe der Vorhergehenden daher vorzuziehen.*) Es ist selbstverständlich, dass die Karte resp. ihr Netz nun immer noch in einem bestimmten Massstabe gezeichnet werden kann. Soll derselbe z. B. bei der Karte von Europa = $1 : 3\,000\,000$ sein, so beträgt der Radius des Grenzkreises $\frac{420 \times 7407,407}{3\,000\,000} = 1,037$ Meter, welche eine Länge von 0,249328 Einheiten repräsentiren, der Werth einer zehntels Einheit ist daher $\frac{1,037}{2,49328} = 0,4159$ Meter. Diese Länge kann nun in beliebig kleine Decimaltheile getheilt und der so erhaltene Massstab beim Auftragen der in obiger Tabelle angegebenen Zahlenwerthe benutzt werden.

Das durch obige Tabelle bestimmte Netz wurde auf Taf. I (siehe folgende Seite), in welcher gleichzeitig das Bonne'sche Netz von Europa enthalten ist, im Massstabe $1 : 40\,000\,000$ gezeichnet.

In diesem kleinen Massstabe finden in Bezug auf die Meridiane für beide Projektionen keine merklichen Abweichungen statt und haben nur die Parallelkreise, deren stereographische Bilder durch punktirte Linien eingezeichnet sind, solche aufzuweisen.

Was die Konstruktion der Meridiane betrifft, so wurde dabei auf folgende Weise verfahren: Mittelst den in Rubrik 3 (Seite 57) angegebenen Radien beschrieb man aus dem Mittelpunkte M der Karte concentrische

*) Man könnte noch beliebige andere Annahmen machen, doch liefern diese alle keine so günstigen Resultate wie die zuletzt genannte Bestimmung. Denkt man sich z. B. über dem Grenzkreise des Kugelabschnittes einen Kegel construirt, dessen Spitze im Augenpunkte liegt und dessen Basiskreis als Durchschnitt einer Ebene erhalten wird, welche mit der Ebene des Grenzkreises parallel ist und durch die Mitte der Höhe des Kugelabschnittes geht, so könnte man den Radius dieses Basiskreises, welcher = 416,022 geog. Meilen ist, gleich dem Radius der st. Projektion des Grenzkreises, = 0,249328 setzen, und würde eine andere Constante erhalten, mit welcher die stereog. Längen zu multipliciren sind. Doch auch diese scheinbar zweckmässige Annahme weist grössere Fehler auf als die oben genannte. Dasselbe gilt auch für den Fall, in welchem die Oberfläche des Kugelabschnittes auf welchem sich Europa befindet gleich der Oberfläche seiner stereog. Projektion gemacht wird. (Durch Rechnung kann man sich davon leicht überzeugen.)

Kreise und liegen auf jedem dieser Kreise je 4 Meridianpunkte. Um sie zu erhalten, wurden zunächst von dem südlichsten und nördlichsten Punkte des Hauptmeridianes, welcher mit 40° bezeichnet ist, die in Rubrik 5 enthaltenen Sehnenlängen der Winkel α nach a b c d . . . und von diesen Punkten aus sodann die in der Rubrik 7 enthaltenen Sehnenlängen der Winkel ε auf den Grenzkreis der Karte aufgetragen. Für die Punkte des Meridianes a'1'1'a' verhält es sich beispielsweise wie folgt: Es wird zuerst (40°) $a = 0,034399$ (Rubrik 5 der Tabelle) und sodann von a aus $aa' = 0,050686$ und $a1 = 0,160631$ (beide in Rubrik 7 der Tabelle) aufgetragen. Die beiden Punkte 1 verbindet man mit dem Mittelpunkte M der Karte. Diese Verbindungslinien schneiden den zum Grenzkreise concentrischen Kreis 1'2'2'1' in den Meridianpunkten 1'1' und wird durch sie und die auf dem Grenzkreise der Karte liegenden Meridianpunkte a'a' der zu zeichnende Meridian hinreichend bestimmt. Ebenso verfährt man bei den übrigen Meridianen. Das Verfahren wurde Seite 51 begründet und ergibt sich seine Richtigkeit sofort aus Betrachtung von Fig. 20 und 21. (Seite 50.)

In Bezug auf die Konstruktion der Parallelkreise ist nur zu bemerken, dass nach Fig. 23 (Seite 52) die in der letzten Rubrik der Tabelle (Seite 58) enthaltenen Sehnenlängen der Winkel α vom nördlichsten Punkte des Hauptmeridianes aus auf den Grenzkreis der Karte aufgetragen werden, wodurch sich die Endpunkte der Parallelkreise ergeben.

Stereographisches Kartennetz von Deutschland. Als Mittelpunkt der Karte nehmen wir denjenigen an, dessen Länge $\lambda = 30^\circ$ östlich v. Ferro und dessen Breite $\varphi = 50^\circ$ ist. Die Poldistanz δ dieses Punktes ist dann gleich 40° .

Der Bogenhalbmesser des Grenzkreises der Karte ergibt sich durch Berechnung des Abstandes der Punkte Q ($\lambda_1 = 30^\circ$, $\varphi_1 = 50^\circ$) und R ($\lambda_2 = 40^\circ$, $\varphi_2 = 54^\circ$)

$$\cos QR = \sin 50^\circ \sin 54^\circ + \cos 50^\circ \cos 54^\circ \cos 10^\circ$$

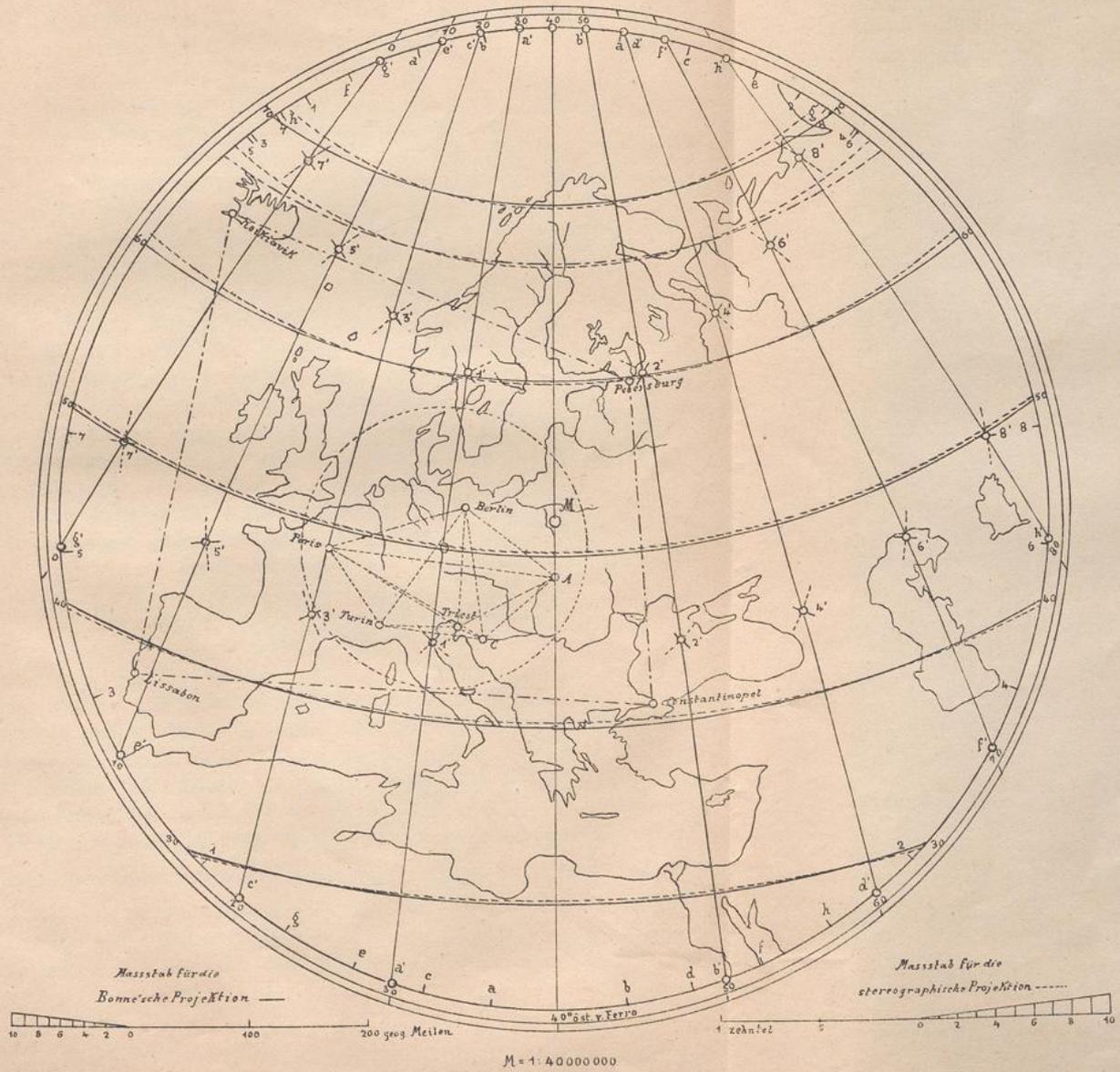
$$QR = 7^\circ 20'$$

Der Einfachheit wegen setze man $QR = \beta = 8^\circ$, dann ist für $R = 1$ der Radius des Grenzkreises der Karte $r = \operatorname{Tg} \frac{\beta}{2} = \operatorname{Tg} 4^\circ = 0,0699268$.

Um die Meridiane und Parallelkreise von zwei zu zwei Graden zu berechnen, setze man

- 1) für die Meridiane $\lambda = 2^\circ, 4^\circ, 6^\circ, 8^\circ, 10^\circ$,

Das stereographische und Bonne'sche Kartennetz von Europa.



2) für die Parallelkreise $\varrho = 36^\circ, 38^\circ, 40^\circ, 42^\circ, 44^\circ$.

Als Beispiel für die Berechnung der Meridiane wollen wir $\lambda = 2^\circ$ annehmen.

Nach Gleichung XXX ist:

$$\begin{aligned} \operatorname{Tg} \alpha &= \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Tg} \lambda = \operatorname{Cos} 40^\circ \operatorname{Tg} 2^\circ \\ \alpha &= 1^\circ 31' 56'' \end{aligned}$$

Nach Gleichung XXXIV ist:

$$\begin{aligned} \operatorname{Sin} \varepsilon &= \operatorname{Sin} 1^\circ 31' 56'' \operatorname{Cotg} 8^\circ \operatorname{Tg} 40^\circ \\ \varepsilon &= 9^\circ 11' 11'' \end{aligned}$$

Um zwei weitere Punkte des Meridianes zu bestimmen, setze man z. B. $\beta = 2^\circ 20'$ und erhält den Radius des mit dem Grenzkreise der Karte concentrischen Kreises $r = \operatorname{Tg} 1^\circ 10' = 0,020365$, ferner nach Gleichung XXXIV den Winkel ε' . Es ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Sin} \varepsilon' &= \operatorname{Sin} 1^\circ 31' 56'' \operatorname{Cotg} 2^\circ 20' \operatorname{Tg} 40^\circ \\ \varepsilon' &= 33^\circ 24' 39'' \end{aligned}$$

Für $r = 0,0699268$ (Radius des Grenzkreises) ergeben sich die Sehnen der Winkel $\alpha \varepsilon \varepsilon'$ wie folgt:

$$s = 0,00186995, s' = 0,01119922, s'' = 0,0402008.$$

In analoger Weise berechnet man auch für die übrigen Meridiane die Werthe von $\alpha \varepsilon \varepsilon' s s' s''$, welche in nachfolgender Tabelle zusammengestellt sind.

Als Beispiel für die Berechnung der Parallelkreise wollen wir denjenigen wählen, dessen Bogenhalbmesser $\varrho = 36^\circ$ ist. Für $R = 1$ ist

$$e = \operatorname{Tg} 2^\circ = 0,0349208$$

$$\operatorname{Tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(\frac{s}{2} - \delta) \operatorname{Sin}(\frac{s}{2} - \beta)}{\operatorname{Sin} \frac{s}{2} \operatorname{Sin}(\frac{s}{2} - \varrho)}} = \sqrt{\frac{\operatorname{Sin} 2^\circ \operatorname{Sin} 34^\circ}{\operatorname{Sin} 42^\circ \operatorname{Sin} 6^\circ}}$$

$$\alpha = 55^\circ 41' 18''$$

Für $r = 0,0699268$ ist die Sehne von $\alpha : s = 0,0653212$.

In gleicher Weise berechnet man auch für die übrigen Parallelkreise die Werthe von e, α und s , welche nachfolgende Tabelle enthält.

Sollen alle Längen in geog. Meilen aufgetragen werden, so setze man den Radius des Grenzkreises der Karte ($r = 0,0699268$) gleich $8 \times 15 = 120$ geog. Meilen. Alle in nachfolgender Tabelle angegebenen Dimensionen sind alsdann mit $\frac{120}{0,0699268} = 1716,08$ ($\log = 3,2345375$) zu multipliciren. Es ist übrigens einfacher den Radius $r = 120$ geog. Meilen des Grenzkreises gleich einer passenden Länge zu setzen, wodurch sich für die Karte ein bestimmter Massstab er-

gibt und alsdann analog wie oben angegeben wurde, einen Massstab zu construiren, mit welchem nachfolgende Zahlenwerthe unmittelbar aufgetragen werden können.

Stereographisches Netz von Deutschland.

Meridiane.

λ	β	Radien der concent. Kreise auf welchen Meridianpunkte liegen	α	Sehne von α für $r = 0,0699268$	ε	Sehne von ε für $r = 0,0699268$
20	8 ⁰⁰ '	0,0699268	1 ³¹ ' 56"	0,00186995	9 ¹¹ ' 11"	0,0111992
2	2 20	0,0203650	1 31 56		33 24 39	0,0402008
4	8	0,0699268	3 3 58	0,00374160	18 37 25	0,0226290
4	3 20	0,0290970	3 3 58		50 24 26	0,0595548
6	8	0,0699268	4 36 12	0,00561664	28 37 53	0,0345804
6	4 20	0,0378335	4 36 12		62 42 49	0,0727748
8	8	0,0699268	6 8 41	0,00749542	39 43 25	0,0475154
8	5 20	0,0465757	6 8 41		74 10 43	0,0843398
10	8	0,0699268	7 41 33	0,00938094	53 3 10	0,0624600
10	7	0,0553251	7 41 33		66 10 20	0,0763460

Parallelkreise.

ϱ	e	α	Sehne von α für $r = 0,0699268$
36 ⁰	0,0349208	55 ⁴¹ ' 18"	0,0653212
38	0,0174551	70 47 56	0,0810134
40	0,0000000	85 13 10	0,0946810
42	—0,0174551	100 20 4	0,1073960
44	—0,0349208	116 23 0	0,1188498

II. Abschnitt.

Die cylindrischen Projektionen.

1. Die Plattkarten.

Bei der Konstruktion von Detailkarten, welche sich über einen sehr kleinen Theil der Erdoberfläche z. B. eine kleine Provinz erstrecken, kann man folgende Projektionsmethode, die in vielen Fällen als hinreichend genau betrachtet wird, in Anwendung bringen:

Man denke sich den sehr kleinen Bogen des mittleren Parallelkreises des darzustellenden Landes identisch mit dem Bogen eines grössten Kugelkreises und lege an die Kugel eine Cylinderfläche, welche sie längs diesem Kugelkreise berührt. So weit sich das Land erstreckt, kann man annehmen, dass Cylinder und Kugelfläche zusammenfallen, und dass sämtliche Meridiane nahezu parallel sind. Man entwickelt daher die Cylinderfläche von mittleren Meridiane des Landes ausgehend in eine Ebene und erhält ein Bild des darzustellenden Landes. Diesem Gedankengange entsprechend, wird das Kartenetz auf folgende Weise gezeichnet: Man ziehe die Senkrechten AB und CD (Fig. 25), welche durch den Mittelpunkt O des Landes gehen; die Horizontale AB stellt alsdann den mittleren Parallelkreis, die Vertikale CD den mittleren Meridian des Landes dar. Vom Punkte O aus trage man ferner auf AB só viele gleiche Theile O1, 12, 23, ... O1', 1'2', 2'3' ... auf, als das Land Längengrade oder Längenminuten besitzt.

Sind die Meridiane von Grad zu Grad zu ziehen, so wird die Grösse dieser Theile durch die Gleichung:

$$r' = \frac{r'\pi}{180} = \frac{r\pi}{180} \cos \varphi \text{ berechnet, in welcher } r = \text{dem}$$

Radius der Erde, φ = geog. Breite des mittleren Parallelkreises, $r' = r \cos \varphi$ = dem Radius dieses Parallelkreises ist.

Man ziehe nun parallel mit CD die Geraden ab, cd, ef a'b', c'd', e'f', welche die Meridiane der Karte sind, und trage auf

die Vertikale CD vom Punkte O aus gleiche Theile nach oben und unten, welche gleich der Länge 1 eines Meridiangrades genommen werden

$$1 = \frac{r\pi}{180}$$

Durch die so erhaltenen Theilpunkte 4 5 6 . . . 4' 5' 6' . . . ziehe man Parallele mit AB und erhält die Parallelkreise der Karte.

Diese Projektionsmethode eignet sich besonders für ein Land, durch welches der Aequator hindurchgeht. Da dieser ein grösster Kreis der Kugel ist, so berührt die Cylinder-

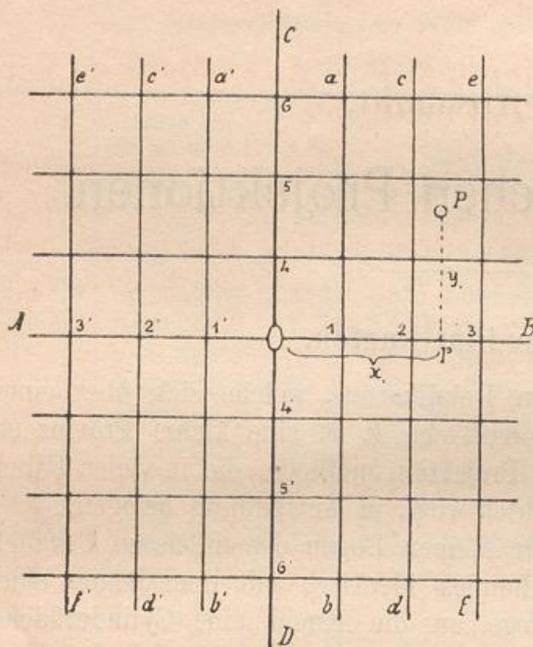


Fig. 25.

fläche die Kugelfläche in Wirklichkeit längs diesem Kreise und wird von den Meridianebenen in Geraden geschnitten, die unter sich parallel sind, also in der Entwicklung auf dem Aequator AB senkrecht stehen. Es findet in Folge dessen eine genauere Uebereinstimmung des Bildes mit dem Originale statt, als dies bei der Darstellung eines beliebigen Theiles der Erdoberfläche der Fall ist. Karten, welche nach dieser Methode construirt sind, nennt man Plattkarten.

Sind die sphärischen Coordinaten des Mittelpunktes der Karte λ und φ ($\lambda =$ der Länge, $\varphi =$ der Breite von O) diejenigen irgend eines Punktes P gleich λ_1 und φ_1 , so ergeben sich die linearen Coordinaten des Punktes P auf der Karte nach den Gleichungen:

$$x_1 = \frac{r\pi}{180 \cdot 60} (\lambda_1 - \lambda) \cos \varphi \qquad y_1 = \frac{r\pi}{180 \cdot 60} (\varphi_1 - \varphi)$$

oder für $r = 1$

$$x_1 = 0,00029089 (\lambda_1 - \lambda) \cos \varphi \qquad y_1 = 0,00029089 (\varphi_1 - \varphi)$$

In diesen Gleichungen sind die Winkel $\lambda_1 \lambda \varphi_1 \varphi$ in Minuten einzusetzen.

2. Die Mercatorprojektion und ihre Anwendung in der Schifffahrtskunde.

Will man eine Plattkarte construiren, bei welcher die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich ist, so muss sich für die Projektion $a b c d$ eines jeden unendlich kleinen Kugelrechteckes $A B C D$, welches von zwei Parallelkreisen und Meridianen begrenzt wird, die Basis zur Höhe ebenso verhalten, wie die entsprechenden Dimensionen auf der Kugel. In Fig. 26 sei $a b c d$ die Projektion eines unendlich kleinen Kugelrechteckes $A B C D$, so ist nach dem Gesagten

$$1) ab : ad = AB : AD$$

Bei der zu construiren Karte werden alle Meridiane in gleichen Entfernungen von einander angenommen, indem man als mittleren Parallelkreis der Karte den Aequator wählt und auf diesen die wahren Bogenlängen von Grad zu Grad oder von 10 Grad zu 10 Grad aufträgt, und durch die Theilpunkte vertikale Linien zieht, welche die Meridiane repräsentiren.

Die unendlich kleinen Seiten des Rechteckes $a b c d$ seien $ab = ds$ (Differential s) und $ad = d\lambda$, (Differential λ) dann ist auch (Fig. 26) $Oe = ds$ und die Seiten des (siehe Seite 63 die Gleh. für l') Kugelrechteckes sind: $AB = Oe \cos \varphi = ds \cos \varphi$

Möllinger's Kartenprojektionen.

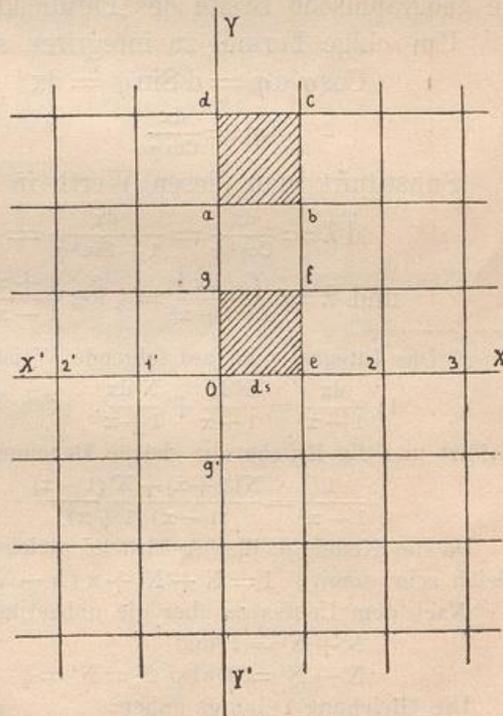


Fig. 26.

(wenn φ die Breite des Parallelkreises bezeichnet auf welchem AB liegt) und $AD = Oe = ds$. Die Proportion 1) lautet daher:

$$ds : d\lambda = ds \cos \varphi : ds$$

$$\text{Hieraus folgt: } d\lambda = \frac{ds}{\cos \varphi}$$

In dieser Gleichung ist ds der unendlich kleine Bogen des Aequators, welcher gleich demjenigen eines Meridianes d. h. gleich $d\varphi$ ist, und daher 2) $d\lambda = \frac{d\varphi}{\cos \varphi}$

Wird diese Gleichung zwischen den Grenzen $\varphi = 0$ und $\varphi = \varphi$ integrirt, so ergibt sich die Länge $\lambda = \text{Arc}(\alpha \text{ Minuten})$, (der Radius R der Erde wurde gleich 1 angenommen) welche in Fig. 26 vom Aequator resp. vom Punkte O aus nach Oa aufzutragen ist, vorausgesetzt, dass die geographische Breite des Parallelkreises ab gleich φ ist.

Um obige Formel zu integriren setze man $\sin \varphi = x$ und erhält

$$\cos \varphi d\varphi = d \sin \varphi = dx$$

$$d\varphi = \frac{dx}{\cos \varphi}$$

Substituirt man diesen Werth in Gleichung 2 so ist

$$d\lambda = \frac{dx}{\cos^2 \varphi} = \frac{dx}{1 - \sin^2 \varphi} = \frac{dx}{1 - x^2}$$

$$\text{und } \lambda = \int \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} + C^*$$

*) Das Integral wird auf folgende Weise gelöst: Es sei

1) $\frac{dx}{1-x^2} = \frac{N dx}{1-x} + \frac{N' dx}{1+x}$, oder indem man die Gleichung mit dx dividirt und die Brüche auf gleiche Benennung bringt:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{N(1+x) + N'(1-x)}{(1-x)(1+x)}$$

Da die Nenner beider Ausdrücke gleich sind, so müssen auch ihre Zähler gleich sein, somit: $1 = N + N' + x(N - N')$

Nach dem Lehrsatz über die unbestimmten Coefficienten ist aber:

$$N + N' = 1 \text{ und}$$

$$N - N' = 0 \text{ also } N = N' = \frac{1}{2}$$

Die Gleichung 1) lautet daher:

$$\frac{dx}{1-x^2} = \frac{dx}{2(1-x)} + \frac{dx}{2(1+x)} \text{ und}$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1-x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x}$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = -\frac{1}{2} \log(1-x) + \frac{1}{2} \log(1+x) + C$$

$$= \frac{1}{2} [\log(1+x) - \log(1-x)] + C$$

$$= \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} + C$$

$$\lambda = \log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C$$

Setzt man in diese Gleichung für $x = \sin \varphi$ seinen Werth, so ergibt sich:

$$\lambda = \log \sqrt{\frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}} + C \text{ oder}$$

$$\lambda = \log \sqrt{\frac{(1 + \sin \varphi)^2}{1 - \sin^2 \varphi}} + C$$

$$\lambda = \log \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} + C$$

Nun ist aber $\frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} = \text{Tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)^*$ und daher

$$\lambda = \log \text{Tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + C$$

Dieses Integral ist aber zwischen den Grenzen $\varphi = 0$ und $\varphi = \varphi$ zu nehmen, somit

$$\lambda = \log \text{Tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) - \log \text{Tg} 45^\circ$$

oder da $\log \text{Tg} 45^\circ = \log 1 = 0$ ist

$$(XLII) \lambda = \log \text{Tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)$$

Um diesen Logarithmus durch den Brigg'schen auszudrücken muss er mit dem Modul $M = \log e = 0,434294482$ dividirt werden und es ist daher:

$$(XLIIa) \lambda = \frac{1}{M} \log \text{Tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)$$

In dieser Gleichung ist aber

$$\lambda = \text{Arc } \alpha' = \alpha \text{ Arc } 1' = \alpha \text{ Sin } 1'$$

weil $\text{Arc } 1' = \text{Sin } 1'$ angenommen werden kann, und daher

$$\alpha \text{ Sin } 1' = \frac{1}{M} \log \text{Tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} *) \text{Tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) &= \frac{\text{Tg } 45^\circ + \text{Tg } \frac{\varphi}{2}}{1 - \text{Tg } 45^\circ \text{Tg } \frac{\varphi}{2}} = \frac{1 + \text{Tg } \frac{\varphi}{2}}{1 - \text{Tg } \frac{\varphi}{2}} = \frac{1 + \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}}}{1 - \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}}} \\ &= \frac{\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2}} = \frac{\left(\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \right)^2}{\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{1 + 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{\cos \varphi} = \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{1}{M \sin 1'} \log \operatorname{Tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)$$

$$\text{XLIIIb) } \alpha = 7915,7046 \dots \log \operatorname{Tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)^{*)}$$

$\log 7915,7046 = 3,8984896.$

Mittelst dieser Gleichung wurden von mir die Werthe von α , deren auf einander folgende Differenzen mit φ zunehmen, und welche daher wachsende Breiten genannt werden, von Grad zu Grad berechnet. Dieselben sind in nachfolgender Tabelle zusammengestellt.**)

Werthe der wachsenden Breiten in Minuten.

Breite φ	Wachsende Breite in Minuten α	Differenz ***)	Breite φ	Wachsende Breite in Minuten α	Differenz
90 ^o	∞	∞	63 ^o	4904,937	129,956
89	16299,557	2383,125	62	4774,981	125,756
88	13916,432	1394,325	61	4649,225	121,857
87	12522,107	989,587	60	4527,368	118,228
86	11532,520	767,898	59	4409,140	114,842
85	10764,622	627,732	58	4294,298	111,677
84	10136,890	531,070	57	4182,621	108,717
83	9605,820	460,360	56	4073,904	105,938
82	9145,460	406,396	55	3967,966	103,328
81	8739,064	363,766	54	3864,638	100,877
80	8375,298	329,591	53	3763,761	98,560
79	8045,707	301,141	52	3665,201	96,394
78	7744,566	277,361	51	3568,807	94,326
77	7467,205	257,137	50	3474,481	92,399
76	7210,068	239,729	49	3382,082	90,553
75	6970,339	224,596	48	3291,529	88,815
74	6745,743	211,319	47	3202,714	87,169
73	6534,424	199,584	46	3115,545	85,606
72	6334,840	189,139	45	3029,939	84,125
71	6145,701	179,783	44	2945,814	82,719
70	5965,918	171,361	43	2863,095	81,383
69	5794,557	163,739	42	2781,712	80,114
68	5630,818	156,813	41	2701,598	78,907
67	5474,005	150,492	40	2622,691	77,761
66	5323,513	144,703	39	2544,930	76,669
65	5178,810	139,388	38	2468,261	75,631
64	5039,422	134,485	37	2392,630	74,631

*) Aus dieser Glch. ergibt sich α als Anzahl von Minuten des Erdäquators.

***) Dieselben finden sich auch in den Werken von Mendoza und Guépratte, welche mir jedoch nicht zu Gebote standen, wahrscheinlich von Minute zu Minute angegeben.

***) Auch Länge der auf einander folgenden Breitegrade.

Breite φ	Wachsende Breite in Minuten <i>a</i>	Differenz	Breite φ	Wachsende Breite in Minuten <i>a</i>	Differenz
36°	2317,999	73,712	18	1098,217	62,913
35	2244,287	72,807	17	1035,304	62,578
34	2171,480	71,953	16	972,726	62,266
33	2099,527	71,143	15	910,460	61,974
32	2028,384	70,371	14	848,486	61,706
31	1958,013	69,638	13	786,780	61,457
30	1888,375	68,939	12	725,323	61,231
29	1819,436	68,274	11	664,092	61,022
28	1751,162	67,644	10	603,070	60,835
27	1683,518	67,045	9	542,235	60,668
26	1616,473	66,477	8	481,567	60,518
25	1549,996	65,939	7	421,049	60,389
24	1484,057	65,427	6	360,660	60,279
23	1418,630	64,945	5	300,381	60,186
22	1353,685	64,488	4	240,195	60,113
21	1289,197	64,058	3	180,082	60,058
20	1225,139	63,652	2	120,024	60,021
19	1161,487	63,270	1	60,003	60,003

Um mittelst dieser Tabelle eine Weltkarte zu construiren, ziehe man ein senkrechtcs Axensystem OX, OY (Fig. 26 Seite 65), trage auf die Gerade XX', die den Aequator darstellt, 360 gleiche Theile auf, von denen jeder 1° des Aequators repräsentirt und ziehe durch die Theilpunkte e 2 3 1' 2' 3' Parallele mit OY, welche die Meridiane der Karte sind. Theilt man alsdann einen Grad des Aequators in 60 gleiche Theile, so erhält man einen Massstab, auf welchem Minuten abgegriffen werden können. Die Parallelkreise werden nun construirt, wenn man auf die Gerade YY' vom Punkte O aus nach oben und unten die Werthe der wachsenden Breiten aufträgt, welche aus obiger Tabelle zu entnehmen und auf der Geraden OX abzugreifen sind, und durch die erhaltenen Theilpunkte Parallele mit der Xaxe zieht.

Zeichnet man in das so construirte Kartennetz die einzelnen Kontinente, Länder, Flüsse, Berge und Seen ein, so erhält man eine Karte, welche nach ihrem ersten Konstrukteur Merkator:*) eine Merkatörprojektion genannt wird.

*) Gerard Kremer genannt Mercator geb. den 5. März 1512 in Rupelmonde (Flandern) gest. den 2. Dezember 1594 in Duisburg (Rheinprovinz) war Kartenzeichner, Mathematiker, Geschichtsforscher etc.

Ein näherungsweise Verfahren zur Berechnung der Entfernungen der Parallelkreise einer Merkatorprojektion ergibt sich auf folgende Weise: Man denke sich das Netz der Karte von n zu n Minuten in der Weise construirt, dass die Rechtecke, welche dem Aequator zunächst liegen, Quadrate sind und für die übrigen Rechtecke sich die Basis zur Höhe verhält, wie die entsprechenden Dimensionen auf der Kugel. Bezeichnet man alsdann die Länge von n Bogenminuten des Aequators oder des Meridianes mit l , so ist die Länge von n Bogenminuten eines Parallelkreises, dessen Breite φ ist, gleich $l \cos \varphi$. Diese Längen sind aber die Seiten eines Kugelrechteckes, dessen südliche Seite (wofern man die nördliche Halbkugel projicirt) die Breite φ besitzt. Die entsprechenden Seiten der Merkatorprojektion des Kugelrechteckes seien λ und b , dann ist nach unserer Annahme

$$b = l \text{ und daher}$$

$$\lambda : l = 1 : \cos \varphi$$

$$\lambda = \frac{l}{\cos \varphi} = l \sec \varphi$$

Für $R = 1$ ist die Länge l von n Bogenminuten eines grössten Kreises

$$l = \frac{\pi n}{180 \cdot 60} = \frac{\pi n}{10800} \text{ und}$$

$$\lambda = \frac{\pi n}{10800 \cos \varphi}$$

Soll λ in Minuten ausgedrückt werden, so ist zu berücksichtigen dass $\lambda = \text{Arc } \alpha' = \alpha \text{ Arc } 1' = \alpha \sin 1'$ und

$$\alpha \sin 1' = \frac{\pi n}{10800 \cos \varphi}$$

$$(XLIII) \alpha' = \frac{\pi n}{10800 \sin 1' \cos \varphi} = \frac{n}{\cos \varphi}$$

Nach dieser Gleich. können die Entfernungen der Parallelkreise näherungsweise berechnet werden. Werden z. B. die Parallelkreise von Grad zu Grad gezogen, so ist $n = 60$ und es ergibt sich für die Entfernung der Parallelkreise deren Breiten $\varphi_1 = 60^\circ$ und $\varphi_2 = 61^\circ$ sind

$$\alpha' = \frac{60}{\cos 60^\circ} = 120'$$

Die richtige Entfernung ist die Grösse des 61^{ten} Meridiangrades in unserer Tabelle der wachsenden Breiten, welche gleich 121,857' ist. Es ergibt sich daher zwischen der wirklichen und der näherungsweise Entfernung der beiden Parallelkreise eine Differenz von 1,857'.

Die Merkatorprojektion, nach welcher die ganze Erdoberfläche auf einem Blatte dargestellt werden kann, wird vielfach dann angewandt, wenn eine richtige Darstellung der Umrissse der Continente und Länder

der Karte darstellen, ferner trage man auf die Gerade BD die Unterschiede der wachsenden Breiten auf, die sich aus der Tabelle (Seite 68) für die Breiten von 36° bis 70° ergeben und ziehe durch die so erhaltenen Theilpunkte Parallele mit AB, welches die Parallelkreise der Karte sind.

Da die Geraden AB und BD bei der Lösung der sich auf den Curs eines Schiffes beziehenden Aufgaben als Massstäbe benutzt werden, so ist es zweckmässig dieselben von Minute zu Minute, oder wofern die Theilung zu klein wird, von 10 Minuten zu 10 Minuten einzutheilen.

Graphische Lösung der auf den Curs eines Schiffes sich beziehenden Aufgaben.

Von allen Curven, welche zwei Punkte A und B der Erdoberfläche (siehe Fig. 28) verbinden, ist der Bogen eines grössten Kreises, welcher durch diese Punkte geht, ihre kürzeste Entfernung, und wäre dieser somit der von einem Schiffe zu befolgende Weg. Ein grösster Kreis der Kugel schneidet aber,

wofern er nicht mit dem Aequator identisch ist, jeden Kugelmeridian unter einem anderen Winkel, und ein Schiff, welches als Bahn den Bogen eines grössten Kreises befolgen würde, müsste seine Wegrichtung stetig ändern. Den Seefahrern dient jedoch die Bussole, welche ihnen jederzeit den Winkel gibt, den der magnetische Meridian eines Ortes mit der Längsaxe des Schiffes bildet, als Wegweiser, und das Schiff wird so gelenkt, dass seine Wegrichtung mit dem wahren

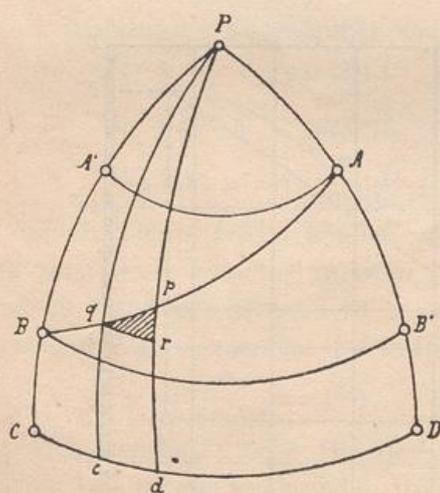


Fig. 28.

Meridiane eines jeden Ortes denselben Winkel einschliesst. Man nennt diesen Winkel, welcher also während einer bestimmten oft längeren Zeit constant bleibt, den Azimutalwinkel. Die von einem Schiffe

nach diesem Gesetze beschriebene Curve wird Loxodromie oder schief laufende Linie genannt, und ist eine Curve von doppelter Krümmung. Da sie mit allen Meridianen denselben Winkel bildet, so stellt sie sich auf einer Karte, welche nach Mercatorsprojektion construirt ist (siehe Fig. 27) als gerade Linie dar.

Betrachten wir ein sphärisches Dreieck PAB (Fig. 28), welches durch den Bogen der Loxodromie und durch die Meridianbogen PA und PB zweier Orte begrenzt wird, so sind in diesem folgende Elemente zu unterscheiden:

1) Der Unterschied $P = l_1 - l_2$ der Längen der Orte A und B, oder der in der Länge durchlaufene Weg. (Der Ort A sei der Punkt der Abreise, der Ort B derjenige der Ankunft.)

2) Der Unterschied $\varphi_1 - \varphi_2$ der Breiten beider Orte, oder der in der Breite durchlaufene Weg.

3) Die Länge $a = AB$ der Loxodromie, welche in Meilen oder Minuten ausgedrückt wird.

4) Das constante Azimuth ζ , oder der Winkel, welchen die Loxodromie mit sämmtlichen Meridianen bildet.

Sind von diesen vier Elementen zwei gegeben, so können die beiden anderen berechnet oder construirt werden, und es sind daher im Ganzen sechs Aufgaben zu lösen, welche sich auf den Curs eines Schiffes beziehen.

In Fig. 28 sei AB die Loxodromie, CD der Aequator, P der Pol und $pq = \alpha$ ein unendlich kleiner Bogen der Loxodromie; um alsdann zu untersuchen, welchen Weg ein Schiff, das die loxodromische Linie befolgt, sowohl in der Länge als in der Breite durchläuft, betrachte man das unendlich kleine Dreieck pqr, in welchem der Winkel $qpr = \zeta$ gleich dem constanten Azimuthe ist. Aus demselben ergibt sich:

$$\begin{aligned} 1) \quad pr &= qp \cdot \cos \zeta = \alpha \cos \zeta \\ 2) \quad qr &= pr \operatorname{Tg} \zeta. \end{aligned}$$

Addirt man sämmtliche unendlich kleine Bogen pr, so erhält man den in der Breite durchlaufenen Weg:

$$AB' = \varphi_1 - \varphi_2$$

und es ist

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \Sigma (\alpha \cos \zeta)$$

oder da $\cos \zeta$ eine Constante ist

$$(XLIV) \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \cos \zeta \Sigma (\alpha) = \cos \zeta \cdot AB = a \cos \zeta$$

Denkt man sich die Meridianbogen Pp und Pq bis zum Aequator

verlängert, so ergibt sich auf diesem das Bogenelement cd , und die Summe aller dieser Bogenelemente ist der in der Länge durchlaufene Weg CD .

Ist φ die geog. Breite des Parallelkreisbogens qr , so ist:

$$qr = cd \cos \varphi.$$

Substituirt man diesen Werth in Gleichung 2) so ergibt sich:

$$cd \cos \varphi = pr \operatorname{Tg} \zeta$$

$$cd = \frac{pr}{\cos \varphi} \operatorname{Tg} \zeta$$

Summirt man alle diese Werthe von cd , so erhält man den in der Länge durchlaufenen Weg:

$$P = l_1 - l_2 = \operatorname{Tg} \zeta \int \frac{pr}{\cos \varphi} = \operatorname{Tg} \zeta \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi}$$

wenn man den unendlich kleinen Bogen pr des Meridianes mit $d\varphi$ bezeichnet. Wie oben gefunden wurde ist aber

$$\int \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \frac{1}{M} \log \operatorname{Tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + C \text{ (siehe Seite 66 u. 67)}$$

welchen Werth wir gleich λ gesetzt haben und daher

$$(XLV) \quad P = l_1 - l_2 = \lambda \operatorname{Tg} \zeta.$$

Das Integral ist zwischen den Grenzen $\varphi = \varphi_1$ und $\varphi = \varphi_2$ zu nehmen, für $\varphi = \varphi_1$, sei sein Werth $= \lambda_1$, für $\varphi = \varphi_2$ gleich λ_2 , dann ist:

$$(XLV a) \quad P = (\lambda_1 - \lambda_2) \operatorname{Tg} \zeta.$$

Da in Gleichung XLV der Coefficient von $\operatorname{Tg} \zeta$ identisch ist mit den bei der Merkatorprojektion erhaltenen Zahlenwerthen der wachsenden Breiten, so können die Werthe von λ_1 und λ_2 aus der Tabelle (Seite 68) entnommen werden, und da dieselben in Minuten angegeben sind, so wird dadurch nach Gleich. XLVa auch P in Minuten erhalten.

Hierauf beruht ferner die wichtige Anwendung einer Karte, welche nach Merkatorsprojektion construirt ist, zur graphischen Lösung der auf den Curs eines Schiffes sich beziehenden Aufgaben.

Aufgabe 1. In Fig. 27, Seite 76 sei P der Ort der Abreise, Q der Ort der Ankunft eines Schiffes, welches in der Richtung PQ , die mit dem Meridiane des Ortes P einen Winkel ζ bildet, einen bestimmten Weg a zurücklegt. Welches ist die Länge l_1 und die Breite φ_1 des Punktes Q , wenn die Länge l und die Breite φ des Punktes P der Abreise gegeben sind?

Auflösung. Nachdem man auf der Karte den Punkt P der Abreise markirt hat, zieht man die Gerade PQ , welche mit dem Meridiane den Winkel ζ einschliesst. Da eine Seemeile der Länge

einer Bogenminute des Aequators gleich ist, so greife man auf der Geraden AB (Fig. S. 71) so viele Minuten ab, als a Seemeilen enthält, und trage diese Strecke nach Pq. Durch den Punkt q ziehe man eine Parallele qr mit AB und erhält den in der Breite durchlaufenen Weg

$$Pr = a \cos \zeta \text{ (siehe Glch. XLIV),}$$

welcher auf AB in Minuten abgegriffen werden kann.

Zieht man ferner durch den Punkt P die Parallele PP' und zählt auf dem Massstabe DB vom Punkte P' ebenso viele Minuten ab, als die Gerade Pr enthält, so ist diese Länge P'R', welche nach PR getragen wird, die graphische Darstellung des in der Breite durchlaufenen Weges. Durch R wird nun RQ parallel mit AB gezogen und auf der Geraden Pq der Ort Q der Ankunft erhalten. RQ ist der in der Länge durchlaufene Weg, denn

$$RQ = PR \operatorname{Tg} \zeta = (\lambda - \lambda_1) \operatorname{Tg} \zeta \text{ (siehe Glch. XLVa).}$$

Aufgabe 2. Es sei das Azimuth ζ und die Differenz $(\varphi - \varphi_1)$ der Breiten beider Orte gegeben, man soll den vom Schiffe durchlaufenen Weg a und die Differenz $\lambda_1 - \lambda$ der Längen erhalten, wodurch der Punkt Q auf der Karte bestimmt ist.

Auflösung. (Fig. S. 71). Da der Punkt P der Abfahrt gegeben ist, so ziehe man durch P eine Gerade Pq, welche mit dem Meridiane des Ortes P den Winkel ζ bildet; greife alsdann auf dem Massstabe AB die Länge $\varphi - \varphi_1$ in Minuten ab und trage sie nach Pr. Durch r ziehe man mit AB die Parallele rq, wodurch der Punkt q und damit der durchlaufene Weg $Pq = a$ erhalten wird, welcher auf AB abzugreifen ist. Im Uebrigen wird nun wie bei der vorhergehenden Aufgabe verfahren und dadurch der Punkt Q der Ankunft erhalten.

Aufgabe 3. Man kennt den Unterschied $\varphi - \varphi_1$ der Breiten beider Orte, ferner den durchlaufenen Weg a , man soll die Wegrichtung, d. h. den Winkel ζ und den Unterschied der Längen $(\lambda_1 - \lambda)$ beider Orte finden.

Auflösung. (Fig. S. 71). Man trage vom Punkte P aus mittelst des Massstabes AB die Minutenzahl $(\varphi - \varphi_1)$ nach Pr, ziehe rq parallel mit AB und greife auf AB so viele Minuten ab, als die Weglänge a Meilen enthält. Mit dieser Zirkelöffnung beschreibe man aus P einen Kreis, welcher den Parallelkreis rq in q schneidet. Dadurch wird die Wegrichtung PQ und der Winkel ζ erhalten und der Punkt Q der Ankunft wird bestimmt wie oben.

Aufgabe 4. Man kennt die Längen und Breiten beider Orte,

6. Aufgabe. Der Unterschied der Längen $l_1 - l$ und die Weglänge a sei gegeben, man soll ζ und $(\varphi - \varphi_1)$ den Unterschied der Breiten construiren.

Auflösung. Diese Aufgabe kann nur näherungsweise gelöst werden. Nachdem man die Meridiane PR und ST der Orte gezogen hat, wird auf dem Massstabe BD die Länge PQ abgegriffen und mit dieser Zirkelöffnung aus P, welcher als Punkt der Abreise gegeben ist, ein Kreis beschrieben, der den Meridian ST in Q schneidet. Diese Länge ist jedoch nur die näherungsweise Länge von PQ. Man ziehe nun durch Q die Gerade QR parallel mit AB und greife auf dem Massstabe AB, so viele Minuten ab, als die Gerade PR = P'R' enthält, diese Minutenzahl wird nach Pr getragen und rq parallel mit AB gezogen, es ergibt sich dadurch die Länge Pq = a des durchlaufenen Weges, welche gleich der gegebenen Weglänge sein muss. Stimmt die durch Konstruktion erhaltene Weglänge mit der gegebenen überein, so ist die Konstruktion richtig, im anderen Falle muss sie noch einmal wiederholt werden, wobei man je nach dem erhaltenen Werthe von a die Distanz PQ grösser oder kleiner anzunehmen hat.

Berücksichtigung der Abplattung der Erde bei der Konstruktion einer Karte nach Mercatorsprojektion.

Beim Entwurfe einer Karte nach Mercatorsprojektion kann auch die Abplattung der Erde berücksichtigt werden. Es sei in Fig. 29 (folgende Seite) $P_n A P_n$ der Ellipsenbogen, durch dessen Umdrehung um die Axe OY ein Rotationsellipsoid entsteht, welches die Gestalt der Erde besitzt. (Der Unterschied der Ellipsenaxen, welcher bei der Erde sehr klein ist, wurde der Deutlichkeit wegen in Fig. 29 etwas gross angenommen.) P_n sei der Nordpol der Erde, C ein beliebiger Punkt der Ellipse, dessen Coordinaten $x_1 y_1$ sind, ferner sei CT eine Tangente an die Ellipse, welche gleichzeitig den Horizont des Ortes C darstellt. Zieht man im Punkte C eine Normale auf die Tangente, so ist der Winkel $CNM = \varphi$ die geog. Breite des Ortes C, denn er ist gleich dem Winkel EDY, welcher die Polhöhe des Ortes C ist. Aus dem Dreiecke ODT ergibt sich

$$\begin{aligned} \varphi + \beta &= 90^\circ \\ \varphi &= 90^\circ - \beta. \end{aligned}$$

Wie bekannt ist die Gleichung der Ellipsentangente:

$$y - y_1 = - \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} (x - x_1) \text{ und in dieser Gleichung}$$

$$\text{Tg } \alpha = - \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} \text{ oder da}$$

$$\text{Tg } \alpha = - \text{Tg } \beta = - \text{Cotg } \varphi \text{ so ist}$$

$$\text{Cotg } \varphi = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} \text{ und } \text{Tg } \varphi = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}$$

$$\text{somit } a^2 y_1 = b^2 x_1 \text{ Tg } \varphi$$

$$\text{und } a y_1 = \frac{b^2}{a} x_1 \text{ Tg } \varphi.$$

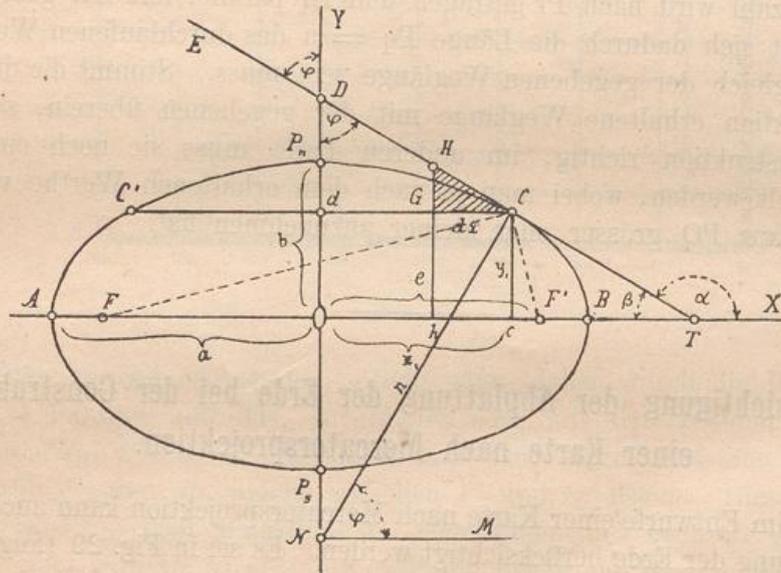


Fig. 29.

Setzt man diesen Werth in die Gleichung der Ellipse, so ergibt sich:

$$\left(\frac{b^2 x_1 \text{Tg } \varphi}{a} \right)^2 + b^2 x_1^2 = a^2 b^2 \text{ oder}$$

$$b^4 x_1^2 \text{Tg}^2 \varphi + a^2 b^2 x_1^2 = a^4 b^2$$

$$x_1^2 (b^2 \text{Tg}^2 \varphi + a^2) = a^4.$$

$$1) x_1 = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 \text{Tg}^2 \varphi}}$$

In dieser Gleichung ist die Abszisse x_1 des Punktes C, welche gleich dem Radius Cd des Parallelkreises CC' ist, durch die Breite φ dieses Parallelkreises ausgedrückt. Man kann nun noch in diese

Gleichung das Verhältniss ε der Excentricität OF' zur halben grossen Axe a einführen. Es ist:

$$\varepsilon = \frac{OF'}{OB} = \frac{e}{a}$$

$$\varepsilon^2 = \frac{e^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

$$2) \frac{b^2}{a^2} = 1 - \varepsilon^2$$

Schreibt man im Radikand der Gleichung 1) a^2 als Faktor heraus, so ergibt sich:

$$x_1 = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \operatorname{Tg}^2 \varphi\right)}} = \frac{a}{\sqrt{1 + (1 - \varepsilon^2) \operatorname{Tg}^2 \varphi}}$$

$$x_1 = \frac{a}{\sqrt{1 + (1 - \varepsilon^2) \frac{\operatorname{Sin}^2 \varphi}{\operatorname{Cos}^2 \varphi}}} = \frac{a \operatorname{Cos} \varphi}{\sqrt{\operatorname{Cos}^2 \varphi + \operatorname{Sin}^2 \varphi - \varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2 \varphi}}$$

$$3) x_1 = \frac{a \operatorname{Cos} \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2 \varphi}}$$

Betrachtet man in dieser Gleichung φ als variabel, so ist auch x_1 variabel und die Gleichung kann differenzirt werden:

$$dx = a \cdot d \left(\frac{\operatorname{Cos} \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2 \varphi}} \right)$$

$$dx = \frac{a}{1 - \varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2 \varphi} \left(d \operatorname{Cos} \varphi \sqrt{1 - \varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2 \varphi} - d \sqrt{1 - \varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2 \varphi} \operatorname{Cos} \varphi \right)$$

$$dx = \frac{a}{1 - \varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2 \varphi} \left(- \operatorname{Sin} \varphi d \varphi \sqrt{1 - \varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2 \varphi} + \frac{\varepsilon^2 \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Cos}^2 \varphi d \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2 \varphi}} \right)$$

$$dx = \frac{a d \varphi}{(1 - \varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \left(- \operatorname{Sin} \varphi (1 - \varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2 \varphi) + \varepsilon^2 \operatorname{Sin} \varphi (1 - \operatorname{Sin}^2 \varphi) \right)$$

$$dx = \frac{a d \varphi}{(1 - \varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \left(- \operatorname{Sin} \varphi + \varepsilon^2 \operatorname{Sin}^3 \varphi + \varepsilon^2 \operatorname{Sin} \varphi - \varepsilon^2 \operatorname{Sin}^3 \varphi \right)$$

$$4) dx = \frac{a (1 - \varepsilon^2) \operatorname{Sin} \varphi d \varphi}{(1 - \varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

Soll nun die Oberfläche des Erdellipsoides nach der Mercatorprojektion auf einer Ebene abgebildet werden, so dass die Abbildung mit dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich ist, so müssen analog wie bei der Projektion der Kugel die Seiten zweier unendlich kleiner Rechtecke des Ellipsoides und seiner Abbildung in Proportion stehen. Ist daher $d\alpha$ der unendlich kleine Bogen des Aequators, ds derjenige eines Ellipsenmeridianes, so sind die unendlich kleinen Rechteckseiten, welche von zwei unendlich nahe aneinanderliegenden Meridianen und Parallelkreisen des Ellipsoides begrenzt werden: $d\alpha \operatorname{Cos} \varphi$ und ds , wobei das Ellipsoidenrechteck um die Breite φ vom Aequator

entfernt ist. Ferner sind die entsprechenden Seiten der Abbildung des Rechteckes bei der Mercatorprojektion gleich $d\alpha$ und $d\lambda$, wobei $d\lambda$ das Differential der wachsenden Breiten und $d\alpha$ das Differential des Aequatorbogens bezeichnet, und es besteht die Proportion

$$ds : d\alpha \cos \varphi = d\lambda : d\alpha$$

$$d\lambda = \frac{d\alpha}{\cos \varphi} ds$$

Die Bogen $d\alpha$ und $d\alpha \cos \varphi$ entsprechen aber denselben Centriwinkeln und verhalten sich daher wie die Radien der Kreise, zu welchen sie gehören, d. h. wie der Radius a des Aequators zum Radius x_1 des Parallelkreises, es ist daher:

$$5) d\lambda = \frac{a}{x_1} ds$$

Aus dem unendlich kleinen Dreiecke CHG (Fig. 29), in welchem die Tangente CH mit dem Bogenelemente ds zusammenfällt und Winkel CHG = φ = der Breite des Parallelkreises CC' ist, ergibt sich aber der Werth von CH oder

$ds = \frac{dx}{\sin \text{CHG}} = \frac{dx}{\sin \varphi}$ oder wenn man in diese Gleichung für dx den gefundenen Werth setzt, (siehe Glch. 4) ohne jedoch das — Zeichen zu berücksichtigen:

$$ds = \frac{a(1 - \varepsilon^2) d\varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

Setzt man diesen Werth, sowie den Werth von x_1 (siehe Glch. 3) in Glch. 5 so ergibt sich:

$$d\lambda = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}}{a \cos \varphi} \cdot \frac{a^2(1 - \varepsilon^2) d\varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

$$d\lambda = \frac{a(1 - \varepsilon^2) d\varphi}{\cos \varphi (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)}$$

Um diese Gleichung integrieren zu können, zerlege man sie in zwei Summanden. Multiplicirt man ε^2 mit $1 = \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi$ so erhält man:

$$d\lambda = \frac{a d\varphi}{\cos \varphi} \left(\frac{1 - \varepsilon^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)}{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi} \right)$$

$$d\lambda = \frac{a d\varphi}{\cos \varphi} \left(1 - \frac{\varepsilon^2 \cos^2 \varphi}{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi} \right)$$

$$d\lambda = a \left[\frac{d\varphi}{\cos \varphi} - \varepsilon \cdot \frac{\varepsilon \cos \varphi d\varphi}{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi} \right]$$

$$d\lambda = a \left[\frac{d\varphi}{\cos \varphi} - \varepsilon \cdot \frac{d(\varepsilon \sin \varphi)}{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi} \right]$$

Integrirt man diesen Ausdruck, so ergibt sich

$$\lambda = a \left[\int \frac{d\varphi}{\cos \varphi} - \varepsilon \int \frac{d(\varepsilon \sin \varphi)}{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi} \right]$$

Wie oben gefunden wurde (siehe Seite 66 u. 67) ist aber

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \frac{1}{M} \log \operatorname{Tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)$$

ferner kann $\int \frac{d(\varepsilon \sin \varphi)}{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi} = \int \frac{dx}{1 - x^2}$ gesetzt werden, welches wie oben abgeleitet wurde $= \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} + C$ ist (siehe S. 66) und daher

$$\int \frac{d(\varepsilon \sin \varphi)}{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi} = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \varepsilon \sin \varphi}{1 - \varepsilon \sin \varphi} + C \text{ und}$$

$$\lambda = a \left[\frac{1}{M} \log \operatorname{Tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{\varepsilon}{2} \log \frac{1 + \varepsilon \sin \varphi}{1 - \varepsilon \sin \varphi} \right] + C$$

Das Integral ist von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \varphi$ zu nehmen, für $\varphi = 0$ wird aber $\lambda = 0$, wesshalb die Constante wegfällt.

Entwickelt man das letzte Glied der Gleichung nach der logarithmischen Reihe:

$$\log \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \right)$$

so ergibt sich, da $x = \varepsilon \sin \varphi$ ist:

$$\begin{aligned} -\frac{\varepsilon}{2} \log \frac{1 + \varepsilon \sin \varphi}{1 - \varepsilon \sin \varphi} &= -\varepsilon \left(\varepsilon \sin \varphi + \frac{\varepsilon^3 \sin^3 \varphi}{3} + \frac{\varepsilon^5 \sin^5 \varphi}{5} + \dots \right) \\ &= -\varepsilon^2 \sin \varphi - \frac{1}{3} \varepsilon^4 \sin^3 \varphi - \frac{1}{5} \varepsilon^6 \sin^5 \varphi - \dots \end{aligned}$$

$$\text{und daher (XLVI) } \lambda = a \left[\frac{1}{M} \log \operatorname{Tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) - \varepsilon^2 \sin \varphi - \frac{1}{3} \varepsilon^4 \sin^3 \varphi - \frac{1}{5} \varepsilon^6 \sin^5 \varphi - \dots \right]$$

Betrachtet man diese Länge, welche, da der Radius a des Aequators gewöhnlich in Toisen gegeben ist, ebenfalls in Toisen erhalten wird, als Bogen des Aequators, so entspricht diesem Bogen ein Centriwinkel von α Minuten, dessen Werth auf folgende Weise erhalten wird:

$$\lambda : \operatorname{Arc} \alpha' = a : 1 \text{ und } \operatorname{Arc} \alpha' = \frac{\lambda}{a} \text{ oder da } \operatorname{Arc} \alpha' = \alpha \operatorname{Arc} 1' = \alpha \sin 1'$$

$$\alpha \sin 1' = \frac{\lambda}{a} \text{ und } \alpha = \frac{\lambda}{a \sin 1'}$$

Dividirt man daher Gleich. (XLVI) mit $a \sin 1'$ so ergibt sich α :

$$\alpha = \frac{1}{M \sin 1'} \log \operatorname{Tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{\varepsilon^2}{\sin 1'} \sin \varphi - \frac{\varepsilon^4}{3 \sin 1'} \sin^3 \varphi - \frac{\varepsilon^6}{5 \sin 1'} \sin^5 \varphi - \dots$$

Das erste Glied dieses Ausdruckes ist unabhängig von ε und bleibt unverändert, wenn man die Abplattung der Erde vernachlässigt, die anderen Glieder sind daher die relative Correktion dieser Grösse. Nach Bessel ist $\log \varepsilon = \bar{2},9122052$ und es ergibt sich als Endresultat zur Berechnung der wachsenden Breiten die Gleichung:

$$\text{(XLVIa) } \alpha = 7915,704674 \log \operatorname{Tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) - 22,9448 \sin \varphi - 0,051 \sin^3 \varphi - \dots$$

(α ist gleich einer bestimmten Minutenzahl des Erdäquators)

Dies ist die Formel von Delambre zur Berechnung der wachsenden Breiten, wenn das Erdellipsoid nach der Mercatorprojektion dargestellt werden soll, gewöhnlich wird jedoch auf die Abplattung der Erde keine Rücksicht genommen, und sind die in obiger Tabelle (Seite 68) enthaltenen Werthe der wachsenden Breiten hinreichend genau.

Zum Schlusse sei noch erwähnt, dass die Mercatorprojektion, welche wie wir gesehen haben für die Schifffahrt eine so grosse Bedeutung hat, zuerst von Gerard Kremer genannt Mercator in Anwendung gebracht wurde, indem er im Jahre 1569 eine grosse Seekarte nach dieser seiner Projection anfertigte, wodurch er sich in der Kartographie und Schifffahrtskunde einen unsterblichen Namen gesichert hat.

[Faint, illegible text, likely bleed-through from the reverse side of the page.]

III. Abschnitt.

Die Kegelprojektionen.

Die gewöhnliche Kegelprojektion.

Beim Entwurfe von Karten einzelner Länder, wie sie in unseren Atlanten vorkommen, bei welchen der kleine Massstab, in dem sie gezeichnet sind, eine grosse Genauigkeit nicht erfordert, wendet man gewöhnlich die im Folgenden beschriebene Kegelprojektion an:

Man denkt sich an die Kugel eine Kegelfläche gelegt, welche sie längs dem mittleren Parallelkreise des darzustellenden Landes berührt, und entwickelt diese Kegelfläche, vom mittleren Meridiane der Karte aus, in eine Ebene. In Fig. 30 sei AB der Aequator, GH der mittlere Parallelkreis des Landes, SGH die Kegelfläche, welche die Kugel längs des Parallelkreises GH berührt. Soll diese Kegelfläche in eine Ebene entwickelt werden, so ist vor Allem die Länge GS der Kegelkante zu berechnen.

Ist φ die Breite des Parallelkreises GH, R der Erdradius, so ergibt sich aus $\triangle SGM$ in welchem $\sphericalangle GSM = \varphi$ ist.

$$SG = R \operatorname{Cotg} \varphi$$

Diese Länge wird in der Entwicklung (Fig. 31) nach gs getragen und mit dem Radius s g aus s ein Kreis beschrieben, welcher

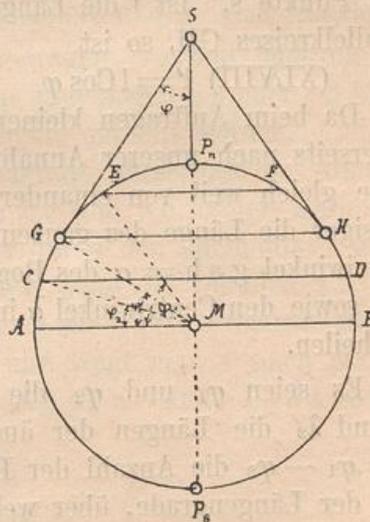


Fig. 30.

den mittleren Parallelkreis der Karte darstellt. Soll das Kartennetz von Grad zu Grad gezeichnet werden, so trage man die Länge eines Meridiangrades:

$$(XLVII) l = \frac{R\pi}{180}$$

auf die Gerade sg vom Punkte g aus so oft nach oben und unten auf, als der Unterschied der Breiten ($\varphi_1 - \varphi_2$) der äusseren Parallelkreise der Karte Grade enthält und beschreibe aus dem Punkte s Kreise, welche durch die erhaltenen Theilpunkte gehen und die Parallelkreise der Karte darstellen. Um die Meridiane der Karte zu construiren, als welche die Kanten des Kegels betrachtet werden, trage man auf den mittleren Parallelkreis gh vom Punkte

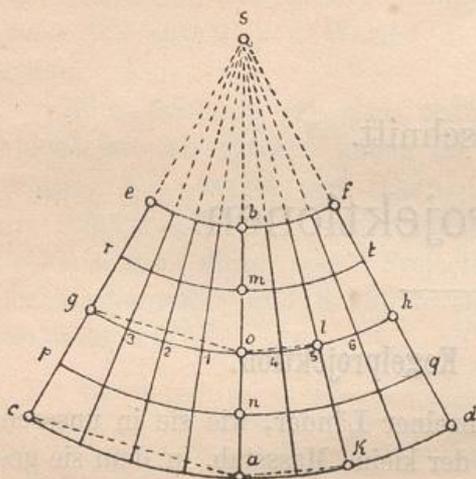


Fig. 31.

g aus, die Länge l' des Parallelkreisgrades so oft auf, als die Karte Längengrade besitzt und verbinde die Theilpunkte 123... 456... mit dem Punkte s . Ist l die Länge des Aequatorgrades, φ die Breite des Parallelkreises GH , so ist

$$(XLVIII) l' = l \cos \varphi$$

Da beim Auftragen kleiner Linien Fehler unvermeidlich sind, und anderseits nach unserer Annahme sowohl die Parallelkreise als Meridiane gleich weit von einander entfernt sein sollen, so ist es zweckmässiger die Länge des ganzen Meridianbogens $a b$ (Fig. 31) und den Centriwinkel $g s h = \alpha$ des Bogens $g h$ zu berechnen, und den Bogen $a b$, sowie den Centriwinkel α in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Es seien φ_1 und φ_2 die Breiten der äussersten Parallelkreise, λ_1 und λ_2 die Längen der äussersten Meridiane der Karte, ferner $m = \varphi_1 - \varphi_2$ die Anzahl der Breitengrade und $n = \lambda_1 - \lambda_2$ die Anzahl der Längengrade, über welche sich die Karte erstreckt, dann ist

$$(XLIX) \text{Bogen } a b = \frac{R\pi m}{180^\circ}$$

Die eine Hälfte dieses Bogens wird nach $o b$, die andere nach $o a$ getragen und die Strecke $a b$ in m gleiche Theile getheilt.

Um die Grösse des Centriwinkels $gsh = \alpha$ des Kreissectors zu berechnen, erinnere man sich dass die Projektion gh des mittleren Parallelkreises mit dem Parallelkreisbogen gleiche Länge erhalten soll. Dieser Bogen besitzt aber n Grade und da die Breite des Parallelkreises φ ist, so ergibt sich die Länge des Parallelkreisbogens nach der Gleichung:

$$b = \frac{R\pi n}{180} \cos \varphi,$$

welche gleich der Länge des Bogens gh zu setzen ist, somit:

$$1) \text{ Bg. } gh = \frac{R\pi n}{180} \cos \varphi$$

Anderseits findet die Proportion statt:

$$\text{Bg. } gh : sg \cdot \pi = \alpha : 180^\circ$$

und da $sg = R \cotg \varphi$

$$2) \text{ Bg. } gh = \frac{R \cotg \varphi \pi \alpha}{180^\circ}$$

Setzt man die Werthe 1) und 2) einander gleich, so ist:

$$\frac{R\pi n}{180} \cos \varphi = \frac{R \cotg \varphi \pi \alpha}{180} \text{ oder}$$

$$n \cos \varphi = \alpha \cotg \varphi$$

und (L) $\alpha = \frac{n \cos \varphi}{\cotg \varphi} = n \sin \varphi$

Wird nach dieser Gleichung α berechnet, und $\frac{\alpha}{2}$ vom mittleren Meridiane aus nach ase und asd getragen, so sind dadurch die äussersten Meridiane der Karte bestimmt und Bogen gh oder cd kann in eine entsprechende Anzahl gleiche Theile getheilt werden.

Fällt der Mittelpunkt s der Parallelkreise ausserhalb des Blattes (siehe Fig. 31) und sind die Richtungen ce und ab zweier Meridiane gegeben, so kann der Meridian, welcher durch den Theilpunkt k geht, auf folgende Weise erhalten werden: Man ziehe die Geraden ac , og und ak und konstruirt zu diesen 3 Linien die vierte Proportionale x . Zieht man alsdann ol parallel mit ak und trägt man x nach ol , so ist lk der gewünschte Meridian, denn da $go \parallel ac$ und $ol \parallel ak$ so bestehen die Proportionen:

$$go : ca = so : sa$$

$$\text{ferner ist } ol : ak = so : sa$$

$$\text{und daher } go : ca = ol : ak$$

Auf diese Weise kann auch jeder andere Meridian erhalten werden.

Die Projektion von Delisle.

Eine Modification der soeben beschriebenen Kegelpjektion, bei welcher eine grössere Genauigkeit erzielt wird, ist die Folgende: Man denke sich durch die äussersten Parallelkreise EF und CD des Landes (Fig. 32 welche auch zur Erläuterung der folgenden Projektionsmethode dient,) deren Breiten φ_1 und φ_2 sind, einen Kegel gelegt und berechne die Radien SD und SF der äussersten Parallelkreise seiner Entwicklung.

Es ist $\sphericalangle OSD = \beta = DFG - SGF = \frac{1}{2}(\text{DOG} - \text{SOF})$

oder da $\text{DOG} = 90^\circ + \varphi_2$ und $\text{SOF} = 90^\circ - \varphi_1$ so ist

$$\beta = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$$

Da ferner $Fm_1 = OF \cos \varphi_1 = R \cos \varphi_1$ und anderseits

$$Fm_1 = SF \sin \beta \quad \text{so ist}$$

$$SF \sin \beta = R \cos \varphi_1$$

$$(LI) \quad SF = \frac{R \cos \varphi_1}{\sin \beta} = \frac{R \cos \varphi_1}{\sin \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\text{ferner ist (LIa) } SD = \frac{R \cos \varphi_2}{\sin \beta} = \frac{R \cos \varphi_2}{\sin \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Nachdem man analog wie in Fig. 31 mit diesen Radien aus dem

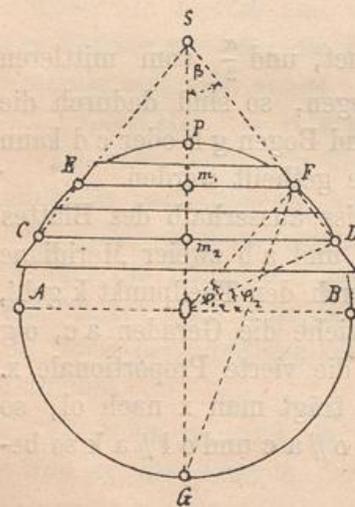


Fig. 32.

Punkte s die Kreise c d und e f gezogen hat, welches die äussersten Parallelkreise der Karte sind, trage man auf diese vom mittleren Meridiane aus die wahren Längen der Parallelkreisbogen auf, wodurch die äusseren Meridiane ee und df der Karte bestimmt sind. Die Bogen cd und ef werden in eine gleiche Anzahl gleicher Theile getheilt und durch die entsprechenden Theilpunkte die übrigen Meridiane gezogen.

Eine andere Modification der conischen Projektion ist die Projektion von Delisle*) (Fig. 32) bei welcher die Kegelfläche durch zwei Parallelkreise geht, die gleichweit von dem mittleren und den beiden äusseren Parallelkreisen der Karte entfernt sind. In

*) Jos. Nicolas Delisle geb. 1688 in Paris, gest. 1768 daselbst; Mitglied der Academien von Paris und Petersburg.

Fig. 31 (S.84) wird die Länge ab des Meridianbogens, welcher der Breiten-
differenz ($\varphi - \varphi'$) der äusseren Parallelkreise der Karte entspricht, aufge-
tragen, und diese Länge in 4 gleiche Theile getheilt. Sodann werden die
Radien der Parallelkreise berechnet, welche durch die Punkte m und n
gehen, was mit den zuletzt abgeleiteten Gleichungen LI und LIa ge-
schehen kann, und mit diesen Radien aus dem Punkte s die Bogen
 rt und pq beschrieben. Trägt man auf diese Bogen vom mittleren Meri-
diane der Karte aus die wahren Längen der Parallelkreisbogen auf, so
werden dadurch die Punkte r und p , t und q und durch diese die äusseren
Meridiane der Karte bestimmt. Im Uebrigen bleibt die Konstruktion
des Netzes unverändert. Nach dieser Methode hat Delisle eine grosse
Karte von Russland entworfen, welche 33 Breitegrade umfasst. Der
mittlere Parallelkreis der Karte ist 55° vom Aequator entfernt.

Die Flamsteed'sche *) Projektion.

Bei dieser Projektion werden die Parallelkreise durch parallele
Gerade dargestellt, welche sich in gleichen Abständen von einander
befinden. Soll das

Netz von Grad zu
Grad gezeichnet
werden, so denkt
man sich auf den
mittleren Meridian
der Karte, welcher
durch die Vertikale
 aY (Fig. 33) reprä-
sentirt ist, die Länge
eines Meridiangra-
des beliebig oft auf-
getragen und in den
Theilpunkten a b

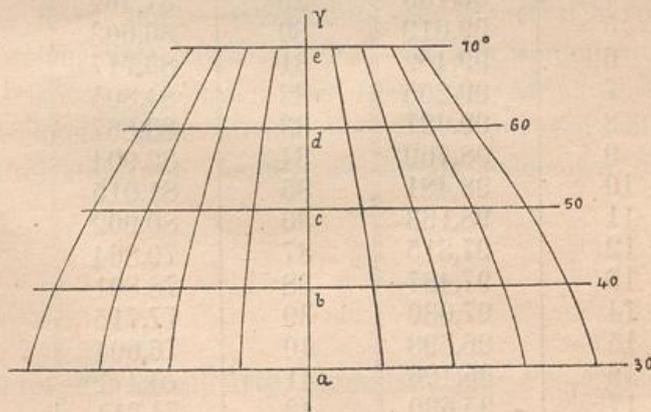


Fig. 33.

c d ... Senkrechte errichtet, welche die Parallelkreise der Karte sind.
Auf jeden Parallelkreis wird nun vom mittleren Meridiane der Karte

*) John Flamsteed wurde 1646 in Derby geboren und starb 1719 in Green-
wich, er war Pfarrer zu Burstow in Surrey und später erster Direktor der
1675 erbauten Sternwarte in Greenwich.

aus die Länge des Parallelkreisgrades aufgetragen, welcher der Breite φ des Parallelkreises entspricht, worauf die entsprechenden Theilpunkte durch Curven verbunden werden. Ist $l = a b$ die Länge eines Meridian- oder Aequatorgrades, so ist

$l' = l \cos \varphi$ die Länge des Parallelkreisgrades, dessen Breite φ ist. Theilt man daher einen Meridiangrad $a b$ in 100 gleiche Theile und setzt man $l = 100$, so wird

$l' = 100 \cos \varphi$ sein und es können die Werthe von l' aus folgender Tabelle entnommen werden, in welcher die Werthe von $100 \cos \varphi$ enthalten sind.

Werthe der Parallelkreisgrade der Erdkugel, wenn die Länge eines Meridiangrades = 100 gesetzt wird.

Breite φ des Parallelkreises	$l' = 100 \cos \varphi$	Breite φ des Parallelkreises	$l' = 100 \cos \varphi$	Breite φ des Parallelkreises	$l' = 100 \cos \varphi$
0 ^o	100,000	25 ^o	90,631	50 ^o	64,279
1	99,985	26	89,879	51	62,932
2	99,939	27	89,101	52	61,566
3	99,863	28	88,295	53	60,182
4	99,756	29	87,462	54	58,779
5	99,619	30	86,603	55	57,358
6	99,452	31	85,717	56	55,919
7	99,255	32	84,805	57	54,464
8	99,027	33	83,867	58	52,992
9	98,769	34	82,904	59	51,504
10	98,481	35	81,915	60	50,000
11	98,163	36	80,902	61	48,481
12	97,815	37	79,864	62	46,947
13	97,437	38	78,801	63	45,399
14	97,030	39	77,715	64	43,837
15	96,593	40	76,604	65	42,262
16	96,126	41	75,471	66	40,674
17	95,630	42	74,314	67	39,073
18	95,106	43	73,135	68	37,461
19	94,552	44	71,934	69	35,837
20	93,969	45	70,711	70	34,202
21	93,358	46	69,466	71	32,557
22	92,718	47	68,200	72	30,902
23	92,050	48	66,913	73	29,237
24	91,355	49	65,606	74	27,564

Breite φ des Parallel- kreises	$\rho' = 100 \cos \varphi$	Breite φ des Parallel- kreises	$\rho' = 100 \cos \varphi$	Breite φ des Parallel- kreises	$\rho' = 100 \cos \varphi$
75 ^o	25,882	81 ^o	15,643	86 ^o	6,976
76	24,192	82	13,917	87	5,234
77	22,495	83	12,187	88	3,490
78	20,791	84	10,453	89	1,745
79	19,081	85	8,715	90	0,000
80	17,365				

Auch der Abplattung der Erde kann bei dieser Methode Rechnung getragen werden. Die Parallelkreise sind alsdann nicht in gleichen Entfernungen von einander zu ziehen, sondern in Entfernungen, welche gleich den Längen der aufeinanderfolgenden Bogengrade sind, die dem Meridiane des Ellipsoides angehören. Aus der Seite 98 angegebenen Tabelle, in welcher gleichzeitig die Längen der Parallelkreisgrade enthalten sind, können die Werthe der aufeinanderfolgenden Meridiangrade entnommen werden.

Da bei der Flamsteedschen Projektion die Parallelkreise durch gerade Linien dargestellt werden, so gibt diese Projektion keine sehr grosse Genauigkeit und sind besonders die vom mittleren Meridiane entfernten Theile der Karte etwas verzeichnet. Sie eignet sich vorzüglich für Länder, welche vom Aequator durchschnitten werden, und es ist in unseren Atlanten gewöhnlich das Blatt von Afrika nach dieser Methode gezeichnet. Eine Modification der Flamsteed'schen Projektion ist die Projektion von Bonne, welche im Folgenden beschrieben wird.

Die Bonne'sche*) oder die modificirte Flamsteed'sche Projektion.

Sie ist eine Combination der Kegelprojektion mit der Flamsteed'schen Projektionsmethode. Sind CD und EF (Fig. 30 S. 83) die äussersten Parallelkreise eines Landes, welches darzustellen ist, so denkt man sich an die Kugel einen Tangentialkegel gelegt, welcher dieselbe längs

*) Rigobert Bonne wurde in Raucourt bei Sedan 1727 geboren und starb 1795 in Paris, er war anfänglich Privatlehrer der Mathematik in Paris, später erster Ingenieur-géographe der Marine.

dem mittleren Parallelkreise GH des Landes berührt. Die Spitze S dieses Kegels liegt auf der Erdaxe, und wird in der Entwicklung der Kegelfläche als Mittelpunkt sämtlicher Parallelkreise angenommen.

Der mittlere Meridian der Karte, von welchem die Entwicklung ausgeht, stellt sich als gerade Linie dar, und wird auf ihm vom Mittelpunkte G der Karte aus, die wahre Länge der Meridiangrade nach oben und unten aufgetragen. Durch die so erhaltenen Theilpunkte zieht man die Parallelkreise, welche aus dem Punkte S beschrieben werden.

Die Meridiane werden construirt, wenn man auf jeden Parallelkreis vom mittleren Meridiane aus die wahre Länge des entsprechenden Parallelkreisgrades aufträgt, und die demselben Meridiane angehörenden Theilpunkte durch Curven verbindet. In dem so erhaltenen Netze stehen die einzelnen Parallelkreise und Meridiane nicht senkrecht auf einander, sondern schneiden sich unter spitzen und stumpfen Winkeln.

Um die Radien der Parallelkreise zu berechnen, berechnet man vor Allem den Radius GS (Fig. 30 S. 83) des mittleren Parallelkreises, und vermehrt und vermindert seine Länge um die Länge eines Meridiangrades, oder wenn man das Netz von 10^0 zu 10^0 ziehen will, um die Länge von 10 Meridiangraden. Sind die Breiten φ_1 und φ_2 der äusseren Parallelkreise des Landes gegeben, so ist

$\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$ die Breite des mittleren Parallelkreises GH, und daher auch $\sphericalangle GSM = \varphi = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$

Der Radius des mittleren Parallelkreises ist:

$$SG = GM \operatorname{Cotg} \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) \text{ oder}$$

$$(LVI) \quad SG = R \operatorname{Cotg} \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$$

Der Radius r eines Parallelkreises dessen Breite φ' kleiner als φ ist, ergibt sich, wenn man zu dem Radius GS, welcher in Fig. 34 nach MO getragen wurde, den Meridianbogen addirt, der dem Centriwinkel $\varphi - \varphi'$ entspricht. Für einen Parallelkreis dessen Breite φ'' grösser als φ ist, muss von dem Radius GS der Meridianbogen des Centriwinkels $\varphi'' - \varphi$ abgezogen werden.

Bezeichnet man die Länge des Meridianbogens mit d , so ist daher (LVIIb) $r = GS \pm d$.

Ferner ist die Länge eines Meridiangrades

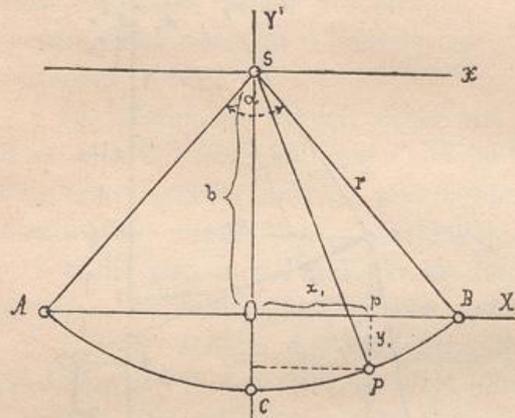
$$(LVII) \quad l = \frac{R\pi}{180} \text{ und die Länge von } \gamma \text{ Graden irgend eines}$$

Parallelkreises dessen Breite φ ist:

$$(LVIII) \quad l' = \frac{R\pi\gamma^0}{180} \operatorname{Cos} \varphi = \frac{R\pi\gamma''}{648000} \operatorname{Cos} \varphi = 1\gamma^0 \operatorname{Cos} \varphi$$

kreises durch die Schenkel dieses Winkels begrenzt ist, wird er in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile getheilt, und die Theilpunkte mit den entsprechenden der übrigen Parallelkreise durch Curven verbunden, welche die Meridiane darstellen.

In den meisten Fällen liegt der Mittelpunkt s der Parallelkreise ausserhalb des Blattes, wesshalb er für die Construction dieser Kreise nicht benutzt werden kann. Die Parallelkreise können alsdann durch Construction einzelner Punkte auf folgende Weise erhalten werden:



Eig. 35.

In Fig. 35 sei sC der Hauptmeridian der Karte, C ein Theilpunkt durch welchen der Parallelkreis ACB gehen soll, s der Mittelpunkt des Parallelkreises, welcher jedoch ausserhalb

des Blattes falle. Da man nach Gleich. (LVIb) den Radius r des Parallelkreises und nach Gleichung (LIX) den Winkel $AsB = \alpha$, berechnen kann, so ist $\triangle sAO$ bestimmt und ergibt sich aus demselben

$$(LXI) \quad AO = OB = r \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{und } Os = r \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{ferner ist } OC = sC - Os = r - r \cos \frac{\alpha}{2} = r \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$(LXII) \quad OC = 2r \sin^2 \frac{\alpha}{4}$$

Für jeden Parallelkreis wird nun nach Gleichung LXI und LXII AO und OC berechnet*), und da der Punkt C gegeben ist, zuerst CO aufgetragen, in O eine Senkrechte auf sC errichtet und auf diese $AO = OB$ aufgetragen. Der Kreisbogen ACB kann nun mit dem Peripheriezirkel gezogen werden.

Sollen noch mehr Punkte des Kreises bestimmt werden, so kann dies am einfachsten auf analytischem Wege geschehen. Legt man

*) Die Werthe von $\sin \frac{\alpha}{2}$ und $\left(1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right)$ können Sarrazin's Taschenbuch entnommen werden (siehe S. 4).

die Coordinatenaxen durch den Mittelpunkt s des Kreises, so lautet seine Gleichung:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Verschiebt man die Axen parallel mit sich selbst bis sie durch den Punkt O gehen, so wird die Gleichung in Bezug auf die neuen Axen OX' und OY' erhalten, wenn man in der Gleichung des Kreises $x = x'$ und $y = y' - b$ setzt, es ist alsdann:

$$x'^2 + (y' - b)^2 = r^2, \text{ woraus sich}$$

$$(LXIII) \quad y' = b - \sqrt{(r + x')(r - x')} \text{ ergibt.}$$

In diese Gleichung kann man für x' beliebige Zahlenwerthe einsetzen und die entsprechenden Werthe von y' berechnen, wodurch beliebig viele Kreispunkte erhalten werden können. Dasselbe Verfahren wird auch für jeden anderen Parallelkreis in Anwendung gebracht.

Da es häufig vorkommt, dass man bei der Construction einer Karte einzelne Punkte, deren sphärische Coordinaten gegeben sind, in die Karte einzuzeichnen hat, so wollen wir noch folgende Aufgabe lösen:

Es sei die Länge λ und die Breite φ des Mittelpunktes der Karte, ferner die Länge λ_1 und die Breite φ_1 irgend eines Punktes P gegeben, welcher in die Karte eingetragen werden soll, man soll die Coordinaten x und y dieses Punktes (siehe Fig. 36) in Bezug auf ein durch den Mittelpunkt O der Karte gehendes rechtwinkliges Coordinatensystem berechnen.

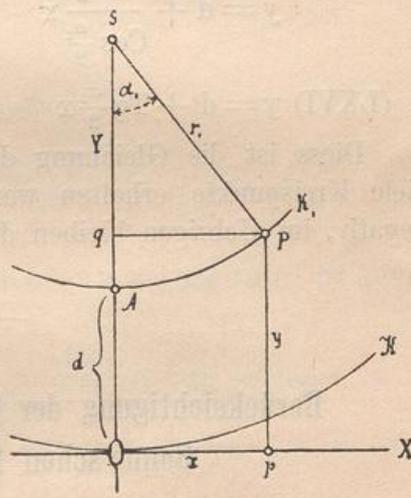


Fig. 36.

Auflösung. Der Radius sO des mittleren Parallelkreises der Karte ist bekannt: Für $R=1$ ist

$$sO = r = \text{Cotg } \varphi$$

ferner ist auch der Abstand $OA = d$ des Parallelkreises K_1 vom mittleren Parallelkreise K gegeben, und es kann daher der Radius r_1 dieses Parallelkreises berechnet werden:

$$r_1 = sA = sO - OA = r - d$$

Der Winkel $AsP = \alpha_1$ ergibt sich nach Gleichung LIXa

$$\alpha_1 = \frac{\lambda_1 \cos \varphi_1}{r_1}$$

in welcher Gleichung $\gamma_1 = \lambda_1 - \lambda$, d. h. gleich dem Winkel, den der Meridian des Punktes P mit dem mittleren Meridiane der Karte einschliesst.

Die Coordinaten des Punktes P sind nun:

$$\begin{aligned} \text{(LXIV)} \quad x &= Pq = r_1 \sin \alpha_1 \\ y &= Oq = OA + Aq = d + sA - sq \\ &= d + r_1 - r_1 \cos \alpha_1 = d + r_1 (1 - \cos \alpha_1) \end{aligned}$$

$$\text{(LXV)} \quad y = d + 2 r_1 \sin^2 \frac{\alpha_1}{2}$$

Aus Gleichung (LXIV) folgt:

$$r_1 = \frac{x}{\sin \alpha_1}. \quad \text{Substituirt man diesen Werth in Gleichung}$$

(LXV) so ergibt sich:

$$y = d + \frac{2x}{\sin \alpha_1} \sin^2 \frac{\alpha_1}{2} \quad \text{oder da } \sin \alpha_1 = 2 \sin \frac{\alpha_1}{2} \cos \frac{\alpha_1}{2}$$

$$y = d + \frac{\sin \frac{\alpha_1}{2}}{\cos \frac{\alpha_1}{2}} x$$

$$\text{(LXVI)} \quad y = d + \operatorname{Tg} \frac{\alpha_1}{2} x$$

Diess ist die Gleichung des Kreises K_1 , mit welcher beliebig viele Kreispunkte erhalten werden können. Ist $\varphi_1 < \varphi$ so ist d negativ, im Uebrigen bleiben die erhaltenen Werthe unverändert.

Berücksichtigung der Abplattung der Erde bei der Bonne'schen Projektionsmethode.

Bei der Ableitung der vorhergehenden Gleichungen wurde die Erde als Kugel betrachtet, man kann jedoch bei der Bonne'schen Projektion ohne alle Schwierigkeit die Abplattung der Erde ebenfalls berücksichtigen:

In Fig. 29 sei AP_nB ein Meridian des Erdellipsoides, C ein beliebiger Ellipsenpunkt, $x_1 y_1$ seine Coordinaten, CT die Tangente an die Ellipse im Punkte C, CN die Normale des Ellipsenpunktes. Da die Tangentialebene im Punkte C des Ellipsoides senkrecht steht auf der Meridianebene AP_nB , so kann die Tangente TC als Horizont des Ortes C betrachtet werden, und $\sphericalangle EDY$ ist gleich der Polhöhe dieses

In dieser Gleichung ist $\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2}$ (3)
 oder da die Abplattung $\frac{a-b}{a} = \frac{1}{p}$ oder $1 - \frac{b}{a} = \frac{1}{p}$ gesetzt wird,
 und $\frac{b}{a} = 1 - \frac{1}{p}$ also $\frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{2}{p} + \frac{1}{p^2}$ ist,
 so erhält man $\varepsilon^2 = \frac{2}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2}{299,1528} - \frac{1}{299,1528^2} = 0,00667438$
 $\log \varepsilon = \bar{2},9122052$, $\log \varepsilon^2 = \bar{3},8244104$.

Man kann die Länge der Normalen auch durch die Coordinaten $x_1 y_1$ des Punktes C ausdrücken, indem man die Coordinaten des Punktes N ($x_2 y_2$) berechnet, und diese sowie die Coordinaten des Punktes C in die Formel für die Entfernung zweier Punkte, die durch ihre Coordinaten gegeben sind, substituirt:

$$4) n = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Die Gleichung der Normalen lautet:

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (x - x_1)$$

Setzt man in dieser Gleichung $x = x_2 = 0$ so ergibt sich die Ordinate $ON = y_2$ des Punktes N. Es ist

$$y_2 - y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2} \text{ und}$$

$$y_2 = y_1 - \frac{a^2 y_1}{b^2}$$

Gleich. 4 lautet daher:

$$n = \sqrt{x_1^2 + \left(y_1 - y_1 + \frac{a^2 y_1}{b^2}\right)^2}$$

$$n = \sqrt{x_1^2 + \frac{a^4 y_1^2}{b^4}} \text{ oder da } \frac{a^4}{b^4} = \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^2} \text{ ist, (folgt aus Gleich. 3)}$$

$$(LXVIII) n = \sqrt{\frac{y_1^2}{(1 - \varepsilon^2)^2} + x_1^2} = \sqrt{\frac{y_1^2 + (1 - \varepsilon^2)^2 x_1^2}{1 - \varepsilon^2}}$$

$$1 - \varepsilon^2 = 0,99332562, \log (1 - \varepsilon^2) = \bar{1},9970917.$$

Ist in Fig. 29 (S. 95) CC' der mittlere Parallelkreis der Karte, so ergibt sich nun die Seitenkante CD des Tangentialkegels, welche in der Entwicklung Radius des mittleren Parallelkreises ist, aus $\triangle CDN$:

$$(LXIX) CD = CN \cdot \text{Cotg } CDN = n \text{ Cotg } \varphi$$

Mit diesem Radius wird wie in Fig 36 dargestellt ist, aus s der Kreis K beschrieben. Die übrigen Parallelkreise der Karte werden erhalten, wenn man die wahren Längen der aufeinanderfolgenden Meridiangrade, welche aus nachfolgender Tabelle der Längen der Meridian- und Parallelkreisgrade des Erdellipsoides (S. 98) zu entnehmen sind, vom Mittelpunkte O der Karte aus, auf den Haupt-

meridian nach oben und unten aufträgt. Dadurch wird für jeden Parallelkreis K_1 der Punkt A (Fig. 36) erhalten und kann derselbe aus dem Punkte s mit dem Radius sA beschrieben werden.

Sollte der Punkt s ausserhalb des Blattes fallen, so muss für jeden Parallelkreis der Winkel α_1 berechnet und die Gleichung des Kreises abgeleitet werden. Wie wir Seite 94 gefunden haben sind die Coordinaten irgend eines Kreispunktes P (Fig. 36)

$$(LXIV) \quad x = r_1 \sin \alpha_1$$

$$(LXV) \quad y = d + 2 r_1 \sin^2 \frac{\alpha_1}{2}$$

ferner ist die Gleichung des Kreises K_1

$$(LXVI) \quad y = d + \operatorname{Tg} \frac{\alpha_1}{2} x$$

In diese Gleichungen ist für α_1 der Werth zu setzen, welcher dem Erd-Ellipsoide entspricht. In Fig. 36 entspreche dem Bogen AP des Parallelkreises $\gamma_1 = \lambda_1 - \lambda$ Längengrade, so ist seine Länge

$$b = \frac{x_1 \pi \gamma_1}{180^\circ}, \quad (x_1 = \text{dem Radius des Parallelkreises } K)$$

Die Länge des Bogens AP in Fig. 36 ist aber

$$b' = \frac{r_1 \pi \alpha_1}{180}, \quad \text{und da beide Werthe einander gleich sein}$$

sollen:

$$r_1 \alpha_1 = x_1 \gamma_1$$

$$\alpha_1 = \frac{x_1}{r_1} \gamma_1$$

Aus Fig. 29 Seite 95 ergibt sich aber der Werth von $x_1 = NC \cdot \cos Ncd = n \cos \varphi$ und daher

$$(LXX) \quad \alpha_1 = \frac{n \cos \varphi \gamma_1}{r_1}$$

In nachfolgender Tabelle (S. 98) sind die Werthe der Logarithmen der Normalen für die Parallelkreise von Grad zu Grad angegeben und können daher mittelst dieser Werthe die Winkel α_1 nach Gleich. LXX berechnet werden. Substituirt man für einen Parallelkreis den Werth von α_1 in die Gleich. LXIV, LXV, LXVI, so ergeben sich die Coordinaten irgend eines Kreispunktes sowie die Gleichung des Kreises K_1 .—

Wird ein Land wie Deutschland, Frankreich, die Schweiz etc. nach Möllinger's Kartenprojektionen,

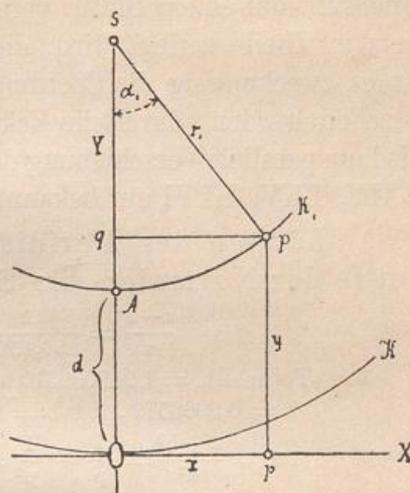


Fig. 36.

der Bonne'schen Methode dargestellt, so geschieht diess der Bequemlichkeit wegen gewöhnlich nicht auf einem Blatte, sondern man theilt die Karte in Quadrate, welche je eine Seite gemeinschaftlich haben und separat gezeichnet werden. Nach ihrer Vollendung werden diese Quadrate auf einem Blatte vereinigt. Da in diesem Falle das Kartenetz in Theile zerlegt wird, die einzeln construirt werden müssen, so ist es zweckmässig die Coordinatenaxen, auf welche die Parallelkreise bezogen werden, durch die Eckpunkte der Quadrate zu legen, es findet alsdann parallele Verschiebung der Axen statt und können die Gleichungen LXIV, LXV, LXVI auf bekannte Weise leicht umgeformt werden.

Längen der Meridian- und Parallelkreisgrade sowie der Normalen des Erdellipsoides für die Abplattung

$$\frac{a-b}{a} = \frac{1}{299,1528} \text{ (nach Bessel).}$$

Die Toise ist = 1,949036310 m, $\log = 0,289819930$ für $a = 1$ ist $b = 0,9966572$, $\log b = 1,9985458$.

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{2}{p} - \frac{1}{p^2} = 0,00667438 \quad \log \varepsilon = 2,9122052$$

$$\frac{a-b}{a} = \frac{1}{p} = \frac{1}{299,1528} \quad \log \frac{1}{p} = 3,5241069$$

Radius des Aequators $a = 3272077,14$ Toisen,
 = 6377397,16 Meter,

halbe kleine Axe $b = 3261139,33$ Toisen,
 = 6356078,97 Meter.

Breite	Grad des Meridianes *) Par. Toisen	Diff.	Grad des Parallelkreises *) Par. Toisen	Diff.	Logarith. der Normalen *) bis zur Umdrehungsaxe für $a = 1$	Diff.
0°	56727,356		57108,519		0,0000000	
1	27,529	0,173	099,880	8,639	004	4
2	28,048	0,519	073,963	25,917	018	14
3	28,912	0,864	030,776	43,187	040	22
4	30,120	1,208	56970,331	60,445	071	31
5	31,670	1,550	892,646	77,685	110	39
6	56733,562	1,892	56797,744	94,902		48
7	35,792	2,230	685,651	112,093	0,0000158	57
		2,566		129,252	215	66

*) Diese Zahlenwerthe sind dem Berliner „Astronomischen Jahrbuch“ für 1852, herausgegeben von J. F. Encke, entnommen. Durch die neue europäische Gradmessung, deren Resultate indessen erst nach Jahren bekannt sein werden, dürften sich dieselben etwas, jedoch nicht wesentlich ändern. Das obige Verhältniss der Toise zum Meter steht in Francoeur's Geodesie.

Breite	Grad des Meridianes *) Par. Toisen	Diff.	Grad des Parallelkreises *) Par. Toisen	Diff.	Logarith. der Normalen *) bis zur Umdrehungsaxe für $a = 1$	Diff.
8 ^o	56738,358		56556,399		0,0000281	
9	41,257	2,899	410,026	146,373	355	74
10	44,485	3,228	246,573	163,453	437	82
11	56748,039	3,554	56066,088	180,485	0,0000528	91
12	51,915	3,876	55868,621	197,467	627	99
13	56,107	4,192	654,231	214,390	734	107
14	60,611	4,504	422,978	231,253	849	115
15	65,421	4,810	174,930	248,048	971	122
16	56770,532	5,111	54910,156	264,774	0,0001101	130
17	75,938	5,406	628,735	281,421	1239	138
18	81,632	5,694	330,746	297,989	1384	145
19	87,607	5,975	016,276	314,470	1537	153
20	93,856	6,249	53685,416	330,860	1696	159
21	56800,372	6,516	53338,261	347,155	0,0001862	166
22	07,147	6,775	52974,912	363,349	2035	173
23	14,173	7,026	595,473	379,439	2214	179
24	21,441	7,268	200,055	395,418	2399	185
25	28,943	7,502	51788,773	411,282	2590	191
26	56836,670	7,727	51361,746	427,027	0,0002787	197
27	44,612	7,942	50919,099	442,647	2989	202
28	52,760	8,148	460,959	458,140	3197	208
29	61,105	8,345	49987,461	473,498	3409	212
30	69,635	8,530	498,743	488,718	3626	217
31	56878,341	8,706	48994,947	503,796	0,0003848	222
32	87,213	8,872	476,221	518,726	4074	226
33	96,240	9,027	47942,717	533,504	4303	229
34	56905,410	9,170	394,592	548,125	4537	234
35	14,713	9,303	46832,006	562,586	4773	236
36	56924,138	9,425	46255,124	576,882	0,0005013	240
37	33,673	9,535	45664,118	591,006	5256	243
38	43,306	9,633	45059,160	604,958	5500	244
39	53,027	9,721	44440,430	618,730	5748	248
40	62,822	9,795	43808,110	632,320	5997	249
41	56972,681	9,859	43162,389	645,721	0,0006247	250
42	82,591	9,910	42503,456	658,933	6499	252
43	92,541	9,950	41831,508	671,948	6752	253
44	57002,518	9,977	41146,746	684,762	7005	253
45	12,510	9,992	40449,371	697,375	7259	254
		9,995		709,777		253

Breite	Grad des Meridianes*) Par. Toisen	Diff.	Grad des Parallelkreises*) Par. Toisen	Diff.	Logarith. der Normalen*) bis zur Umdrehungsaxe für $a = 1$	Diff.
46	57022,505		39739,594		0,0007512	
47	32,490	9,985	39017,625	721,969	7766	254
48	42,454	9,964	38283,681	733,944	8019	253
49	52,385	9,931	37537,981	745,700	8271	252
50	62,270	9,885	36780,749	757,232	8522	251
51	57072,097	9,827	36012,212	768,537	0,0008771	249
52	81,854	9,757	35232,602	779,610	9018	247
53	91,529	9,675	34442,154	790,448	9264	246
54	57101,111	9,582	33641,105	801,049	9507	243
55	10,587	9,476	32829,699	811,406	9747	240
56	57119,946	9,359	32008,179	821,520	0,0009984	237
57	29,176	9,230	31176,795	831,484	0,0010218	234
58	38,267	9,091	30335,800	840,995	10448	230
59	47,206	8,939	29485,448	850,352	10675	227
60	55,984	8,778	28625,997	859,451	10897	222
61	57164,588	8,604	27757,711	868,286	0,0011115	218
62	73,009	8,421	26880,852	876,859	11328	213
63	81,236	8,227	25995,689	885,163	11537	209
64	89,258	8,022	25102,492	893,197	11740	203
65	97,067	7,809	24201,534	900,958	11937	197
66	57204,652	7,585	23293,092	908,442	0,0012129	192
67	12,003	7,351	22377,443	915,649	12315	186
68	19,113	7,110	21454,868	922,575	12495	180
69	25,971	6,858	20525,651	929,217	12669	174
70	32,570	6,599	19590,078	935,573	12836	167
71	57238,901	6,331	18648,435	941,643	0,0012996	160
72	44,957	6,056	17701,015	947,420	13149	153
73	50,729	5,772	16748,107	952,908	13295	146
74	56,211	5,482	15790,007	958,100	13434	139
75	61,396	5,185	14827,011	962,996	13565	131
76	57266,277	4,881	13859,414	967,597	0,0013688	123
77	70,849	4,572	12887,518	971,896	13804	116
78	75,105	4,256	11911,623	975,895	13911	107
79	79,041	3,936	10932,030	979,593	14011	100
80	82,651	3,610	9949,043	982,987	14102	91
81	57285,931	3,280	8962,967	986,076	0,0014185	83
82	88,876	2,945	7974,108	988,859	14259	74
83	91,484	2,608	6982,772	991,336	14325	66
		2,267		993,505		57

mit $R = 859,43$ zu multipliciren. Die sich ergebenden Zahlenwerthe sind in nachfolgender Tabelle zusammengestellt.

Nach Gleichung LVIII (S. 90) können nun die Längen von je 10° eines jeden Parallelkreises berechnet werden. Für $\varphi = 30^\circ$ und $R = 1$ ergibt sich:

$$r = \frac{\pi \cdot 10}{180} \cos 30^\circ = \frac{\pi}{18} \cos 30^\circ = 0,174533 \cos 30^\circ = 0,151150$$

In analoger Weise ergeben sich auch für $\varphi = 40^\circ 50^\circ 52^\circ 60^\circ 70^\circ$ die Werthe von r . Da man diese Längen auf den entsprechenden Parallelkreisen der Bonne'schen Projektion, ohne unvermeidliche Constructionsfehler zu begehen, nicht auftragen kann, so hat die Berechnung ihrer Werthe gewöhnlich kein Interesse und werden die ihnen entsprechenden Centriwinkel α direkt nach Gleichung LIX (S. 91) gefunden.

Für $\varphi = 30^\circ$, $\gamma = 10^\circ$ und $R = 1$ erhält man:

$$\alpha'' = \frac{36000}{1,165258} \cos 30^\circ$$

$$\alpha = 26755'' = 7^\circ 25' 55''$$

Die Sehne s welche dem Winkel α entspricht, ergibt sich nach Gleichung (LX) $s = 2r \sin \frac{\alpha}{2}$. Soll s in geog. Meilen erhalten werden, so ist das Resultat noch mit $859,43$ zu multipliciren, denn die Werthe von r wurden oben für $R = 1$ berechnet.

Für $\varphi = 30^\circ$ ist $\alpha = 7^\circ 25' 55''$ und

$$s = 2 \times 1,165258 \times \sin 3^\circ 42' 57'' \times 859,43 = 129,806 \text{ geog. Meilen.}$$

Netz von Europa nach der Bonne'schen Methode.

$GS = 0,7812855 = 671,466 \text{ g. Meilen.}$

Breite des Parallelkreises: φ	Radius des Parallelkreises für $R = 1$	Bogenlänge von 10 Parallelkreisgraden für $R = 1$	Radius des Parallelkreises in geog. Meilen	Sehne der Bogenlänge welche 10° des Parallelkreises entspricht in geog. Meilen
30°	1,165258	0,151150	1001,465	129,806
40	0,990725	0,133700	851,465	114,820
50	0,816192	0,112188	701,465	96,344
52	0,781285		671,466	
60	0,641659	0,087267	551,465	74,942
$66^\circ 32' 40''$	0,527436		453,298	
70	0,467126	0,059694	401,465	51,267

Die Konstruktion dieses Netzes ist auf Taf. I. (Seite 60) ausgeführt. Auf den Hauptmeridian der Karte wird von ihrem Mittelpunkt aus zunächst die Länge der Kegelkante GS nach OM (siehe Fig. 34 (Seite 107) aufgetragen, wodurch der gemeinschaftliche Mittelpunkt M aller Parallelkreise erhalten wird. Die Radien dieser Kreise stehen in Rubrik 2 oder 4 der Tabelle und werden mit diesen die Parallelkreise aus M beschrieben. Man trägt nun auf jeden der Parallelkreise die in Rubrik 3 oder 5 der Tabelle enthaltenen Sehnenlängen, wodurch sich eine Reihe von Meridianpunkten ergeben, von welchen die demselben Meridiane angehörenden Punkte mit einander verbunden werden, was am einfachsten durch Anlegen von Kreiscurvenlinealen geschieht. Auf Taf. I. ist das Bonne'sche Netz von Europa durch continuirliche Linien, das stereographische Netz durch punktirte Linien dargestellt.

IV. Abschnitt.

Vergleichung der stereographischen und Bonne'schen Projektionsmethode.

Prüfung der berechneten Kartennetze von Europa und Deutschland.

Die Vorzüglichkeit eines Kartennetzes wird vor Allem durch die Uebereinstimmung seiner linearen Distanzen mit den entsprechenden Entfernungen auf der Oberfläche der Erdkugel oder des Erdellipsoides bedingt, während die Flächengleichheit entsprechender Theile von Bild und Original von geringerer Bedeutung ist. Wir wollen daher zur Prüfung des stereographischen und Bonne'schen Kartennetzes von Europa vier beliebige Punkte auf der Kugel wählen und ihre 6 sphärischen Distanzen, sowie diejenigen ihrer stereographischen und Bonne'schen Projektionen berechnen. Aus ihrer Vergleichung wird sich sofort ergeben, welcher Projektion im vorliegenden Falle der Vorzug zu geben ist. Als Eckpunkte des Viereckes wurden die Orte Lissabon, Constantinopel, Petersburg und Reikiavik auf Island (siehe Taf. I. Seite 60) gewählt. Von diesen liegen Constantinopel und Petersburg in der Nähe des Hauptmeridianes, Lissabon und Reikiavik an den Grenzen der Karte. Die sphärischen Coordinaten dieser Orte, welche dem „Annuaire publié par le bureau des longitudes à Paris“ entnommen wurden, sind folgende:

für Lissabon: Länge $\lambda_l = 11^{\circ}28'45''$ westlich v. Paris,
Breite $\varphi_l = 38^{\circ}42'24''$ nördlich.

für Constantinopel Länge $\lambda_c = 26^{\circ}38'50''$ östlich v. Paris,
Breite $\varphi_c = 41^{\circ}0'16''$ nördlich.

für Petersburg: Länge $\lambda_p = 27^{\circ}58'13''$ östlich v. Paris,
Breite $\varphi_p = 59^{\circ}56'30''$ nördlich.

für Reikiavik: Länge $\lambda_r = 24^{\circ}20'20''$ westlich v. Paris,
Breite $\varphi_r = 64^{\circ}8'26''$ nördlich

Zunächst ergeben sich nach der schon früher angewandten Gleichung (siehe Fig. 24 S. 55)

$$\cos \sigma = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos (\lambda_2 \pm \lambda_1)$$

die Seiten und Diagonalen des sphärischen Viereckes LCPR. [liegen beide Orte auf verschiedenen Seiten des 0^{ten} Meridianes, so gilt in $(\lambda_2 \pm \lambda_1)$ das + Zeichen, im anderen Falle das - Zeichen]

Für die Seite LC ist:

$$\begin{aligned} \cos LC &= \sin 38^{\circ}42'24'' \sin 41^{\circ}0'16'' \\ &+ \cos 38^{\circ}42'24'' \cos 41^{\circ}0'16'' \cos 38^{\circ}7'35'' \\ LC &= 29^{\circ}7'33'' = 104853'' = 436,887 \text{ geog. Meilen} \\ &1^{\circ} = 15 \text{ g. M.} \end{aligned}$$

$$1'' = \frac{1}{240} = 0,0041666 \dots \text{ g. M.}$$

Analog erhält man für die übrigen Distanzen die Werthe:

$$\begin{aligned} CP &= 18^{\circ}57'18'' = 68238'' = 284,325 \text{ g. M.} \\ PR &= 24^{\circ} 9'29'' = 86969'' = 362,371 \text{ „ „} \\ RL &= 26^{\circ}33'00'' = 95580'' = 398,250 \text{ „ „} \\ LP &= 32^{\circ}32' 8'' = 117128'' = 488,033 \text{ „ „} \\ CR &= 37^{\circ} 5'46'' = 133546'' = 556,442 \text{ „ „} \end{aligned}$$

Berechnung der stereographischen Projektionen dieser Seiten. (siehe Fig. 34a)

Um die stereographischen Projektionen der Punkte LCPR zu be-

stimmen, verfähre man nach der in Aufgabe 1 (Seite 43) angegebenen Weise.

Man berechne für jeden Ort der Reihe nach die Werthe von γ , ϑ , ω und ϵ , sodann mittelst den Gleichungen A und B (Seite 44) die Werthe von A und d , wodurch die stereographische Projektion des Ortes in der Bildebene bestimmt ist. Legt man nun durch den Mittelpunkt O der Karte ein recht-

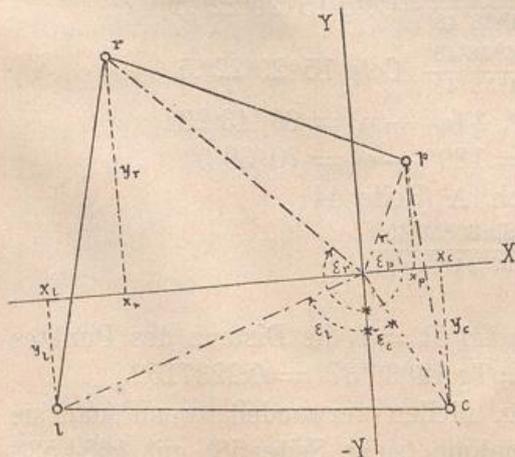


Fig. 34 a.

winkliges Coordinatensystem und lässt man die Ordinatenaxe OY mit dem Hauptmeridiane zusammenfallen, so ergeben sich die Coordinaten eines jeden Ortes nach den Gleichungen:

$$x = d \cdot \sin \varepsilon, \quad y = d \cos \varepsilon.$$

Endlich erhält man die Entfernung der stereographischen Projektionen zweier Orte durch die Gleichung:

$$l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Da das Rechnungsverfahren für einen jeden der 4 angenommenen Orte dasselbe ist, so genügt es die Rechnung für einen der Orte z. B. für Lissabon durchzuführen und für die übrigen nur die erhaltenen Resultate anzugeben.

Berechnung des Winkels γ_1 . Da als Hauptmeridian der Karte der 40. östlich von Ferro angenommen wurde, und Ferro 20°30' westlich von Paris liegt, so bildet der Meridian von Paris mit dem Hauptmeridiane einen Winkel

$$\gamma = 40^\circ - 20^\circ 30' = 19^\circ 30'$$

und es ist für Lissabon

$$\gamma_1 = 19^\circ 30' + 11^\circ 28' 45'' = 30^\circ 58' 45''$$

Ferner der aus Fig. 7 Seite 43 ersichtliche Bogen

$$\vartheta_1 = 90^\circ - \varphi_1 = 51^\circ 17' 36''$$

Bei der Berechnung des Netzes von Europa wurde die Poldistanz des Gegenpunktes Q: $\delta = 38^\circ$ angenommen und ist daher

$$\vartheta_1 - \delta = 13^\circ 17' 36'' \text{ und } \frac{1}{2}(\vartheta_1 - \delta) = 6^\circ 38' 48''$$

$$\vartheta_1 + \delta = 89^\circ 17' 36'' \text{ und } \frac{1}{2}(\vartheta_1 + \delta) = 44^\circ 38' 48''$$

somit nach den Glch. V (Seite 19)

$$\operatorname{Tg} \frac{1}{2}(\omega_1 + \eta_1) = \frac{\cos 6^\circ 38' 48''}{\cos 44^\circ 38' 48''} \operatorname{Cotg} 15^\circ 29' 22'',5$$

$$\operatorname{Tg} \frac{1}{2}(\omega_1 - \eta_1) = \frac{\sin 6^\circ 38' 48''}{\sin 44^\circ 38' 48''} \operatorname{Cotg} 15^\circ 29' 22'',5$$

$$\frac{1}{2}(\omega_1 + \eta_1) = 78^\circ 46' 22'', \quad \frac{1}{2}(\omega_1 - \eta_1) = 30^\circ 43' 29''$$

$$\omega_1 = 109^\circ 29' 51'', \quad \varepsilon_1 = 180^\circ - \omega_1 = 70^\circ 30' 9''$$

Ferner ergibt sich nach Glch. A (Seite 44)

$$\sin A_1 = \frac{\sin 51^\circ 17' 36'' \cdot \sin 30^\circ 58' 45''}{\sin 109^\circ 29' 51''}$$

$$A_1 = 25^\circ 13' 14''$$

Nach Glch. B (Seite 44) ist für $R=1$ die Distanz des Punktes l vom Centrum der Karte: $d = \operatorname{Tg} 12^\circ 36' 37'' = 0,2237152$.

Diese Distanz wird in geog. Meilen verwandelt, wenn man sie nach der früher gemachten Annahme (siehe Seite 58) mit 1684,528 ($\log = 3,2264782$) multiplicirt. Es ist dann $d = 376,854$ geog. Meilen.

Die Coordinaten des Punktes 1 in Bezug auf die durch den Mittelpunkt der Karte gehenden Axen sind:

$$x_1 = -376,854 \sin 70^\circ 30' 9'' = -355,2441$$

$$y_1 = -376,854 \cos 70^\circ 30' 9'' = -125,7811$$

Für Constantinopel ergeben sich in analoger Weise die Coordinaten

$$x_c = 79,9625, \quad y_c = -158,4973$$

und daher $x_1 - x_c = -435,2066$ $y_1 - y_c = 32,7162$

Die Distanz $lc = \sqrt{(-435,2066)^2 + 32,7162^2} = 436,435$ geog. Meilen.

Die Entfernungen der übrigen Orte sind in nachfolgender Tabelle zusammengestellt.

Berechnung der Bonne'schen Projektionen der Seiten LC, CP, PR, RL, LP, CR.

Da das Rechnungsverfahren auch hier für eine jede Seite dasselbe ist, so genügt es die Rechnung für die Seite LC durchzuführen.

Für Lissabon ist

$$\gamma_1 = 30^\circ 58' 45'' = 111525''$$

und die Breite

$\varphi_1 = 38^\circ 42' 24''$. Wie bei Berechnung des Bonne'schen Netzes von Europa gefunden wurde, ist die Kante des Tangentialkegels, welche gleichzeitig Radius des mittleren Parallelkreises ist $MO = 671,466$ geog. Meilen, und da $1'' = \frac{1}{240}$ geog. Meilen und die geog. Breite des Kartenmittelpunktes $\varphi = 52^\circ$ ist, so ist der Radius des Parallelkreises auf welchem Lissabon liegt:

$$r_1 = 671,466 + \frac{52 \cdot 60 \cdot 60 - \gamma_1}{240}$$

$$= 671,466 + \frac{47856}{240}$$

$$r_1 = 671,466 + 199,40$$

$$= 870,866 \text{ geog. Meilen.}$$

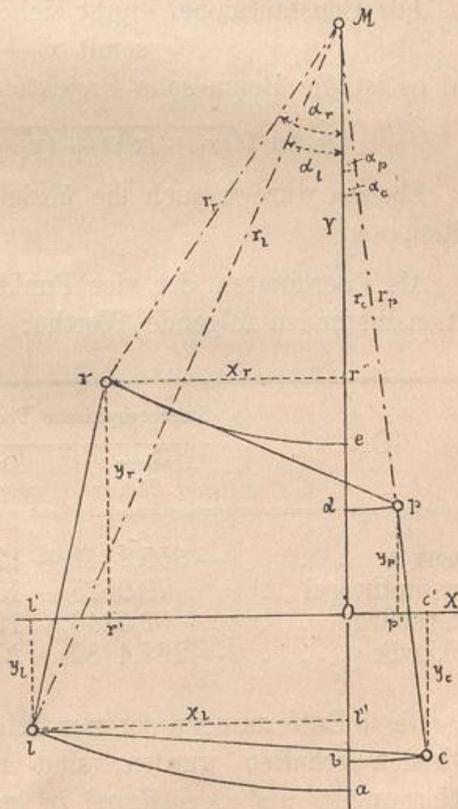


Fig. 34.

Nach Gleichung LIX (S. 91) ergibt sich nun der Werth des Centriwinkels α_1 welcher dem Bogen al (Fig. 34) entspricht.

$$\alpha_1 = \frac{859,437 \cdot 111525}{870,866} \text{ Cos } 38^\circ 42' 24''$$

$$\alpha_1 = 85887'' = 23^\circ 51' 27''$$

Legt man durch den Mittelpunkt O der Karte ein senkrechtes Coordinatensystem und lässt man die Ordinatenaxe OY , wie Fig. 34 zeigt, mit dem Hauptmeridiane der Karte zusammenfallen, so ergeben sich die Coordinaten des Punktes l nach den Gleichungen:

$$x_1 = -r_1 \text{ Sin } \alpha_1 = -870,866 \text{ Sin } 23^\circ 51' 27'' = -352,233$$

$$y_1 = -r_1 \text{ Cos } \alpha_1 + MO = -870,866 \text{ Cos } 23^\circ 51' 27'' + 671,466$$

$$y_1 = -124,988.$$

Auf analoge Weise werden auch die Coordinaten für die Bonne'schen Projektionen der übrigen Orte berechnet.

$$\text{Für Constantinopel ergibt sich: } x_c = 80,779, \quad y_c = -161,023$$

$$\text{somit } x_1 - x_c = -433,012, \quad y_1 - y_c = 36,035$$

und es ist die Bonne'sche Projektion der Seite LC :

$$lc = \sqrt{(x_1 - x_c)^2 + (y_1 - y_c)^2} = 434,509$$

Ebenso wurden auch die übrigen Distanzen cp , pr , rl , lp , er erhalten.

Als Coordinaten der vier Punkte ergaben sich nach beiden Projektionsmethoden folgende Werthe:

Ort	Stereographische Projektion		Bonne'sche Projektion	
	Abszisse geog. Meilen	Ordinate geog. Meilen	Abszisse geog. Meilen	Ordinate geog. Meilen
Lissabon . . .	-355,2441	-125,7811	-352,2330	-124,988
Constantinopel .	79,9625	-158,4973	80,7788	-161,023
Petersburg . . .	62,5446	120,7769	63,4978	122,787
Reikiavik . . .	-267,4487	270,9911	-270,6742	263,781

Die 6 Entfernungen der vier Orte, wie sie nach beiden Projektionsmethoden erhalten wurden, sind im Vergleiche mit den wirklichen Entfernungen auf der Kugel in nachfolgender Tabelle zusammengestellt:

Entfernung	Sphärische Distanz geog. Meilen	Stereographische Pro- jektion geog. Meilen	Bonne'sche Projektion geog. Meilen	Fehler des stereogra- phischen Projektion geog. Meilen*)	Fehler der Bonne'schen Projektion geog. Meilen*)	Differenz zwischen der stereographischen und Bonne'schen Projektion geog. Meilen**)
Lissabon-Constantinopel . . .	436,887	436,435	434,509	-0,452	-2,378	-1,926
Constantinopel-Petersburg . .	284,325	279,817	284,335	-4,508	+0,010	+4,518
Petersburg-Reikiavik	362,371	362,574	362,699	+0,203	+0,328	+0,125
Reikiavik-Lissabon	398,250	406,370	397,232	+8,120	-1,018	-9,138
Lissabon-Petersburg	488,033	485,117	483,968	-2,916	-4,065	-1,149
Constantinopel-Reikiavik . . .	556,442	552,408	551,342	-4,034	-5,100	-1,066

Aus der Vergleichung der Fehler, welche sich für beide Projektionsmethoden ergeben, sieht man, dass sich nur für die Distanz „Reikiavik-Lissabon“ ein wesentlicher Vortheil zu Gunsten der Bonne'schen Methode ergibt, für die übrigen Distanzen sind die Differenzen bei beiden Methoden so ziemlich dieselben. Immerhin würde man im vorliegenden Falle die Bonne'sche Methode der stereographischen vorziehen.

Um die nach beiden Methoden erhaltenen

Kartennetze von Deutschland zu prüfen, (nach unserer Annahme S. 60 besitzt der zu projicirende Kugelabschnitt einen Bogenhalbmesser von 8°) wurden vor Allem die Seiten der sphärischen Trapetze und ihrer Projektionen berechnet, welche in Figur 45 schematisch dargestellt sind. Es ist

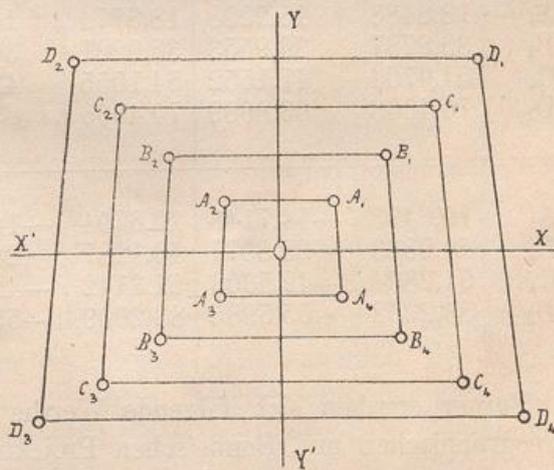


Fig. 45.

*) Das Zeichen + bedeutet, dass die Projektion grösser, das Zeichen — dass sie kleiner ist als die sphärische Distanz

***) Das Zeichen + bedeutet, dass die Bonne'sche Projektion grösser, das Zeichen — dass sie kleiner ist als die stereographische Projektion.

O der Mittelpunkt der Karte, dessen sphärische Coordinaten $\lambda = 30^\circ$ und $\varphi = 50^\circ$ sind, XOY ein durch diesen Punkt gehendes rechtwinkliges Axensystem, ferner A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 , D_1D_2 Sehnen von Parallelkreisen, deren Breiten 51° , 52° , 53° , 54° beträgt, während A_3A_4 , B_3B_4 , C_3C_4 , D_3D_4 Sehnen solcher Parallelkreise sind, welche die Breiten 49° , 48° , 47° , 46° besitzen. Endlich gehören die Sehnen A_1A_4 , B_1B_4 , C_1C_4 , D_1D_4 Meridianbögen an, die mit dem Hauptmeridiane der Karte die Winkel $\gamma = 2^\circ$, 4° , 6° , 8° einschliessen. In Folge dieser Annahme nehmen sowohl die Breiten als Längen der den Sehnen angehörenden Parallelkreise und Meridiane in arithmetischen Progressionen zu und es wird sich aus der Vergleichung der sphärischen Distanzen und ihrer Projektionen eine gewisse Gesetzmässigkeit in Bezug auf die Genauigkeit der Netze ergeben.

In nachfolgender Tabelle sind die Coordinaten der stereographischen und Bonne'schen Projektionen der Eckpunkte obiger Trapetze zusammengestellt:

Punkt	stereographische Coordinaten		Bonne'sche Coordinaten		Differenz der Abszissen*)	Differenz der Ordinaten*)
	Abszisse	Ordinate	Abszisse	Ordinate		
A_1	18,8488	15,2298	18,8774	15,2529	+0,0286	+0,0231
B_1	36,8787	30,9553	36,9221	30,9870	+0,0434	+0,0317
C_1	54,0704	47,1552	54,1055	47,1682	+0,0351	+0,0130
D_1	70,4063	63,8089	70,4006	63,7589	-0,0057	-0,0500
A_4	19,6493	-14,7148	19,6794	-14,7370	+0,0301	+0,0222
B_4	40,0833	-28,8977	40,1287	-28,9274	+0,0454	+0,0297
C_4	61,2834	-42,5306	61,3142	-42,5425	+0,0308	+0,0119
D_4	83,2352	-55,5985	83,2009	-55,5565	-0,0343	-0,0420

Ferner ergaben sich folgende Werthe für die Entfernungen der stereographischen und Bonne'schen Projektionen dieser Punkte:

*) Das Zeichen + bedeutet, dass die Bonne'schen Coordinaten grösser, das Zeichen —, dass sie kleiner sind als die stereographischen Coordinaten.

Sehnen der Parallelkreise	Breite ihrer Endpunkte	sphärische	stereo-	Bonne'sche	Fehler der	Fehler der	Differenz zwischen der stereog. und Bonne'schen Proj.
		Distanz der Endpunkte	graphische Projektion	Projektion	stereog. Proj. (*)	Bonne'schen Projekt. (*)	
		geog. Ml.	geog. Ml.	geog. Ml.	geog. Ml.	geog. Ml.	geog. Ml.
A ₁ A ₂	51°	37,7546	37,6976	37,7547	-0,0570	+0,0001	+0,0571
B ₁ B ₂	52°	73,8421	73,7575	73,8442	-0,0846	+0,0021	+0,0867
C ₁ C ₂	53°	108,2004	108,1408	108,2109	-0,0596	+0,0105	+0,0701
D ₁ D ₂	54°	140,7678	140,8126	140,8011	+0,0448	+0,0333	-0,0115
A ₃ A ₄	49°	39,3589	39,2987	39,3588	-0,0602	-0,0001	+0,0601
B ₃ B ₄	48°	80,2596	80,1666	80,2575	-0,0930	-0,0021	+0,0909
C ₃ C ₄	47°	122,6395	122,5668	122,6284	-0,0727	-0,0111	+0,0616
D ₃ D ₄	46°	166,4367	166,4704	166,4017	+0,0337	-0,0350	-0,0687

Sehnen der Meridianbogen	Winkel, welche die Meridiane mit dem Haupt- meridiane bilden	sphärische	stereo-	Bonne'sche	Fehler der	Fehler der	Differenz zwischen der stereog. und Bonne'schen Proj.
		Distanz der Endpunkte	graphische Projektion	Projektion	stereograph. Projektion	Bonne'schen Projektion	
		geog. Ml.	geog. Ml.	geog. Ml.	geog. Ml.	geog. Ml.	geog. Ml.
A ₁ A ₄	2°	30	29,9553	30,0006	-0,0447	+0,0006	+0,0453
B ₁ B ₄	4°	60	59,9387	60,0001	-0,0613	+0,0001	+0,0614
C ₁ C ₄	6°	90	89,9754	89,9999	-0,0246	-0,0001	+0,0245
D ₁ D ₄	8°	120	120,0946	120,0001	+0,0946	+0,0001	-0,0945

Wie man aus der Fehlerreihe der stereographischen Projektionen ersieht, sind sowohl für die Parallelkreise als Meridiane die Projektionen der drei dem Centrum der Karte zunächstliegenden Sehnen kleiner als die sphärischen Distanzen ihrer Endpunkte, dagegen sind für die Sehnen D₁ D₂, D₃ D₄, D₁ D₄ die stereographischen Projektionen grösser als die sphärischen Entfernungen ihrer Endpunkte. Während also die stereographischen Projektionen derjenigen sphärischen Distanzen, deren senkrechte Abstände vom Mittelpunkte des Kugelabschnittes zwischen 0° und 3° liegen, kleiner sind als diese, sind die Projektionen solcher Distanzen, die vier und mehr Grade vom Centrum der Karte entfernt sind, grösser als die wirklichen Ent-

*) Das Zeichen + bedeutet, dass die Projektion grösser, das Zeichen -, dass sie kleiner ist als die sphärische Distanz.

fernungen auf der Kugel. Bei der stereographischen Projektion eines Kugelabschnittes sind daher in Folge unserer früheren Annahme die Distanzen im Innern der Karte etwas kleiner, diejenigen an den Grenzen der Karte etwas grösser als die wahren Entfernungen auf der Kugel.

In Bezug auf die Bonne'sche Methode ergibt sich aus der Betrachtung der Fehlercolumnne das Resultat, dass sowohl die Sehnen der Parallelkreise, als auch diejenigen der Meridiane mit den sphärischen Entfernungen ihrer Endpunkte sehr gut übereinstimmen, und könnte dies zu der Vermuthung Raum geben, dass bei der Bonne'schen Projektion wirklich keine bemerkenswerthen Abweichungen vorkommen, was indessen wie nachfolgende Zusammenstellung zeigen wird, für beliebig gewählte Distanzen nicht der Fall ist. Wie man ferner aus der Fehlerreihe der Bonne'schen Projektion ersieht, sind die Entfernungen $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$, $D_1 D_2$, welche nördlich vom Centrum der Karte liegen, grösser; die Entfernungen $A_3 A_4$, $B_3 B_4$, $C_3 C_4$, $D_3 D_4$, welche sich südlich davon befinden, kleiner, als die entsprechenden sphärischen Distanzen. Es folgt hieraus, dass die Meridianpunkte, welche sich nördlich vom mittleren Parallelkreise der Karte befinden, etwas zu weit vom Hauptmeridiane entfernt sind, während die südlich von diesem Parallelkreise gelegenen Meridianpunkte dem Hauptmeridiane zu nahe liegen.

Um zu untersuchen, welches die Fehler der Projektionen beliebig gewählter Kugeldistanzen sind, wurden auf der Kugelfläche 6 Orte angenommen, und ihre gegenseitigen Entfernungen, sowie diejenigen ihrer Projektionen berechnet. Als solche Orte wurden Paris, Turin, Triest und Berlin gewählt, ferner zwei Punkte A und C, welche in Bezug auf den Hauptmeridian zu Paris und Turin symmetrische Lagen besitzen (Taf. I. S. 60). Die Punkte A und C haben in Folge dessen mit den Orten Paris und Turin nach beiden Projektionsmethoden gleiche Ordinaten und ihre Abszissen unterscheiden sich von denjenigen der letztgenannten Orte nur in Bezug auf das Zeichen.

Im Folgenden sind die erhaltenen Zahlenwerthe zusammengestellt:

Sphärische Coordinaten.

Ort	Länge λ	Winkel, welchen der Meridian des Ortes mit dem Hauptmeridiane bildet	Breite φ
Paris	0° 0' 0"	—9° 30' 0"	48° 50' 49"*)
Turin	5° 21' 25" östl.	—4° 8' 35"	45° 4' 8"
Triest	11° 26' 17" „	1° 56' 17"	45° 38' 50"
Berlin	11° 3' 30" „	1° 33' 30"	52° 30' 17"
A	19° 0' 0" „	9° 30' 0"	48° 50' 49"
C	13° 38' 35" „	4° 8' 35"	45° 4' 8"

Coordinaten der Projektionen der Orte.

Ort	stereograph. Coordinaten		Bonne'sche Coordinaten		Differenz der Abszissen**)	Differenz der Ordinaten**)
	Abszisse	Ordinate	Abszisse	Ordinate		
Paris	—93,47328	—11,36807	—93,52353	—11,3497	+0,05025	—0,01837
Turin	—43,88849	—72,71969	—43,86745	—72,7555	—0,02104	+0,03581
Triest	20,31766	—64,96175	20,32029	—65,0290	+0,00263	+0,06725
Berlin	14,21128	37,66682	14,22707	37,7189	+0,01579	+0,05208
A	93,47328	—11,36807	93,52353	—11,3497	+0,05025	—0,01837
C	43,88849	—72,71969	43,86865	—72,7555	—0,01984	+0,03581

Entfernungen der Orte nach der stereographischen und Bonne'schen Projektionsmethode verglichen mit den wirklichen Distanzen auf der Kugel.

Entfernung	Wirkliche oder sphärische Distanz geogr. Mln.	stereogr. Projektion geogr. Mln.	Bonne'sche Projektion geogr. Mln.	Fehler der stereogr. Projektion geogr. Mln.	Fehler der Bonne'schen Projektion geogr. Mln.	Differenz zwischen der stereogr. und Bonne'schen Projektion
Paris-Turin	78,8267	78,8839	78,9701	+0,0572	+0,1434	+0,0862
Turin-Triest	64,6667	64,6732	64,6511	+0,0065	—0,0156	—0,0221
Triest-Berl.	102,9292	102,8101	102,9284	—0,1191	—0,0008	+0,1183

*) Breite des Pantheon.

***) Das Zeichen + bedeutet, dass die Bonne'sche Coordinate grösser, das Zeichen —, dass sie kleiner ist als die stereog. Coordinate.

Möllinger's Kartenprojektionen.

Entfernung	Wirkliche oder sphärische Distanz geogr. Mln.	stereogr. Projektion geogr. Mln.	Bonne'sche Projektion geogr. Mln.	Fehler der stereogr. Projektion geogr. Mln.	Fehler der Bonne'schen Projektion geogr. Mln.	Differenz zwischen der stereogr. und Bonne'schen Projektion
Berlin-Paris	118,4000	118,3232	118,3973	-0,0768	-0,0027	+0,0741
Paris-Triest	125,8104	125,7802	125,8645	-0,0302	+0,0541	+0,0843
Turin Berlin	124,8696	124,7428	124,8181	-0,1268	-0,0517	+0,0753
AP	187,0438	186,9466	187,0471	-0,0972	+0,0033	+0,1005
ATu.	150,4692	150,4403	150,4901	-0,0289	+0,0209	+0,0498
ATr.	90,6667	90,6864	90,7754	+0,0197	+0,1087	+0,0890
AB	93,2354	93,2035	93,2505	-0,0319	+0,0151	+0,0470
CP	150,4692	150,4403	150,4901	-0,0289	+0,0209	+0,0498
CTu.	87,7442	87,7770	87,7373	+0,0328	-0,0069	-0,0397
CTr.	24,7983	24,8147	24,7836	+0,0164	-0,0147	-0,0311
CA	78,8267	78,8839	78,9701	+0,0572	+0,1434	+0,0862
CB	114,4046	114,3063	114,3819	-0,0983	-0,0227	+0,0756

Die Summe der Fehlerquadrate, welche immer ein Minimum sein soll, beträgt bei der stereographischen Projektion: 0,06719091, bei der Bonne'schen Projektion: 0,06068531 Quadratmeilen. Zieht man aus diesen Zahlen die Quadratwurzel, so erhält man die Seiten der Fehlerquadrate, welche gleich 0,259212 und 0,246344 Einheiten sind. Obgleich sich durch diese Zahlen ein kleiner Vortheil zu Gunsten der Bonne'schen Projektionsmethode ergibt, so ist doch der Unterschied beider Zahlen so gering, dass beide Projektionsmethoden als auf gleicher Stufe stehend betrachtet werden können. Vergleicht man die sich ergebenden Fehlerreihen, so sieht man, dass in 3 Fällen (für die Distanzen ATu, CP, CTr) die Fehler bei beiden Methoden nahezu gleich sind, ausserdem sind in 5 Fällen die Fehler der stereographischen, in 7 Fällen diejenigen der Bonne'schen Projektion kleiner als die entsprechenden der anderen Projektionsmethode. Der grösste Fehler bei der stereographischen Methode ist gleich 0,1268 Meilen, während derjenige bei der Bonne'schen Methode 0,1434 Meilen beträgt, es ist also auch in dieser Beziehung zwischen beiden Projektionsmethoden kein bemerkenswerther Unterschied. Nimmt man an der grösste noch vorkommende Fehler betrage bei beiden Methoden 0,15 Meilen, so würde derselbe im Maasstabe 1:600000, in welchem die Karte von Deutschland einen Durchmesser von 2,963 oder nahezu 3 Meter erhält, gleich 1,8 Millimeter werden, eine Grösse welche zwar

klein ist aber beim Abgreifen einer Distanz immerhin noch berücksichtigt werden kann.

Betrachtet man endlich noch die sich ergebenden Differenzen zwischen den stereographischen und Bonne'schen Projektionen, so erhält man sowohl in Bezug auf die Coordinaten der einzelnen Punkte als auch in Bezug auf ihre gegenseitigen Entfernungen als grössten Unterschied, welcher sich für die Distanz „Triest-Berlin“ ergibt, 0,1183 g. Meilen, ein Werth, welcher weder den grössten Fehler der bei der stereographischen Projektion begangen wird noch denjenigen, welcher sich nach der Bonne'schen Methode ergibt, erreicht.

Für das Kartennetz der Schweiz wurde ebenfalls eine Vergleichung der stereographischen und Bonne'schen Methode angestellt. Als Mittelpunkt der Karte wurde derjenige angenommen, dessen sphärische Coordinaten $\lambda = 5^{\circ}53'$ (östlich von Paris) und $\varphi = 46^{\circ}48'$ betragen. Durch Rechnung ergibt sich der Bogenhalbmesser des Grenzkreises der Karte $= 1^{\circ}58'$ oder $= 29,5$ geog. Meilen. Die stereographische Projection des Grenzkreises besitzt einen Radius $r = 0,01716409$ Einheiten, welche 29,5 geog. Meilen repräsentiren, und sind daher die berechneten Werthe des stereographischen Netzes mit $\frac{29,5}{0,01716409} = 1718,704$ ($\log = 3,2352012$) zu multipliciren. Die Poldistanz des Gegenpunktes des Auges beträgt $\delta = 43^{\circ}12'$. Zur Prüfung des Netzes wurden auch hier 4 Orte: Genf, Zürich, Basel, Airolo angenommen, und ihre sphärischen, stereographischen und Bonne'schen Entfernungen berechnet. Es ergaben sich folgende Werthe:

Ort	Länge östlich von Paris *)	nördliche Breite *)	Poldistanz	Winkel, welchen der Meridian des Ortes mit dem Hauptmeridiane bildet
Genf	$\lambda_g = 3^{\circ}49'00''$	$\varphi_g = 46^{\circ}11'59''$	$\mathcal{P}_g = 43^{\circ}48'1''$	$\gamma_g = 2^{\circ}04'$
Zürich	$\lambda_z = 6^{\circ}12'45''$	$\varphi_z = 47^{\circ}22'40''$	$\mathcal{P}_z = 42^{\circ}37'20''$	$\gamma_z = 0^{\circ}19'45''$
Basel	$\lambda_b = 5^{\circ}15'00'$	$\varphi_b = 47^{\circ}33'$	$\mathcal{P}_b = 42^{\circ}27'$	$\gamma_b = 0^{\circ}38'$
Airolo	$\lambda_a = 6^{\circ}15'00''$	$\varphi_a = 46^{\circ}32'$	$\mathcal{P}_a = 43^{\circ}28'$	$\gamma_a = 0^{\circ}22'$

*) Die Werthe wurden Wolf's Taschenbuch der Mathematik entnommen.

Berechnete Coordinaten der stereographischen und Bonne'schen Projektionen der vier Orte in Bezug auf ein durch den Mittelpunkt der Karte gehendes Axensystem.

Ort	stereographische Projektion		Bonne'sche Projektion		Differenzen	
	Abszisse	Ordinate	Abszisse	Ordinate	der Abszissen	der Ordinaten
Genf	— 21,45375	— 8,72249	— 21,45407	— 8,7222	+ 0,00032	— 0,00029
Zürich	3,34322	8,67313	3,34346	8,6737	+ 0,00024	+ 0,00057
Basel	— 6,41157	11,27496	— 6,41191	11,2759	+ 0,00034	+ 0,00094
Airolo	3,78334	— 3,99097	3,78362	— 3,9911	+ 0,00028	+ 0,00013

Entfernungen der vier Orte nach der stereographischen und Bonne'schen Projektionsmethode verglichen mit den wirklichen Distanzen auf der Kugel.

Entfernung	in Bogenmass	wirkliche oder sphärische Distanz geog. Meilen	stereog. Projektion	Bonne'sche Projektion	Fehler der stereog. Projektion	Fehler der Bonne'schen Projektion	Differenz zwischen der stereog. und Bonne'schen Projektion
					geog. Meilen	geog. Meilen	
Genf-Basel	1° 40' 5,715*)	25,02380	25,02330	25,02380	— 0,00050	— 0,00000	+ 0,00050
Basel-Zürich	0 40 23, 17	10,09654	10,09582	10,09646	— 0,00072	— 0,00008	+ 0,00064
Zürich-Airolo	0 50 41, 481	12,67284	12,67260	12,67244	— 0,00024	— 0,00040	— 0,00016
Airolo-Genf	1 42 42, 658	25,67770	25,67677	25,67733	— 0,00093	— 0,00037	+ 0,00054
Genf-Zürich	2 1 9, 901	30,29125	30,29022	30,29033	— 0,00103	— 0,00042	+ 0,00061
Airolo-Basel	1 13 26, 064	18,35860	18,35714	18,35838	— 0,00146	+ 0,00022	+ 0,00124

Wie man aus der Zusammenstellung der Coordinaten der 4 Punkte sieht, beträgt die grösste Coordinatendifferenz 0,00094 geog. Meilen**) oder 6,963 m, welche Distanz im Massstabe 1:100000 (grosse Dufourkarte) 0,07 mm beträgt und beim Abgreifen auf einem Massstabe nicht mehr berücksichtigt werden kann, es ist daher schon aus diesem Grunde gleichgültig nach welcher der beiden Projektionsmethoden ein Kartennetz, in das die Schweiz eingezeichnet werden soll, construiert wird. Betrachtet man die Zusammenstellung der sphärischen, stereographischen und Bonne'schen Entfernungen der 4 Orte, so ergibt sich allerdings auch im vorliegenden Falle ein Vor-

*) Die sphärischen Distanzen der 4 Orte wurden mittelst den Neper'schen Analogien und dem Sinussatze so genau berechnet, als es mit 7stelligen Logarithmen bei grösster Schärfe der Rechnung möglich ist.

**) 1 geog. Meile = 7407,407 m (log = 3,8696662).

theil zu Gunsten der Bonne'schen Methode. Doch ist auch der grösste Fehler der stereographischen Projection nur 0,00146 geog. Meilen = 10,815 m, was im Massstab 1:100000 ein zehntel Millimeter beträgt, eine Grösse, welche beim Abgreifen auf einem Massstabe ebenfalls vernachlässigt werden kann.

Aus dem Vorhergehenden folgt daher, dass für Karten, welche kleinere Kugelabschnitte, wie Deutschland, Frankreich die Schweiz etc., darstellen sollen, die stereographische Projectionsmethode an der Stelle der Bonne'schen Methode zur Anwendung kommen kann, indem die aus einer solchen Karte entnommenen Distanzen nicht mit wesentlich grösseren Fehlern behaftet sind, als dies bei der Bonne'schen Methode der Fall ist. Da sich, wie wir gesehen haben, nach der stereographischen Projektionsmethode sowohl Parallelkreise als Meridiane wieder als Kreise projiciren, die aufeinander senkrecht stehen, während bei der Bonne'schen Methode nur die Parallelkreise als Kreise gezogen werden, die Meridiane aber Curven sind, deren genaue Construction umständlich ist, so wird man es nach meinem Dafürhalten in Zukunft vorziehen bei der Projection kleinerer Kugelabschnitte die stereographische Methode in Anwendung zu bringen

V. Abschnitt.

Von den äquivalenten Abbildungen.

Wenn sich bei einer Projektion der Kugeloberfläche die Projektionen irgend zweier Flächenelemente ebenso verhalten wie ihre Originale auf der Kugel, so sagt man die Projektion sei eine äquivalente Abbildung. Sind F_1 und F_2 zwei Flächenelemente der Kugel, f_1 und f_2 ihre Projektionen, so hat man die Proportion

$$f_1 : f_2 = F_1 : F_2 \text{ oder} \\ f_1 : F_1 = f_2 : F_2.$$

Ferner findet für eine beliebige Anzahl Flächenelemente die Proportionalreihe statt:

$$f_1 : F_1 = f_2 : F_2 = f_3 : F_3 = \dots = f_n : F_n$$

$$\text{Hieraus folgt } \Sigma(f) : \Sigma(F) = f_1 : F_1 \\ = f_2 : F_2 \\ = \dots$$

für $\Sigma(f) = \Sigma(F)$ ist auch $f_1 = F_1, f_2 = F_2, \dots, f_n = F_n$.

Es ist aber die Summe aller F gleich dem Flächeninhalte der sphärischen Figur, die Summe aller f gleich dem Flächeninhalte ihrer Projektion. Wird daher eine sphärische Figur in ihrer wahren Grösse abgebildet, so sind bei einer äquivalenten Abbildung auch die einzelnen Flächenelemente der Projektion gleich den entsprechenden Elementen der sphärischen Figur.

Wir wollen nun für einige der bekanntesten Kartenprojektionen die Aequivalenz beweisen:

1. Lambert's normale isocylindrische Projektion.

Denkt man sich die Kugel mit einem senkrechten Kreiscylinder umhüllt, welcher sie längs des Aequator berührt, so wird dieser von den verlängerten Meridianebenen in parallelen Geraden geschnitten, welche gleich weit von einander entfernt sind. Ebenso werden die

verlängerten Parallelkreisebenen die Cylinderfläche in Kreisen schneiden, welche mit dem Aequator congruent sind. Denkt man sich nun die Cylinderfläche längs einer Kante resp. eines Meridianes aufgeschnitten und in eine Ebene entwickelt, so entsteht ein Netz von senkrecht auf einander stehenden Geraden, bei welchen die Meridiane gleiche Entfernungen besitzen, während die Distanz der Parallelkreise um so mehr abnimmt, je näher die letzteren dem Pole liegen.

Um die Entfernung irgend eines Parallelkreises vom Aequator zu berechnen, hat man die Gleichung:

$$d = R \sin \varphi$$

in welcher R den Radius der Erde und φ die Breite des Parallelkreises bezeichnet.

Um die Aequivalenz dieser Projektionsmethode nachzuweisen, bedenke man dass die Mantelfläche eines senkrechten Kreis cylinders welcher als Basis den Aequator und die Höhe y besitzt:

$$M = 2 R \pi \cdot y$$

Dieselbe Formel hat man aber auch für die Oberfläche einer Kugelzone, deren Höhe y ist. Die zwischen den aufeinanderfolgenden Parallelkreisen liegenden Kugelzonen sind daher gleich den entsprechenden Cylinderzonen, und es ist auch die Mantelfläche des ganzen Cylinders gleich der Kugeloberfläche.

Diese Projektion wurde zuerst von dem deutschen Mathematiker Joh. Heinrich Lambert (1728—1777) in seinen Beiträgen zum Gebrauche der Mathematik beschrieben.

2. Aequivalente Cylinderprojektion einer Kugelzone.

Eine gegebene Kugelzone, deren mittlerer Parallelkreis die Breite φ besitzt, kann auf eine Cylinderfläche projicirt werden, welche als Basis diesen Parallelkreis hat. Stellt man die Bedingung, dass die zu erhaltende Projektion äquivalent sein soll, so muss die Kugelzone welche sich von der Breite φ bis zur Breite φ_1 erstreckt gleich der Mantelfläche des Cylinders sein, dessen Entwicklung die Kugelzone darstellt. Die Höhe h des Cylinders ergibt sich alsdann aus der Bedingungsgleichung:

$$\begin{aligned} \text{Fläche der Kugelzone} &= \text{der Fläche der Cylinderzone} \\ 2 R \pi (R \sin \varphi_1 - R \sin \varphi) &= 2 R \pi \cos \varphi h . \\ 2 R^2 \pi (\sin \varphi_1 - \sin \varphi) &= 2 R \pi \cos \varphi h . \\ h &= \frac{R (\sin \varphi_1 - \sin \varphi)}{\cos \varphi} \end{aligned}$$

$$h = \frac{2 R \cos \frac{1}{2} (\varphi_1 + \varphi) \sin \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi)}{\cos \varphi}$$

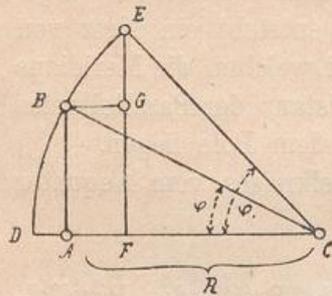


Fig. 38.

Auf dieselbe Weise kann auch die Höhe des unter dem mittleren Parallelkreise liegenden Theiles der Karte berechnet werden.

Diese Grösse wird auf folgende Weise construirt (siehe Fig. 38): Man mache $CA = R$, trage den Winkel φ im Punkte C an AC an, errichte im Punkte A eine Senkrechte AB, dann ist

$$BC = \frac{R}{\cos \varphi}$$

Beschreibt man ferner mit BC einen Kreis, trägt man den Winkel φ_1 nach DCE, und zieht man EF und BG, so ist:

$$EG = EF - FG = EF - AB$$

$$EG = CE \sin \varphi_1 - BC \sin \varphi = BC (\sin \varphi_1 - \sin \varphi)$$

$$EG = \frac{R}{\cos \varphi} (\sin \varphi_1 - \sin \varphi)$$

Es ist also $EG =$ der gesuchten Höhe h.

3. Albers äquivalente Kegelprojektion.

Bei dieser sind die Längen der Grenzkreise einer Zone, deren Breiten φ' und φ'' sind, gleich den Kreisbogen des Sectors, welcher die Zone darstellen soll, ferner ist die Oberfläche der Zone gleich der Mantelfläche des abgestumpften Kegels, welcher an die Stelle der Zone tritt.

Es ist daher:

$$2 R \pi (R \sin \varphi'' - R \sin \varphi') = (R \pi \cos \varphi' + R \pi \cos \varphi'') l$$

Hieraus folgt die Länge l der Kegelkante:

$$l = \frac{2 R (\sin \varphi'' - \sin \varphi')}{\cos \varphi' + \cos \varphi''}$$

oder wenn man für $(\sin \varphi'' - \sin \varphi')$ und $(\cos \varphi' + \cos \varphi'')$ ihre bekannten goniometrischen Werthe setzt und reducirt:

$$1) \quad l = 2 R \operatorname{Tg} \frac{\varphi'' - \varphi'}{2}$$

Dieser Werth lässt sich auf folgende Weise sehr einfach construiren (s. Fig. 39). Man beschreibe mit dem Radius $OD = R$ einen Kreis, trage an OD die Winkel φ' und φ'' an, und ziehe im Mittel-

punkte C des Bogens $\varphi'' - \varphi'$ eine Tangente an denselben, welche die verlängerten Radien in A und B schneidet.

Da AOB ein gleichschenkliches Dreieck ist, so ist

$$AB = 2 \cdot AC = 2 \cdot OC \cdot \text{Tg } \angle AOC \text{ oder}$$

$$AB = 2 R \cdot \text{Tg. } \frac{\varphi'' - \varphi'}{2} = 1$$

Die Tangente AB ist also der geometrische Werth von 1.

Wir wollen nun die Radien r' und r'' der äusseren Parallelkreise der Karte berechnen.

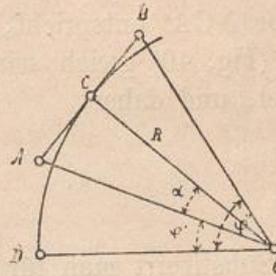


Fig. 39.

Da in der Entwicklung die Bogen, welche die äusseren Parallelkreise darstellen, demselben Centriwinkel entsprechen, so verhalten sie sich wie ihre Radien r' und r'' . Diese Bogen sind aber gleich den Umfängen der Parallelkreise und daher

$$2 R \pi \text{ Cos } \varphi' : 2 R \pi \text{ Cos } \varphi'' = r' : r''$$

oder 2) $\text{Cos } \varphi' : \text{Cos } \varphi'' = r' : r''$

und 3) $r' \text{ Cos } \varphi'' = r'' \text{ Cos } \varphi'$

Da nun $r' - r'' = 1$ somit $r' = 1 + r''$, so ist

$$(1 + r'') \text{ Cos } \varphi'' = r'' \text{ Cos } \varphi'$$

Hieraus folgt: $r'' = \frac{1 \text{ Cos } \varphi''}{\text{Cos } \varphi' - \text{Cos } \varphi''}$

oder wenn man für 1 aus Gleichung 1) den Werth und für $\text{Cos } \varphi' - \text{Cos } \varphi'' = 2 \text{ Sin } \frac{1}{2} (\varphi'' + \varphi') \text{ Sin } \frac{1}{2} (\varphi'' - \varphi')$ den Werth setzt und reducirt:

$$4) r'' = \frac{R \text{ Cos } \varphi''}{\text{Sin } \frac{1}{2} (\varphi' + \varphi'') \text{ Cos } \frac{1}{2} (\varphi'' - \varphi')}$$

In analoger Weise kann man in Gleichung 3) auch für $r'' = r' - 1$ seinen Werth setzen und erhält alsdann den Werth:

$$5) r' = \frac{R \text{ Cos } \varphi'}{\text{Sin } \frac{1}{2} (\varphi' + \varphi'') \text{ Cos } \frac{1}{2} (\varphi'' - \varphi')}.$$

Die Werthe von r'' und r' können auf folgende Weise construirt werden: Man trage auf die Gerade AC (Fig. 40) den Werth AB = 1 auf, errichte in den Punkten A und B die Senkrechten AE = $\text{Cos } \varphi'$ und BD = $\text{Cos } \varphi''$ und ziehe

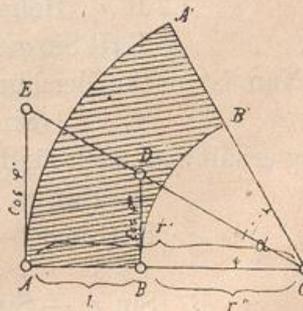


Fig. 40.

die Gerade ED, welche die Gerade AB in C schneidet, es ist alsdann $AC = r'$ und $BC = r''$.

Die Konstruktion stützt sich auf Proportion 2. —

Um die Grösse des Centriwinkels α zu berechnen, welcher dem Sector ACA' entspricht, bedenke man, dass die Länge des Bogens AA' (Fig. 40) gleich sein soll der Länge des Parallelkreises auf der Kugel, und daher

$$\frac{r' \pi \alpha}{180} = 2 R \pi \cos \varphi$$

$$\alpha = \frac{360 \cdot R \cos \varphi}{r'}$$

Substituirt man für r' seinen Werth und setzt man die Grösse

$$\sin \frac{1}{2} (\varphi' + \varphi'') \cos \frac{1}{2} (\varphi'' - \varphi') = m$$

so ergibt sich $\alpha = 360 m$, ferner ist auch nach Glch. 5

$$r' = \frac{R \cos \varphi'}{m} \text{ und}$$

$$6) \quad r' m = R \cos \varphi'$$

Um nun den Radius r eines beliebigen Parallelkreises zu berechnen, dessen Breite φ ist, denke man sich die Differenz der Radien, welche den Breiten φ' und φ entspricht, d. h. die Differenz $(r' - r)$ in n unendlich kleine Theile getheilt.

Ist alsdann die Länge des Meridianbogens

$$\frac{r' - r}{n} = \omega$$

so sind die Radien der aufeinanderfolgenden Parallelkreise, welche die Breiten $\varphi', \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_{n-1}, \varphi$ besitzen

$$r', r' - \omega, r' - 2\omega, r' - 3\omega, \dots, r' - (n-1)\omega, r' - n\omega = r$$

und da die Projektion eine äquivalente sein soll, d. h. die aufeinanderfolgenden schmalen Kugelzonen gleich den entsprechenden Kegelzonen sein sollen, so besteht für je zwei entsprechende Flächenelemente die Gleichung: Oberfläche der Kugelzone = Länge des Parallelkreisumfanges $\times \omega$ oder

$$2 R \pi \cdot \text{Höhe der Zone} = 2 R \cos \varphi' \pi \omega$$

oder $R (R \sin \varphi_1 - R \sin \varphi') = R \cos \varphi' \omega$

Nun ist nach Gleichung 6) $R \cos \varphi' = r' m$

somit $R^2 (\sin \varphi_1 - \sin \varphi') = r' m \omega$

analog erhält man auch für die übrigen Flächenelemente die Gleichungen:

$$R^2 (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) = (r' - \omega) m \omega$$

$$R^2 (\sin \varphi_3 - \sin \varphi_2) = (r' - 2\omega) m \omega$$

$$R^2 (\sin \varphi - \sin \varphi_{n-1}) = (r' - (n-1)\omega) m \omega$$

Addirt man diese Gleichungen so ergibt sich auf der linken Seite

7) $S = R^2 (\sin \varphi - \sin \varphi')$; ferner auf der rechten Seite:

$$S = [r' + (r' - \omega) + (r' - 2\omega) + \dots + (r' - (n-1)\omega)] m \omega$$

$$S = [n r' - (\omega + 2\omega + 3\omega + \dots + (n-1)\omega)] m \omega$$

$$S = \left[n r' - \frac{\omega + (n-1)\omega}{2} (n-1) \right] m \omega$$

$$S = \left[n r' - \frac{n \omega (n-1)}{2} \right] m \omega$$

Nun ist $n \omega = r' - r$ somit

$$S = \left[n r' - \frac{(r' - r)(n-1)}{2} \right] m \omega$$

$$S = \left[r' - \frac{(r' - r)(1 - \frac{1}{n})}{2} \right] n m \omega$$

für $n = \infty$ ist aber $\frac{1}{n} = 0$ und

$$S = \left[r' - \frac{(r' - r)}{2} \right] (r' - r) m$$

8) $S = \frac{(r'^2 - r^2) m}{2}$

Aus Gleichung 7) und 8) folgt:

$$2 R^2 (\sin \varphi - \sin \varphi') = (r'^2 - r^2) m$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich 9) $r^2 = r'^2 - \frac{2 R^2}{m} (\sin \varphi - \sin \varphi')$

Setzt man an die Stelle von φ, φ' , so ist an die Stelle von r, r'

zu setzen und man erhält: $r'^2 = r^2 + \frac{2 R^2}{m} (\sin \varphi'' - \sin \varphi')$

hieraus folgt: $r'^2 = r'^2 + \frac{2 R^2}{m} (\sin \varphi'' - \sin \varphi')$

Substituirt man diesen Werth in Gleichung 9, so ergibt sich

$$10) r^2 = r'^2 + \frac{2 R^2}{m} (\sin \varphi'' - \sin \varphi)$$

Die Werthe von r können für beliebige Werthe von φ nach Gleichung 9) oder 10) berechnet werden.

Dehnt man eine Karte bis zu dem einen Pole aus, so ist für diesen $\varphi = 90^\circ$ und nach Gleichung 10) der Radius des Kreises, welcher den Pol darstellt:

$$r^2 = r'^2 - \frac{2 R^2}{m} (1 - \sin \varphi'')$$

$$r^2 = r'^2 - \frac{4 R^2 \sin^2 \frac{\varphi''}{2}}{m}$$

Erstreckt sich dagegen eine Karte bis zum Aequator, so ist für diesen $\varphi = 0^\circ$ und man erhält den Radius des Kreises, welcher den Aequator darstellt nach der Gleichung:

$$r^2 = r''^2 + \frac{2R^2 \sin \varphi''}{m}$$

Sind bei einer Karte die Parallelkreise, welche in ihrer wahren Länge entwickelt werden, nicht mehr als 10° von einander entfernt, und sind die Grenzkreise der Karte von diesen Parallelkreisen nicht mehr als 5° entfernt, so erhält man eine Karte deren lineare Dimensionen mit demselben Massstabe abgegriffen werden können. In der Mitte der Karte werden die Distanzen, welche sich von Süd nach Nord erstrecken etwas vergrößert, dagegen die Distanzen die von Ost nach West gemessen werden, etwas verkleinert. Jenseit der in der wahren Grösse entwickelten Parallelkreise verhält sich die Sache gerade umgekehrt: Verkleinerung der Süd- und Norddimensionen, Vergrößerung der Ost-Westdistanzen.

Diese Projektion wurde von H. C. Albers in Lüneburg in Zachs monatlicher Korrespondenz im Nov. 1805 veröffentlicht.

4. Lambert's äquivalente Kegelprojektion.

Eine andere Projektion bei welcher die aufeinanderfolgenden unendlich schmalen Kugelzonen gleich den unendlich schmalen concentrischen Ringflächen eines Kreissectors sind, hat Joh. Heinrich Lambert in seinen Beiträgen zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung (Berlin 1772) gegeben. Lambert hat gefunden, dass wenn man den Radius eines Parallelkreises in der Entwicklung der Kegelfläche:

1) $r = 2 R \sqrt{m} \sin \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)$ macht, obiger Bedingung Genüge geleistet wird.

Erhebt man die Gleichung in's Quadrat, so ergibt sich:

$$r^2 = 4R^2 m \sin^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)$$

und da $2 \sin^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) = 2 \left(\sin 45^\circ \cos \frac{\varphi}{2} - \cos 45^\circ \sin \frac{\varphi}{2} \right)^2$
 $= 2 \cdot \sin^2 45^\circ \left(\cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \right)^2$ oder da $\sin^2 45^\circ = \frac{1}{2}$ ist

$$2 \sin^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) = \left(1 - 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \right) \\ = (1 - \sin \varphi)$$

so ist 2) $r^2 = 2 R^2 m (1 - \sin \varphi)$

Für einen Parallelkreis von der Breite φ_1 ist analog

$$r_1^2 = 2R^2m(1 - \sin\varphi_1)$$

und $r^2 - r_1^2 = 2R^2m(\sin\varphi_1 - \sin\varphi)$

Multipliziert man diese Gleichung mit $\frac{\pi}{m}$ so ist

$$3) \frac{r^2\pi}{m} - \frac{r_1^2\pi}{m} = 2R\pi(R\sin\varphi_1 - R\sin\varphi). \text{ Mittelst dieser}$$

Gleichung ist die Aequivalenz dieser Projektion leicht nachzuweisen.

Ihre linke Seite ist nämlich der Unterschied zweier Kreissectoren, welche den gemeinschaftlichen Centriwinkel $\alpha = \frac{360^\circ}{m}$ haben.

[Wie bekannt ist die Oberfläche eines Kreissectors:

$$0_s = \frac{r^2\pi\alpha}{360} \text{ und da } 0_s = \frac{r^2\pi}{m}, \text{ so ist } \frac{\alpha}{360} = \frac{1}{m}]$$

Auf der rechten Seite der Gleichung 3 hat man dagegen die Oberfläche einer Kugelzone, deren äussere Parallelkreise die Breiten φ_1 und φ besitzen. Sind φ_1 und φ nur wenig von einander verschieden, so ist die sehr schmale Kugelzone gleich der Oberfläche ihrer Projektion, wesshalb der Aequivalenz Genüge geleistet wird.

Soll die Länge irgend eines Parallelkreises von der Breite φ_1 gleich der Länge seiner Projektion sein, die mit dem Radius r_1 beschrieben wird, so ist:

$$2R\pi\cos\varphi_1 = \frac{2r_1\pi\alpha}{360^\circ} \text{ oder da } \frac{\alpha}{360} = \frac{1}{m} \text{ ist}$$

$$2R\pi\cos\varphi_1 = \frac{2r_1\pi}{m}$$

und 4) $2r_1\pi = m \times 2R\pi\cos\varphi_1$ d. h. der Umfang der Projektion des Parallelkreises ist alsdann m mal so gross als der Parallelkreis selbst.

Ferner ergibt sich aus Gleichung 4)

$$5) R\cos\varphi_1 = \frac{r_1}{m}$$

Zur Bestimmung der Grösse m macht man die Annahme, dass für den genannten Parallelkreis, als welchen man am natürlichsten den mittleren Parallelkreis der Karte annimmt, die Breitengrade in dem richtigen Verhältnisse zu den Längengraden stehen. Sind φ_1 und φ nur wenig von einander verschieden, und bezeichnet man mit $(\varphi_1 - \varphi)$ den Arcus welcher ihrer Differenz entspricht, so ist der kleine Bogen des Meridianes $= R(\varphi_1 - \varphi)$ und seine Projektion $= r_1 - r$. Ist ferner λ gleich dem Arc. eines sehr kleinen Längenunterschiedes, so ist $R\lambda\cos\varphi_1$ der sehr kleine Parallelkreisbogen, und nach Gleichung 5)

$\frac{r_1\lambda}{m}$ seine Projektion. Es findet somit die Proportion statt:

$$R (\varphi_1 - \varphi) : R \lambda \text{Cos } \varphi_1 = (r_1 - r) : \frac{r_1 \lambda}{m}$$

und $(r_1 - r) R \lambda \text{Cos } \varphi_1 = \frac{r_1 \lambda}{m} R (\varphi_1 - \varphi)$

$$6) \frac{r_1 - r}{\varphi_1 - \varphi} = \frac{r_1}{m \text{Cos } \varphi_1}$$

Setzt man nach Gleich. 1) für r_1 und r ihre Werthe so ist:

$$\begin{aligned} r - r_1 &= 2 R \sqrt{m} \left[\text{Sin} \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) - \text{Sin} \left(45^\circ - \frac{\varphi_1}{2} \right) \right] \\ &= 2 R \sqrt{m} \cdot 2 \text{Cos} \frac{1}{2} \left(90^\circ - \frac{\varphi + \varphi_1}{2} \right) \text{Sin} \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi_1 - \varphi}{2} \right) \\ &= 4 R \sqrt{m} \text{Cos} \left(45^\circ - \frac{\varphi + \varphi_1}{4} \right) \text{Sin} \frac{\varphi_1 - \varphi}{4} \end{aligned}$$

und der linke Theil der Gleich. 6 lautet:

$$\frac{r - r_1}{\varphi_1 - \varphi} = R \sqrt{m} \text{Cos} \left(45^\circ - \frac{\varphi + \varphi_1}{4} \right) \frac{4 \text{Sin} \frac{\varphi_1 - \varphi}{4}}{4 \cdot \left(\frac{\varphi_1 - \varphi}{4} \right)}$$

Sind nun φ und φ_1 sehr wenig von einander verschieden, so ist

$$\frac{\varphi + \varphi_1}{4} = \frac{2 \varphi_1}{4} = \frac{\varphi_1}{2} \text{ und } \frac{4 \text{Sin} \frac{\varphi_1 - \varphi}{4}}{4 \left(\frac{\varphi_1 - \varphi}{4} \right)} = 1$$

somit 7) $\frac{r - r_1}{\varphi_1 - \varphi} = R \sqrt{m} \text{Cos} \left(45^\circ - \frac{\varphi_1}{2} \right)$

ferner ist der rechte Theil der Gleich. 6

$$\frac{r_1}{m \text{Cos } \varphi_1} = \frac{r_1}{m \text{Sin} (90^\circ - \varphi_1)} = \frac{2 R \sqrt{m} \text{Sin} \left(45^\circ - \frac{\varphi_1}{2} \right)}{m \cdot 2 \text{Sin} \left(45^\circ - \frac{\varphi_1}{2} \right) \text{Cos} \left(45^\circ - \frac{\varphi_1}{2} \right)}$$

oder 8) $\frac{r_1}{m \text{Cos } \varphi_1} = \frac{R}{\sqrt{m} \text{Cos} \left(45^\circ - \frac{\varphi_1}{2} \right)}$

Setzt man in die Gleich. 6 die erhaltenen Werthe, so ergibt sich:

$$\sqrt{m} \text{Cos} \left(45^\circ - \frac{\varphi_1}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{m} \text{Cos} \left(45^\circ - \frac{\varphi_1}{2} \right)}$$

Hieraus folgt 9) $m = \frac{1}{\text{Cos}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi_1}{2} \right)}$

Nach dieser Gleichung lässt sich der Werth von m , welcher immer grösser als 1 ist, berechnen, und da der Werth

$2 R \sin \left(45^\circ \frac{\varphi}{2} \right)$ leicht construirt werden kann, er ist in Fig. 41 = AP, so wird auch der Werth von $r = \sqrt{m} \cdot AP$ leicht durch Construction erhalten.

5. Projektion von Bonne. Dieselbe wurde schon Seite 89 ausführlich beschrieben, und kann man sich daher darauf beschränken ihre Aequivalenz nachzuweisen. Ein sehr schmaler Streifen der Kugeloberfläche, welcher zwischen den Parallelkreisen von den Breiten φ_1 und φ_2 liegt, ist gleich der Länge des

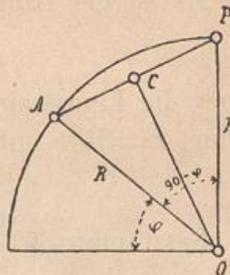


Fig. 41.

Parallelkreises von der Breite $\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ multiplicirt mit dem Abstände $R(\varphi_1 - \varphi_2)$ der beiden Parallelkreise. [$\varphi_1 - \varphi_2$ sei gleich dem Arc., welcher der Breitendifferenz entspricht.] Da nun beide Längen auf der Karte in ihrer wahren Grösse aufgetragen werden und aufeinander senkrecht stehen, so wird ein solcher Streifen auf der Karte ebenfalls in seiner wahren Grösse abgebildet. Dasselbe gilt auch von jedem anderen analogen Flächenstreifen der Kugel, und da man jede sphärische Figur in der Richtung der Parallelkreise in unendlich schmale Streifen zerlegen kann, deren Projektionen gleich ihren Originalen sind, so wird ein jeder Theil der Kugeloberfläche auf der Karte in der wahren Grösse abgebildet, wodurch die Aequivalenz der Bonne'schen Projektion bewiesen ist.

6. Die äquivalente Projektion von Joh. Werner. Dieselbe ist eine conventionelle Kegelpjektion, bei welcher die Spitze des Kegels im Pole angenommen wird. Alle Parallelkreise werden als concentrische Kreise gezeichnet, welche als gemeinschaftlichen Mittelpunkt die Spitze des Kegels besitzen. Der Radius eines Parallelkreises von der Breite φ wird gleich der Länge des Meridianbogens genommen, welcher zwischen dem Pol und dem Parallelkreise liegt. Es ist daher:

$$r = R \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = R \psi$$

wenn φ den Arc. der Breite, und ψ sein Complement bezeichnet.

Da die Parallelkreise in ihrer wahren Länge abgetragen werden, so ist wieder jeder unendlich schmale Flächenstreifen der Kugel nach der Richtung der Parallelkreise gleich seiner Projektion, wesshalb diese Kegelpjektion ebenfalls äquivalent ist.

Der Quadrant eines Parallelkreises dessen Breite φ ist, erscheint als ein Bogen dessen Centriwinkel α auf folgende Weise erhalten wird:

Es ist die Länge des Parallelkreisquadranten

$$l = 90^\circ \cdot \frac{R \cos \varphi \pi}{180^\circ}$$

ferner die Länge eines Bogens, welcher dem Centriwinkel α und dem Radius $r = R \psi$ entspricht:

$$l = \frac{r \pi \alpha}{180} = \frac{R \psi \pi \alpha}{180^\circ}$$

Setzt man die Werthe von l einander gleich, so ist

$$90 \cos \varphi = \psi \alpha$$

$$\alpha = 90^\circ \frac{\cos \varphi}{\psi} = 90^\circ \frac{\sin \psi}{\psi}$$

In welche Gleichung ψ in Bogenmass einzusetzen ist. $\text{Arc. } 1^\circ = 0,0174533$

In nachfolgender Tabelle sind die Werthe von α für verschiedene Werthe von ψ zusammengestellt.

ψ	α	ψ	α
0°	90° 0'	100	50° 45'
10	89 33	110	44 3
20	88 11	120	37 12
30	85 57	130	30 23
40	82 53	140	23 40
50	79 1	150	17 10
60	74 26	160	11 1
70	69 12	170	5 16
80	63 27	180	0 0
90	57 18		

Diese Projektion wurde von dem deutschen Geometer Johann Werner (1468—1528) aus Nürnberg im Jahre 1514 veröffentlicht. Werner hat nebst dieser Projektionsart noch zwei andere analoge Projektionsmethoden angegeben, welche jedoch nicht äquivalent sind. Die Werner'schen Projektionen haben sämmtlich die Eigenschaft, dass die für die Projektion der ganzen Kugel erhaltenen Netze eine Herzform besitzen.

VI. Abschnitt.

Von den konformen oder orthomorphen Abbildungen.

Ist eine Projektion ihrem Originale in den kleinsten Theilen ähnlich, so sagt man dieselbe sei eine konforme oder orthomorphe Abbildung. Wie aus der ebenen Geometrie bekannt ist sind zwei Figuren ähnlich, wenn sie gleiche Winkel haben und ihre entsprechenden Seiten in Proportion stehen. Dass ein beliebiges Kugeldreieck und seine Projektion diese Eigenschaft nicht besitzen kann, versteht sich von selbst, denn die Kugel ist keine entwickelbare Fläche, dagegen kann man beliebig viele Arten von Projektionen erhalten, bei welchen jedes unendlich kleine Kugeldreieck ABC seinem Bilde abc ähnlich ist. Ist für diesen Fall P ein Punkt im Inneren des Dreieckes und p seine Projektion, so müssen 1) die Winkel APB, APC, BPC ihren entsprechenden Projektionen apb, apc, bpc gleich sein und 2) muss die Gleichung stattfinden:

$$\frac{ap}{AP} = \frac{bp}{BP} = \frac{cp}{CP} = v$$

Man nennt den Werth v, welcher das Verhältniss zwischen dem unendlich kleinen Bilde und seinem Originale darstellt, das lineare Vergrößerungsverhältniss der Projektion. Dasselbe ist für jeden Punkt P der Kugeloberfläche ein anderes, während es für ähnliche Figuren ein constantes ist, und muss für jede Projektionsmethode besonders bestimmt werden.

Wir wollen nun die wichtigsten konformen Projektionen betrachten:

1. Die stereographische Projektionsmethode. Wie früher bewiesen wurde (siehe Seite 14) schneiden sich bei jeder stereographischen Projektion zwei beliebige Kugelkreise unter demselben Winkel wie ihre Originale auf der Kugel, und es lässt sich dieser Satz auch für zwei beliebige Curven aussprechen, welche auf der Kugel gezogen

werden. Denn denkt man sich auf jeder Curve zwei Punkte angenommen, welche ihrem Schnittpunkte sehr nahe liegen und sich links und rechts von ihm befinden, so kann man durch je drei dieser Punkte einen Kreis legen, wodurch die sich schneidenden Curvenelemente durch Kreiselemente ersetzt werden und die Tangenten im Durchschnittpunkte beider Curven mit den Tangenten der Kugelkreise zusammenfallen. Die Projektionen der letzteren schneiden sich aber unter demselben Winkel wie ihre Originale, wesshalb sich auch die Projektionen der Curven unter demselben Winkel wie die Curven selbst schneiden müssen. Jedes unendlich kleine sphärische Dreieck ABC ist daher mit seinem Bilde abc ähnlich, denn beide haben gleiche Winkel und da sich jede unendlich kleine sphärische Figur in sphärische Dreiecke zerlegen lässt, welche alle mit ihren Bildern ähnlich sind, so folgt daraus, dass diese Figur und ihr Bild ebenfalls ähnlich sein müssen. Eine jede stereographische Projektion ist daher eine conforme oder orthomorphe Abbildung.

Um das Vergrößerungsverhältniss für die stereographische Projektionsmethode zu bestimmen, denke man sich durch die Augēaxe OQ (Fig. 7 Seite 18) einen grössten Kreis QAO gelegt. Nimmt man auf diesem Kreise zwei Punkte A und H an, welche sehr nahe bei einander liegen, so hat man den Werth des Verhältnisses zu bestimmen, das man erhält, wenn man die Projektion von AH d. h. die Linie ah mit ihrem Originale AH dividirt.

Ist der Abstand des Punktes A vom Gegenpunkte des Auges $AQ = \mathcal{A}$, ferner der Abstand $HQ = \mathcal{A}_1$, der Radius der Erde = R und bezeichnen \mathcal{A} und \mathcal{A}_1 die Arc. der betreffenden Winkelgrössen, so ist

$$AH = R(\mathcal{A} - \mathcal{A}_1)$$

ferner die Projektion $ah = Ma - Mh = R\left(\operatorname{Tg} \frac{\mathcal{A}}{2} - \operatorname{Tg} \frac{\mathcal{A}_1}{2}\right)$

$$ah = \frac{R \operatorname{Sin} \frac{1}{2}(\mathcal{A} - \mathcal{A}_1)}{\operatorname{Cos} \frac{\mathcal{A}}{2} \operatorname{Cos} \frac{\mathcal{A}_1}{2}}$$

$$\text{und } \frac{ah}{AH} = \frac{\operatorname{Sin} \frac{\mathcal{A} - \mathcal{A}_1}{2}}{\operatorname{Cos} \frac{\mathcal{A}}{2} \operatorname{Cos} \frac{\mathcal{A}_1}{2} \cdot \frac{\mathcal{A} - \mathcal{A}_1}{2}}$$

Sind nun \mathcal{A} und \mathcal{A}_1 sehr wenig von einander verschieden, so ist

$$\operatorname{Cos} \frac{\mathcal{A}}{2} \operatorname{Cos} \frac{\mathcal{A}_1}{2} = \operatorname{Cos}^2 \frac{\mathcal{A}}{2} \text{ und } \frac{\operatorname{Sin} \frac{\mathcal{A} - \mathcal{A}_1}{2}}{\frac{\mathcal{A} - \mathcal{A}_1}{2}} = 1$$

somit die lineare Vergrößerung:

$$1) v = \frac{ah}{AH} = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{A}{2}}$$

und die Flächenvergrößerung $v^2 = \frac{1}{4 \cos^4 \frac{A}{2}}$

für die Mitte der Karte ist $A = 0$ und $v = \frac{1}{2 \cos^2 0^\circ} = \frac{1}{2}$

für die Grenze der Karte ist bei der Darstellung der Halbkugel

$$A = 90^\circ \text{ und } v = \frac{1}{2 \cos^2 45^\circ} = 1$$

An den Grenzen der Karte ist alsdann das Vergrößerungsverhältniss doppelt so gross wie in der Mitte.

Da die stereographische Projektion in den kleinsten Theilen ähnlich ist, so ist das Vergrößerungsverhältniss für alle Richtungen um einen bestimmten Punkt A dasselbe, welches auch die Lage des grössten Kreises QAO ist, auf dem der Punkt A liegt.

Berechnet man für verschiedene Werthe von A die entsprechenden Werthe von v nach Gleich. 1, so ergeben sich für v folgende Werthe:

$A = 0^\circ$	30°	45°	60°	90°
$v = 0,5000$	$0,5359$	$0,5858$	$0,6666$	1

Man sieht daraus, dass das Vergrößerungsverhältniss bis zu einer Entfernung von 60° vom Gegenpunkte des Auges nahezu constant bleibt und daher Karten bis zu dieser Ausdehnung mit keinen grossen Fehlern behaftet sein werden.

2. Die Projektion von Mercator. Bei der Konstruktion einer Karte nach Mercatorsprojektion (siehe Seite 65) ging man von der Voraussetzung aus, dass die Karte in den kleinsten Theilen ähnlich sein solle. Obgleich es daher unnöthig ist noch einmal die Aehnlichkeit nachzuweisen, so kann doch eine Verallgemeinerung des Beweises der Aehnlichkeit insofern stattfinden, dass man auf der Kugel ein unendlich kleines sphärisches Curvenstück $p q$ (Fig. 28 Seite 72) wählt, welches mit irgend einem Meridiane den Winkel $qpr = \zeta$ einschliesst, und nachweist, dass bei einer Karte nach Mercatorsprojektion die Projektion $p' q'$ dieses Curvenstückes mit der Projektion des entsprechenden Meridianes denselben Winkel bildet. Ist dieser Beweis für ein beliebiges Curvenstück geleistet, so werden für einen bestimmten Punkt der Kugel alle sphärischen Curvenelemente, welche durch diesen Punkt gehen, mit seinem Meridiane in Bild und Original

ebenfalls dieselben Winkel einschliessen und daher die Curvenelemente unter sich in Bild und Original auch gleiche Winkel bilden d. h. die Mercatorprojektion ist alsdann in den kleinsten Theilen ähnlich.

In Fig. 28 S. 72 sei qrp ein unendlich kleines sphärisches Dreieck, pr sei ein Meridianbogen, qr ein Parallelkreisbogen und pq ein unendlich kleines Curvenelement, das man sich auch durch ein Kreisbogenelement ersetzt denken kann. Ist ferner $\sphericalangle qpr = \zeta$ so ergibt sich

$$\text{Tg } \zeta = \frac{q r}{p r}$$

oder da $qr = cd \text{ Cos } \varphi = R (l_1 - l) \text{ Cos } \varphi$
 und $pr = R (\varphi_1 - \varphi)$
 $\text{Tg } \zeta = \frac{(l_1 - l)}{(\varphi_1 - \varphi)} \text{ Cos } \varphi$

In diesen Gleichungen bezeichnet $(l_1 - l)$ den Arc. der Längendifferenz, $(\varphi_1 - \varphi)$ denjenigen der Breitendifferenz der Punkte p und q .

Ferner ist bei einer Karte nach Mercatorsprojektion die Projektion des Parallelkreisbogens qr gleich der Länge des Aequatorbogens, welcher der Längendifferenz $(l_1 - l)$ entspricht, also für $R = 1$

$$q' r' = l_1 - l$$

Für die Projektion des Meridianbogens pr wurde dagegen S. 66 gefunden

$$p' r' = d\lambda = \frac{d\varphi}{\text{Cos } \varphi} \text{ oder da } d\varphi = \varphi_1 - \varphi$$

$$p' r' = \frac{\varphi_1 - \varphi}{\text{Cos } \varphi} \text{ und daher}$$

$$\text{Tg } \zeta' = \frac{q' r'}{p' r'} = \frac{l_1 - l}{\varphi_1 - \varphi} \text{ Cos } \varphi$$

Es ist also $\text{Tg } \zeta' = \text{Tg } \zeta$ und $\zeta' = \zeta$ d. h. die Projektion des Curvenelementes schliesst in Wirklichkeit mit dem Meridiane denselben Winkel ein, wie das Curvenelement selbst.

Um für die Merkatorprojektion das Vergrößerungsverhältniss v zu bestimmen, dividire man die Projektion eines Meridianelementes mit seinem Originale. Es ist aber für $R = 1$ ein Meridianelement

$$pr = (\varphi_1 - \varphi)$$

während seine Projektion $p' r' = \frac{\varphi_1 - \varphi}{\text{Cos } \varphi}$ somit

die lineare Vergrößerung $v = \frac{p' r'}{pr} = \frac{1}{\cos \varphi} = \text{Sec } \varphi$
 und die Flächenvergrößerung

$$v^2 = \frac{1}{\cos^2 \varphi} = \text{Sec}^2 \varphi$$

3. Lambert's konforme Kegelprojektion. Stellt man sich die Aufgabe eine conforme Kegelprojektion zu konstruiren, bei welcher die Parallelkreise durch concentrische Kreise dargestellt werden, die Meridiane aber gerade Linien sind, welche vom Centrum der Parallelkreise ausgehen und unter sich Winkel bilden, die das n fache der Winkel sind, welche die Meridiane auf der Kugel mit einander einschliessen, so hat man zunächst eine Bedingungsgleichung abzuleiten, die erfüllt sein muss, damit die Projektion conform ist. Dieselbe wird auf folgende Weise erhalten:

Es seien ab und cd (Fig. 42) die Projektionen zweier Parallelkreisbogen AB und CD , welche demselben Centriwinkel entsprechen und deren Breiten φ und φ_1 sich sehr wenig von einander unterscheiden. Sind alsdann λ und λ_1 die Längen der Punkte c und a und ist $\lambda_1 - \lambda$ ebenfalls eine verschwindend kleine Grösse, so muss als Bedingung der Conformität die Proportion stattfinden:

$$1) \frac{ac}{cd} = \frac{AC}{CD}$$

Setzt man den Arc. von $(90^\circ - \varphi) = \psi$,
 den Arc. von $(90^\circ - \varphi_1) = \psi_1$ ferner den Arc. der Längendifferenz
 $= (\lambda_1 - \lambda)$ so ist:

$$AC = R (\psi_1 - \psi) \text{ und } CD = R (\lambda_1 - \lambda) \text{ Sin } \psi$$

Bezeichnen ferner r_1 und r die Radien der Parallelkreise ab und cd so ist $ac = r_1 - r$, und da der Centriwinkel α , welcher dem Bogen cd entspricht, gleich dem n fachen Längenunterschiede ist, also Arc. $\alpha = n (\lambda_1 - \lambda)$, so muss

$$cd = n (\lambda_1 - \lambda) r \text{ sein}$$

und Gleichung 1) lautet;

$$\frac{r_1 - r}{n (\lambda_1 - \lambda) r} = \frac{\psi_1 - \psi}{(\lambda_1 - \lambda) \text{ Sin } \psi}$$

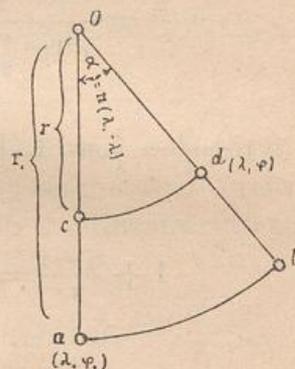


Fig. 42.

Hieraus folgt:

$$2) \frac{r_1 - r}{r(\psi_1 - \psi)} = \frac{n}{\sin \psi}$$

welche Gleichung erfüllt sein muss, damit obige Kegelprojektion conform ist.

Dieser Bedingung wird nun Genüge geleistet, wenn man nach Lambert den Radius irgend eines Parallelkreises

$$3) r = c \operatorname{Tg}^n \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \text{ oder}$$

$$r = c \operatorname{Tg}^n \frac{1}{2} (90^\circ - \varphi) \text{ oder}$$

$$3a) r = c \operatorname{Tg}^n \frac{\psi}{2} \text{ macht, in welcher Gleichung } c \text{ irgend eine}$$

Constante bezeichnet, die durch den Massstab der Karte bestimmt ist.

Um dies zu beweisen bilde man den Quotienten:

$$\frac{r_1}{r} = \frac{c \operatorname{Tg}^n \frac{\psi_1}{2}}{c \operatorname{Tg}^n \frac{\psi}{2}} = \left(\frac{\operatorname{Tg} \frac{\psi_1}{2}}{\operatorname{Tg} \frac{\psi}{2}} \right)^n$$

$$1 + \frac{r_1 - r}{r} = 1 + \frac{\left(\frac{\operatorname{Tg} \frac{\psi_1}{2}}{\operatorname{Tg} \frac{\psi}{2}} \right)^n - \operatorname{Tg} \frac{\psi}{2}}{\operatorname{Tg} \frac{\psi}{2}} = \left(1 + \frac{\operatorname{Tg} \frac{\psi_1}{2} - \operatorname{Tg} \frac{\psi}{2}}{\operatorname{Tg} \frac{\psi}{2}} \right)^n$$

$$1 + \frac{r_1 - r}{r} = \left(1 + \frac{\operatorname{Tg} \frac{\psi_1}{2} - \operatorname{Tg} \frac{\psi}{2}}{\operatorname{Tg} \frac{\psi}{2}} \right)^n$$

Setzt man der Einfachheit wegen $\frac{\operatorname{Tg} \frac{\psi_1}{2} - \operatorname{Tg} \frac{\psi}{2}}{\operatorname{Tg} \frac{\psi}{2}} = x$

so ist $1 + \frac{r_1 - r}{r} = (1 + x)^n$

$$\frac{r_1 - r}{r} = nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots$$

Dividirt man diese Gleichung mit $\psi_1 - \psi$ so ergibt sich:

$$4) \frac{r_1 - r}{r(\psi_1 - \psi)} = \frac{x}{\psi_1 - \psi} \left(n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^2 + \dots \right)$$

Es ist aber $\frac{x}{\psi_1 - \psi} = \frac{\operatorname{Tg} \frac{\psi_1}{2} - \operatorname{Tg} \frac{\psi}{2}}{\operatorname{Tg} \frac{\psi}{2} (\psi_1 - \psi)} = \frac{\sin \frac{1}{2} (\psi_1 - \psi)}{\operatorname{Tg} \frac{\psi}{2} (\psi_1 - \psi) \cos \frac{\psi_1}{2} \cos \frac{\psi}{2}}$

$$= \frac{\sin \frac{1}{2} (\psi_1 - \psi)}{2 \frac{(\psi_1 - \psi)}{2} \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\psi_1}{2}}$$

Ist nun $(\psi_1 - \psi)$ eine unendlich kleine Grösse, so ist

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(\psi_1 - \psi)}{\frac{1}{2}(\psi_1 - \psi)} = 1 \text{ und } \psi_1 = \psi$$

somit $\frac{x}{\psi_1 - \psi} = \frac{1}{\sin \psi}$

und Gleichung 4) lautet:

$$5) \frac{r_1 - r}{r(\psi_1 - \psi)} = \frac{1}{\sin \psi} \left(n + \frac{n(n-1)}{1.2} x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} x^2 + \dots \right)$$

für $\psi_1 - \psi =$ einer unendlich kleinen Grösse ist aber auch

$$x = \frac{\operatorname{Tg} \frac{\psi_1}{2} - \operatorname{Tg} \frac{\psi}{2}}{\operatorname{Tg} \frac{\psi}{2}}$$

eine unendlich kleine Grösse und die

Summe der in obiger Gleichung mit x multiplicirten Glieder verschwindet gegenüber n , wie sich auf folgende Weise leicht beweisen lässt: Es ist

$$\frac{n(n-1)}{1.2} x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} x^2 + \dots = x \left(\frac{n(n-1)}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} x + \dots \right)$$

dieser Ausdruck ist kleiner als $x \left(\frac{n(n-1)}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \dots \right)$

denn es ist x eine verschwindend kleine Grösse und wenn man an seine Stelle die Einheit setzt, so muss dadurch ein grösserer Ausdruck entstehen. Setzen wir zu obigem Ausdruck in der Klammer noch die Glieder $1 + \frac{n}{1}$ hinzu, so ist

$$x \left(1 + \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \dots \right) > \frac{n(n-1)}{1.2} x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} x^2 + \dots$$

Die Klammer links enthält die Summe der Coefficienten der Binomialreihe, welche $= 2^n$ ist, somit $2^n x > \frac{n(n-1)}{1.2} x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} x^2 + \dots$

Da nun x eine verschwindend kleine Grösse ist, so ist auch $2^n x$ verschwindend klein und der rechte Theil obiger Relation eine an Null grenzende Grösse. Gleichung 5) lautet daher:

$$\frac{r_1 - r}{r(\psi_1 - \psi)} = \frac{n}{\sin \psi}$$

Diese Gleichung ist identisch mit Gleichung 2, welche die Bedingung der Conformität enthält.

Um die Constante n zu bestimmen, stelle man die Forderung, dass zwei beliebige Parallelkreise, welche die Poldistanzen ψ_1 und ψ_2 besitzen, in ihrer wahren Grösse projecirt werden. Sind alsdann r_1 und r_2 die Radien ihrer Projektionen, ferner α der gemeinschaft-

liche Centriwinkel ihrer Bilder und R der Radius der Erde, so müssen die Gleichungen bestehen:

$$\frac{r_1 \pi \alpha}{180} = 2 R \pi \sin \psi_1$$

$$\frac{r_2 \pi \alpha}{180} = 2 R \pi \sin \psi_2$$

Durch Division dieser beiden Gleichungen ergibt sich:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\sin \psi_1}{\sin \psi_2}$$

oder wenn man nach Gleich. 3a für r_1 und r_2 ihre Werthe setzt:

$$\left(\operatorname{Tg} \frac{\psi_1}{2} \right)^n = \frac{\sin \psi_1}{\sin \psi_2}$$

$$n \left(\log \operatorname{Tg} \frac{\psi_1}{2} - \log \operatorname{Tg} \frac{\psi_2}{2} \right) = \log \sin \psi_1 - \log \sin \psi_2$$

$$6) \quad n = \frac{\log \sin \psi_1 - \log \sin \psi_2}{\log \operatorname{Tg} \frac{\psi_1}{2} - \log \operatorname{Tg} \frac{\psi_2}{2}}$$

Das Vergrößerungsverhältniss v wird auf folgende Weise erhalten.

$$\text{Es ist} \quad v = \frac{ac}{AC} = \frac{cd}{CD} \quad (\text{siehe Fig. 41})$$

$$\text{oder da } cd = n(\lambda_1 - \lambda)r \text{ und } CD = R(\lambda_1 - \lambda) \sin \psi$$

$$\text{so ist} \quad v = \frac{n(\lambda_1 - \lambda)r}{R(\lambda_1 - \lambda) \sin \psi} = \frac{nr}{R \sin \psi}$$

oder wenn man für r seinen Werth setzt:

$$v = \frac{nc}{R \sin \psi} = \operatorname{tg}^n \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)$$

Die Flächenvergrößerung ist das Quadrat dieser Grösse. Diese Projektionsmethode rührt von dem deutschen Mathematiker Joh. Heinrich Lambert her, welcher sie in seinen Beiträgen zum Gebrauche der Mathematik beschrieben hat (Berlin 1772).

Da sie nebst der Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen als Hauptvorzüge noch die Leichtigkeit der Construction des Netzes, ferner die richtige Abbildung der Winkel (mit einziger Ausnahme der Winkel am Pole) und die Gleichheit der zwischen denselben Parallelkreisen liegenden Meridianbogen besitzt, so eignet sie sich vorzüglich zur Darstellung von Ländern von grosser Längenerstreckung. Sie wurde von der geographischen Gesellschaft in Petersburg zur Construction der im Mai 1862 publicirten Karte des europäischen Russlandes und des Kaukasus (12 Blätter im Massstabe 1 : 1680000) welche sich von

36° bis 68° Breite erstreckt, angewandt, wobei jedoch der Abplattung der Erde Rechnung getragen wurde.

Ueber andere conforme Abbildungen siehe die berühmte Abhandlung von Gauss: „Allgemeine Auflösung der Aufgabe: die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird,“ welche 1822 den Preis der Kopenhagener Akademie erlangte und im dritten Hefte von Schumachers Astronomischen Abhandlungen (Altona 1825) erschienen ist. Die allgemeine Theorie über die konformen Abbildungen findet sich auch in Gretschels Lehrbuch der Kartenprojektionen (Verlag von Friedrich Voigt, Weimar 1873) Seite 199 Kap. V., ferner in J. J. Littrow's Chorographie (Becks Universitätsbuchhandlung, Wien 1833) Seite 176.

VII Abschnitt.

Construktion des Netzes der Erd- und Himmelsgloben.

Um das Netz der Meridian- und Parallelkreise eines Globus zu zeichnen, denke man sich denselben durch Meridianebenen in eine gleiche Anzahl congruenter Zweiecke getheilt. Ist r der Radius des Globus und n die

Anzahl der Zweiecke (Fig. 43), so ist die Breite eines solchen Zweieckes in der Entwicklung

(Fig. 44)

$$CD = \frac{2 r \pi}{n}$$

ferner ist die Höhe $p_n p_s$ des Zweieckes in der Entwicklung gleich dem halben Umfang der Kugel:

$$p_n p_s = r \pi$$

Soll der Abstand der Parallelkreise φ Grade betragen, so muss in der Entwicklung (Fig. 44) $Oa = ab = bc \dots =$ der Länge des Meridian-

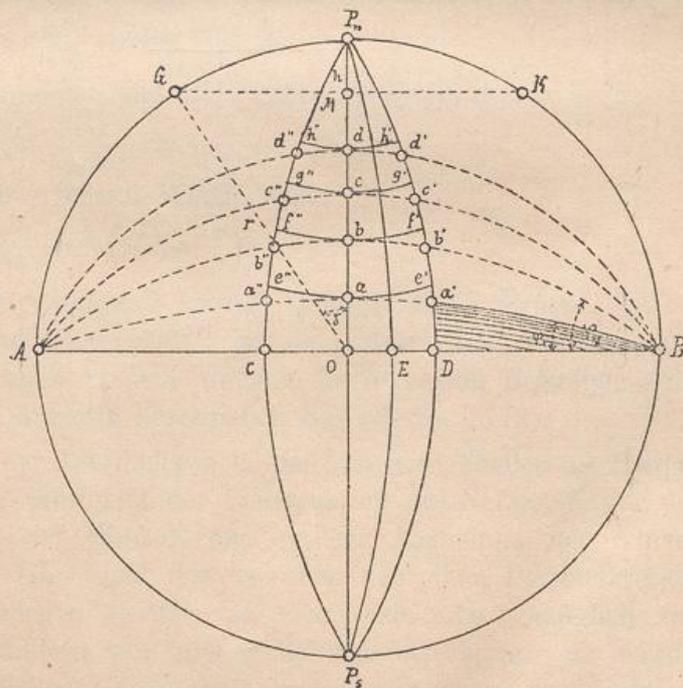


Fig. 43.

bogens gemacht werden, welcher φ Graden des grössten Kreises der Kugel entspricht. Ist l die Länge dieses Bogens, so ist:

$$l = \frac{r\pi\varphi}{180}$$

Um nun die Grenzpunkte der Meridianbogen $p_n Cp_s$ und $p_n Dp_s$ in

der Entwicklung zu erhalten, denke man sich durch den Mittelpunkt der Kugel (Fig. 43) eine Senkrechte AB auf die Meridianebene $P_n P_s$ gezogen, welche die Kugeloberfläche in den Punkten A und B trifft. Durch die Pole A und B des grössten Kreises $P_n P_s$ und die Theilpunkte $a b c \dots$, lege man grösste Kreise, welche wie bekannt auf dem grössten Kreise $P_n P_s$ senkrecht stehen und das Zweieck in den Bogen $a'a''$, $b'b''$, $c'c'' \dots$ schneiden. Errichtet man nun in Fig. 44 in den Theilpunkten $a b c \dots$ auf dem mittleren Meridiane $p_n p_s$ des Zweieckes Senkrechte, so sind auf diese, von den Theilpunkten $a b c \dots$ aus, die halben Längen der Bogen $a'a''$, $b'b''$, $c'c'' \dots$ (Fig. 43) aufzutragen, wodurch die Begrenzungspunkte $a' b' c' \dots$, $a'' b'' c'' \dots$ der Meridiane erhalten werden.

Man hat nun vor Allem die Längen der Bogen aa' , bb' , $cc' \dots$ zu berechnen, welche sich aus Fig. 43 ergeben. In dieser ist BDA' ein bei D rechtwinkliges sphärisches Dreieck, in welchem die Kathete $DB = 90^\circ - OD$ und der Winkel $DBa' = \text{Bogen } Oa = \varphi_1$ bekannt sind. Entspricht die Breite CD des Zweieckes λ Längengraden, so ist $OD = \frac{\lambda}{2}$ und $DB = 90^\circ - \frac{\lambda}{2}$, ferner ist $Ba' = 90^\circ - aa'$ und es ergibt sich aus $\triangle BDA'$:

$$\text{Tg} . DB = \text{Tg} . Ba' \times \text{Cos} \varphi_1 \text{ oder}$$

$$\text{Tg} \left(90^\circ - \frac{\lambda}{2} \right) = \text{Tg} (90^\circ - aa') \text{Cos} \varphi_1$$

$$\text{Cotg} \frac{\lambda}{2} = \text{Cotg} aa' \text{Cos} \varphi_1 \text{ oder}$$

$$\frac{1}{\text{Tg} \frac{\lambda}{2}} = \frac{1}{\text{Tg} aa'} \text{Cos} \varphi_1$$

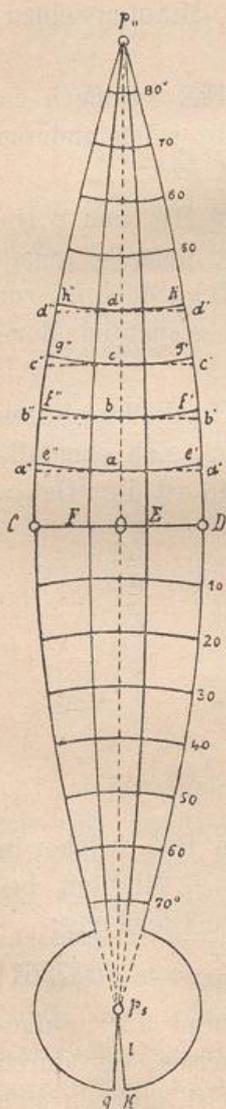


Fig. 44.

$$1) \operatorname{Tg} aa' = \operatorname{Tg} \frac{\lambda}{2} \operatorname{Cos} \varphi_1$$

Aus dieser Gleichung wird der Winkel $aa' = \alpha$ berechnet und die Länge des Bogens aa' nach der Gleichung erhalten:

$$2) aa' = \frac{r \pi \alpha'}{180 \cdot 60} = 0,000290888 r \alpha' \left(\log \frac{\pi}{10800} = \bar{4},4637261 \right)$$

in welcher r der Radius der Kugel, und α in Minuten einzusetzen ist.

Die Länge von aa' wird in der Entwicklung (Fig. 44) nach aa und aa'' aufgetragen. Analog ergibt sich auch für jeden anderen Theilpunkt b, c, \dots die Länge der Senkrechten $b'b'', c'e'' \dots$

Soll auf dem Globus zwischen den Meridianen $p_n O p_s$ und $p_n D p_s$ noch ein Meridian $p_n E p_s$ gezeichnet werden, so wird derselbe genau auf dieselbe Weise erhalten wie der Meridian $p_n D p_s$, doch ist zur Berechnung von aa' in Gleichung 1) für λ der dem gesuchten Meridiane entsprechende Werth einzusetzen.

Es sind nun noch in das Zweieck (Fig. 44) die Parallelkreisbogen einzuzeichnen, deren Endpunkte $e'f'g' \dots, e''f''g'' \dots$ sich ebenfalls am einfachsten durch Rechnung ergeben. In Fig. 43 ist $Bg \cdot De' =$ der Breite φ_1 des Parallelkreises $e'e''$ und

$$Bg a'e' = Bg \cdot De' - Bg \cdot Da', \text{ somit}$$

$$3) \sphericalangle a'e' = \varphi_1 - \sphericalangle Da'$$

Aus dem Dreiecke $B Da'$ folgt aber:

$$\operatorname{Tg} Da' = \operatorname{Sin} BD \operatorname{Tg} \varphi_1$$

$$\operatorname{Tg} Da' = \operatorname{Sin} \left(90^\circ - \frac{\lambda}{2} \right) \operatorname{Tg} \varphi_1$$

$$4) \operatorname{Tg} Da' = \operatorname{Cos} \frac{\lambda}{2} \operatorname{Tg} \varphi_1$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich der Werth von Da' , welcher in Gleichung 3) eingesetzt wird. Nachdem $\sphericalangle a'e' = \beta$ Minuten berechnet ist, erhält man die Bogenlänge $a'e'$ nach der Gleichung:

$$5) a'e' = \frac{r \pi \cdot \beta'}{180 \cdot 60} = 0,000290888 r \beta' \left(\log \frac{\pi}{10800} = \bar{4},4637261 \right)$$

Diese Bogenlänge wird in Fig. 44 nach $a'e'$ und $a''e''$ aufgetragen, wodurch die Punkte e' und e'' des Parallelkreises, der durch den Punkt a geht, bestimmt sind. Auf analoge Weise ergeben sich auch für die übrigen Parallelkreise drei zu ihrer Konstruktion nothwendige Punkte.

Für einen Globus, bei welchem die Breite der Zweiecke dem Winkel $\lambda = 30^\circ$ entspricht, und bei welchem die Parallelkreise und

Meridiane in Entfernungen von 10^0 zu 10^0 gezogen werden sollen, ergeben sich für $r=1$ nach den Gleichungen 1) 2) 3) 4) 5) folgende Werthe:

Netz eines Globus dessen Radius $r=1$ ist.

Breite CD des grossen Zweieckes $= \frac{\pi}{6} = 0,5235988$

Breite EF des inneren Zweieckes $= \frac{\pi}{18} = 0,1745329$

Höhe $p_n p_s$ des Zweieckes $= \pi = 3,14159265$

Abstand der Parallelkreise $= \frac{\pi}{18} = 0,1745329$

Breite der Parallelkreise $\varphi =$	Bogenlänge von $aa' = \alpha$	Bogenlänge von $a'c' = \beta$	Bogenlänge von $aa' = \alpha$	Bogenlänge von $a'c' = \beta$
	für die Begrenzungsmeridiane des Zweieckes		für die inneren Meridiane des Zweieckes	
0°	0,261799	0,000000	0,087266	0,000000
10	0,257998	0,005832	0,085948	0,0006496
20	0,246664	0,010996	0,082030	0,0012217
30	0,228018	0,014879	0,075621	0,0016484
40	0,202449	0,015887	0,066919	0,0018762
50	0,170562	0,017119	0,056175	0,0018762
60	0,133183	0,015141	0,043716	0,0016532
70	0,091387	0,011291	0,029913	0,0012266
80	0,046494	0,006026	0,015194	0,0006545

Ist der Radius des Globus gleich r , so sind diese Zahlenwerthe mit r zu multipliciren. Nachdem mittelst obiger Tabelle das Netz der Parallelkreise und Meridiane gezeichnet ist, lassen sich die Details der Erdoberfläche oder bei einem Himmelsglobus die Fixsterne mit Leichtigkeit eintragen. Sollen einzelne Punkte z. B. diejenigen der Ekliptik mit Genauigkeit bestimmt werden, so geschieht dies auf folgende Weise: Man betrachte einen jeden Punkt als Durchschnitt eines Parallelkreises und eines Meridianes, die nach obigen Gleichungen einzeln berechnet und in das Netz eingetragen werden, dadurch wird auch der betreffende Punkt möglichst genau bestimmt. Da die Enden der Zweiecke sehr schmal sind, und beim Aufziehen auf die von Gyps oder Pappe hergestellte Kugel nicht gut zusammenpassen, so zieht man es häufig vor die Zweiecke in einer Entfernung von 15^0 bis

20° von den Polen abzuschneiden, und an den Polen der Kugel Polscheiben anzubringen. Die Dimensionen dieser Polscheiben erhält man auf folgende Weise: Man denkt sich den Kugelabschnitt $G P_n K$ (Fig. 43) durch einen senkrechten Kreiskegel ersetzt, dessen Seitenkante gleich der Bogenlänge $G P_n$ des Abschnittes ist. (In Fig. 43 wurde der Abschnitt der Deutlichkeit wegen zu gross angenommen).

Ist alsdann $GO = r$ der Radius der Kugel und $\sphericalangle GOP_n = \delta$, so ist die Seitenkante des Kegels:

$$6) G P_n = l = \frac{r \pi \delta'}{10800} = 0,000290888 r \delta'$$

Um den Radius x des Basiskreises des Kegels zu berechnen, hat man die Bedingungsgleichung: Oberfläche des Kugelabschnittes gleich der Mantelfläche des Kegels, oder:

$$2 r \pi \cdot P_n M = 2 x \pi \cdot \frac{l}{2},$$

in welcher Gleichung $P_n M = h$, gleich der Höhe des Abschnittes und $l =$ der Seitenkante des Kegels ist.

Aus dieser Gleichung ergibt sich:

$$x = \frac{2 r h}{l} \text{ und da}$$

$$h = P_n O - O M = r - r \cos \delta = r(1 - \cos \delta)$$

$$h = 2 r \sin^2 \frac{\delta}{2}, \text{ so ist}$$

$$7) x = \frac{4 r^2 \sin^2 \frac{\delta}{2}}{l}$$

Da der Radius der Polscheibe (Fig. 44) gleich 1 und daher der Umfang des Kreises dem sie angehört $= 2 l \pi$, der Radius des Basiskreises des Kegels aber x und sein Umfang $= 2 x \pi$ ist, so ist aus dem Kreise (Fig. 44) ein Sector auszuschneiden, welcher über dem Bogen $gk = 2 \pi (1 - x)$ steht.

Der Centriwinkel dieses Ausschnittes ist:

$$\gamma = \frac{180 \cdot gk}{l \pi} = \frac{180}{l \pi} 2 \pi (1 - x).$$

$$8) \gamma = \frac{360(1 - x)}{1}$$

Ist der Radius des Globus $r = 1$ und $\delta = 15^\circ$, so ergibt sich nach Gleichung 6) $l = 0,261799$ ferner nach Gleichung 7) und 8)

$$x = 0,260308 \text{ und } \gamma = 2^\circ 03'01''$$

Berichtigungen.

- Seite 3 Zeile 7 von unten statt Abzisse lies Abszisse
 „ 11 „ 10 „ oben „ Sni „ Sin
 „ 17 „ 3 „ unten rechts statt r „ ϱ
 „ 26 „ 8 „ oben „ „ Δ „ Δ'
 „ 27 „ 1 „ „ links „ dentisch lies identisch
 „ 33 Fig. 13 statt M lies M'', statt H lies H'', P_s ist zu streichen
 „ 33 „ 14 „ G' „ g'
 „ 35 „ 15 „ N „ N'', in Fig. 16 statt M und N lies M' u. N'
 „ 36 Zeile 6 von unten statt p_s' lies p_s' p_s'

Zu Seite 37

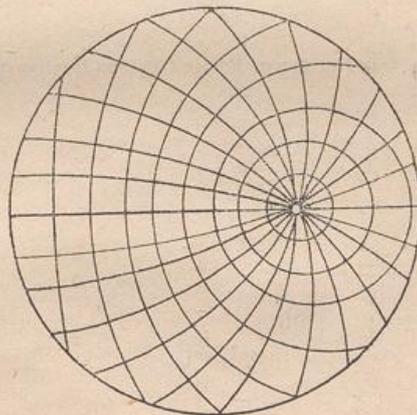


Fig. 16a. Stereographische Horizontalprojektion der Halbkugel.
 (Parallelkreise und Meridiane sind in Entfernungen von 15° angenommen.)

- Seite 42 Zeile 10 von oben statt JK lies J'K'
 „ 46 „ 2 „ unten „ dieser lies dieses
 „ 48 in den Zahlenwerthen der Meridiane $\lambda > 50^\circ$
 Zeile 1 von oben rechts statt 0,7726 lies 0,7736
 „ 4 „ „ links „ 0,7962 „ 0,7952
 „ 127 „ 1 „ „ lies: $2 R \sin \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)$

Druck von Fr. Aug. Eupel in Sondershausen.



GHP : 03 M22950

P
03

1000

1000
1000